
Stanford University Libraries
3 6105 027 650 311





ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES,
DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME V. — ANNÉE 1903.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS,
IMPRIMEUR-ÉDITEUR

TOULOUSE.
ÉD. PRIVAT,
IMPRIMEUR-LIBRAIRE

1903

(La Revue paraît chaque trimestre.)

Premier fascicule.



ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME V. – ANNÉE 1903.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS,
IMPRIMEUR-ÉDITEUR.

TOULOUSE,
ED. PRIVAT,
IMPRIMEUR-LIBRAIRE.

1903

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

RECHERCHES SUR L'HYDRODYNAMIQUE,

PAR M. P. DUHEM.

TROISIÈME PARTIE.

SUR LES QUASI-ONDES (¹).

§ 1. — Définition des quasi-ondes. Formules analogues aux formules d'Hugoniot.

Au sein d'un fluide non visqueux, on peut observer deux sortes d'ondes qui soient du premier ordre (²) par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Les unes sont des *ondes transversales* qui ne se propagent pas; les autres sont des *ondes longitudinales;* ce sont ces dernières qui vont nous occuper.

Pour ne pas introduire dans nos raisonnements de complications inutiles, nous supposerons que le fluide est soumis seulement à des actions newtoniennes; nous aurons alors deux cas à distinguer :

1° *Le fluide est doué de conductibilité :*

$$k > 0.$$

Les ondes longitudinales se propagent alors avec une vitesse donnée par la *loi*

(¹) *Sur les quasi-ondes* (*Comptes rendus*, t. CXXXV, p. 761, séance du 10 novembre 1902).

(²) *Recherches sur l'Hydrodynamique;* deuxième Partie : *Sur la propagation des ondes*, Chapitre IV (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. IV, 1902, p. 145).

de Newton [*Recherches sur l'Hydrodynamique,* IIe Partie, égalité (228 *bis*)]

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T}.$$

2° *Le fluide n'est pas conducteur :*

$$k = 0.$$

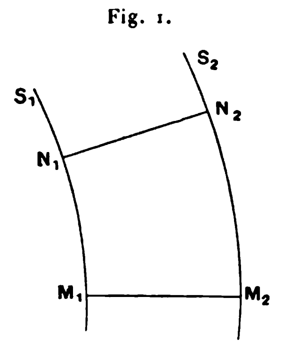
Les ondes longitudinales se propagent alors avec une vitesse donnée par la *loi de Laplace* [*Ibid.,* égalité (233)]

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T} \frac{C}{c}.$$

L'air est très peu conducteur de la chaleur; cependant sa conductibilité n'est pas rigoureusement nulle. Une onde du premier ordre par rapport aux composantes de la vitesse doit donc, si elle est longitudinale, s'y propager avec une vitesse donnée par la loi de Newton. Or l'expérience montre que la vitesse de propagation d'une onde sonore n'èst nullement régie par la formule de Newton, mais bien par la formule de Laplace. Il y a là une apparence de contradiction qu'il nous faut examiner.

Considérons deux surfaces S_1, S_2 (*fig.* 1). Si, par un point M_1 de S_1, nous

Fig. 1.



élevons une normale à cette surface, elle rencontre la surface S_2 en M_2. Nous désignerons par ε la distance M_1M_2. Nous supposerons que la distance ε est une très petite quantité.

Nous supposerons que la région du fluide où sont tracées les surfaces S_1, S_2 n'est traversée par aucune onde; les quantités u, v, w, ρ, Π, T seront donc, dans toute cette région et pendant tout le laps de temps considéré, des fonctions analytiques de x, y, z, t.

Soit f une fonction quelconque de x, y, z; nous désignerons par $(f)_1^2$ l'excès $f(M_2) - f(M_1)$] de sa valeur au point M_2 sur sa valeur au point M_1.

Nous admettrons que les six quantités

$$(u)_1^2,\quad (v)_1^2,\quad (w)_1^2,\quad (\rho)_1^2,\quad (\Pi)_1^2,\quad (T)_1^2$$

sont des quantités très petites, du même ordre que ε, qui varient d'une manière continue lorsque M_1 décrit la surface S_1, tandis que parmi les quantités

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2,$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1^2,\quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_1^2,\quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_1^2,$$
$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1^2,\quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1^2,\quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2$$

il en est au moins une qui a une valeur finie.

Lorsqu'il en sera ainsi, nous dirons que la tranche comprise entre les deux surfaces S_1, S_2 forme une *quasi-onde* du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Il est clair qu'au point de vue expérimental, une quasi-onde ne se distingue pas d'une onde véritable; au point de vue algébrique, au contraire, elle en est essentiellement distincte.

Sur la surface S_1, prenons un point quelconque N_1, voisin du point M_1; par ce point, menons une normale à la surface S_1; soit N_2 le point où cette normale rencontre la surface S_2. Visiblement, nous pourrons écrire

$$[u(N_2)-u(N_1)]-[u(M_2)-u(M_1)]=\lambda\varepsilon\overline{M_1N_1},$$

en désignant par λ une quantité finie.

Cette égalité peut encore s'écrire

$$(1)\qquad [u(M_1)-u(N_1)]-[u(M_2)-u(N_2)]=\lambda\varepsilon\overline{M_1N_1}.$$

Si, par le point M_1, on mène une tangente au chemin M_1N_1, et si l'on désigne par l, m, n les cosinus directeurs de cette tangente, on aura

$$(2)\qquad u(N_1)-u(M_1)=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 l+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 m+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1 n\right]\overline{M_1N_1},$$

en désignant par $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1, \cdots$ les valeurs des quantités $\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ au point M_1.

Si, de même, par le point M_2 on mène une tangente au chemin M_2N_2 et si l'on désigne par l', m', n' ses cosinus directeurs, on aura

$$(2\ bis)\qquad u(N_2)-u(M_2)=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 l'+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 m'+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2 n'\right]\overline{M_2N_2},$$

en désignant par $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2, \cdots$ les valeurs des quantités $\frac{\partial u}{\partial x}, \cdots$ au point M_2.

Les quantités $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2, \cdots$ peuvent être finies; au contraire, les différences $l' - l$, $m' - m$, $n' - n$ sont sûrement de l'ordre de ε; il en est de même de la différence $\frac{M_2 N_2}{M_1 N_1} - 1$. Dès lors, les égalités (1), (2) et (2 *bis*) nous permettent d'écrire

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 l + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 m + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 n = \mu\varepsilon,$$

μ étant une quantité finie.

Cette égalité (3) doit avoir lieu pour tout système de valeurs de l, m, n assujetti aux égalités

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$
$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0.$$

L'une des trois quantités α, β, γ, soit α, est sûrement différente de zéro. Si l'on pose

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \mho,$$

l'égalité (3) deviendra

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 - \beta \mho\right] m + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 - \gamma \mho\right] n = \mu\varepsilon.$$

Il nous est loisible de faire prendre à n la valeur zéro; cette égalité nous montrera alors que la différence $\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 - \beta \mho\right]$ a une valeur très petite de l'ordre de ε; nous pouvons, de même, donner à m la valeur zéro; nous voyons que la différence $\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 - \gamma \mho\right]$ a une valeur très petite de l'ordre de ε. En résumé, à chaque point M_1 de la surface S_1, on peut faire correspondre quatre quantités finies $\mho$, a, b, c, telles que l'on ait

$$(4) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 = \alpha \mho + a\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 = \beta \mho + b\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 = \gamma \mho + c\varepsilon. \end{cases}$$

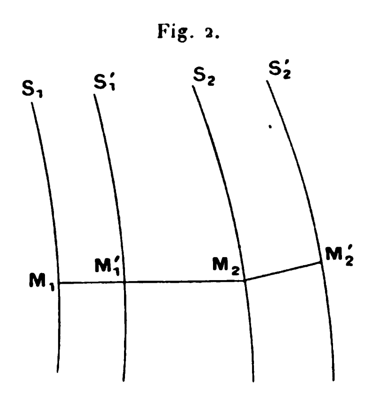
On justifierait de même les égalités

$$(4\ bis) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1^2 = \alpha \mho' + a'\varepsilon, & \ldots, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1^2 = \alpha \Psi + a''\varepsilon, & \ldots. \end{cases}$$

Ces égalités jouent pour les quasi-ondes le même rôle que le premier lemme d'Hugoniot pour les ondes proprement dites.

Considérons maintenant une quasi-onde *persistante;* limitée, à l'instant t, par les surfaces S_1, S_2, elle est limitée, à l'instant $(t+dt)$, par les surfaces S'_1, S'_2 (*fig.* 2). La normale à la surface S_1, menée par le point M_1, rencontre la sur-

Fig. 2.



face S'_1 en M'_1; la normale à la surface S_2, menée par le point M_2, rencontre la surface S'_2 en M'_2; on a

$$M_1M'_1 = \mathfrak{N}\,dt, \qquad \overline{M_2M'_2} = \mathfrak{N}_2\,dt,$$

$\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}_2$ ayant, pour chaque point M_1 de la surface S_1, des valeurs déterminées; de plus, $(\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N})$ est de l'ordre de ε.

Nous pouvons évidemment écrire

$$[u(M'_2) - u(M'_1)] - [u(M_2) - u(M_1)] = \lambda\varepsilon\,dt,$$

λ étant une quantité finie; ou bien encore

$$(5) \qquad [u(M'_2) - u(M_2)] - [u(M'_1) - u(M_1)] = \lambda\varepsilon\,dt.$$

Or on a

$$(6) \qquad u(M'_1) - u(M_1) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 \alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 \beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1 \gamma\right] \mathfrak{N}\,dt + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_1 dt.$$

Si α_2, β_2, γ_2 sont les cosinus directeurs de la normale $M_2M'_2$, on a de même

$$(6\ bis) \qquad u(M'_2) - u(M_2) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 \alpha_2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 \beta_2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2 \gamma_2\right] \mathfrak{N}_2\,dt + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_2 dt.$$

Mais, visiblement, les différences $(\alpha_2 - \alpha)$, $(\beta_2 - \beta)$, $(\gamma_2 - \gamma)$ sont des quantités

très petites de l'ordre de ε. Les égalités (5), (6), (6 *bis*) donnent donc l'égalité

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 \alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 \beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 \gamma\right] \mathfrak{N} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_1^2 = \mu\varepsilon.$$

Comparée aux égalités (4), cette relation devient la première des égalités

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathfrak{N}\mathfrak{U} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_1^2 = d\,\varepsilon, \\ \mathfrak{N}\mathfrak{V} + \left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)_1^2 = d'\varepsilon, \\ \mathfrak{N}\mathfrak{W} + \left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)_1^2 = d''\varepsilon, \end{cases}$$

d, d', d'' étant trois quantités finies.

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue. Ces égalités (7) sont, pour les quasi-ondes, ce que le second lemme d'Hugoniot est pour les ondes.

§ 2. — Des quasi-ondes dans les fluides parfaits.

L'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

est vraie en tout point de l'espace; écrivons-la au point M_2, puis au point M_1, et retranchons membre à membre les deux égalités obtenues; nous trouvons

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1^2 + u\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1^2 + v\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1^2 + w\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1^2 + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2 = \lambda\varepsilon,$$

λ étant une quantité finie. Mais une démonstration semblable à celle qui a fourni les égalités (4), (4 *bis*) et (7) montre qu'à tout point M_1 de la surface S_1 correspondent cinq quantités finies A, B, C, D, $\mathfrak{R}$ telles que l'on ait

$$(9) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1^2 = \alpha\mathfrak{R} + A\varepsilon, \\ \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1^2 = \beta\mathfrak{R} + B\varepsilon, \\ \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1^2 = \gamma\mathfrak{R} + C\varepsilon, \\ \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1^2 + \mathfrak{N}\mathfrak{R} = D\varepsilon. \end{cases}$$

En vertu des égalités (4), (4 *bis*) et (9), l'égalité (8) devient

$$(10)\qquad (\mathcal{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{R} - \rho(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W}) = \mathrm{E}\varepsilon,$$

E étant, en tout point M_1 de la surface S_1, une quantité finie.

Raisonnons de même sur les trois équations hydrodynamiques; écrivons la première

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho \mathrm{X} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

au point M_2, puis au point M_1, et retranchons membre à membre les deux égalités obtenues; la différence $[X(M_2) - X(M_1)]$ étant supposée très petite de l'ordre de ε, nous trouverons l'égalité

$$(11)\qquad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_1^2 + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_1^2 + \rho u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 + \rho v\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 + \rho w\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 = \lambda\varepsilon,$$

où λ est une quantité finie.

Mais, en tout point M_1 de la surface S_1, il existe cinq quantités finies A′, B′, C′, D′, $\mathfrak{P}$ telles que l'on ait les égalités

$$(12)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_1^2 = \alpha\mathfrak{P} + \mathrm{A}'\varepsilon, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial t}\right)_1^2 + \mathcal{K}\mathfrak{P} = \mathrm{D}'\varepsilon, \end{cases}$$

analogues aux égalités (9). Moyennant les égalités (4) et (12), et en désignant par F une quantité finie, l'égalité (11) devient la première des égalités

$$(13)\qquad \begin{cases} \rho(\mathcal{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{U} - \alpha\mathfrak{P} = \mathrm{F}\varepsilon, \\ \rho(\mathcal{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{V} - \beta\mathfrak{P} = \mathrm{G}\varepsilon, \\ \rho(\mathcal{K} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{W} - \gamma\mathfrak{P} = \mathrm{H}\varepsilon. \end{cases}$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

En chaque point du fluide, nous avons l'équation de compressibilité [*Recherches,* Ire Partie, égalité (75)]

$$\Pi - \rho^2\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = 0,$$

qui nous permet d'écrire, en particulier,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \left(2\rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} = 0.$$

Écrivons cette égalité pour le point M_2 et pour le point M_1, et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons l'égalité

$$(14) \qquad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_1^2 - \left(2\rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1^2 - \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2 = 0.$$

Deux cas sont à distinguer :

1° La quasi-onde est du second ordre par rapport à la température T; $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2$, $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2$, $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2$ sont des quantités de l'ordre de ε; alors, en vertu des égalités (9) et (12), l'égalité (14) devient

$$(15) \qquad \mathfrak{L} - \left(2\rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)\mathfrak{R} = J\varepsilon,$$

J étant une quantité finie.

2° La quasi-onde est du premier ordre par rapport à la température T; il existe alors cinq quantités A″, B″, C″, D″, $\mathfrak{T}$, finies en tout point de la surface S_1, telles que l'on ait

$$(16) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2 = \alpha\mathfrak{T} + A''\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2 = \beta\mathfrak{T} + B''\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2 = \gamma\mathfrak{T} + C''\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_1^2 + \mathfrak{N}\mathfrak{T} = D''\varepsilon. \end{cases}$$

En vertu de ces égalités (16) et des égalités analogues (9) et (12), l'égalité (14) devient

$$(17) \qquad \mathfrak{L} - \left(2\rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)\mathfrak{R} - \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\mathfrak{T} = K\varepsilon,$$

K étant une quantité finie.

Pour connaître celui des deux cas auquel nous avons affaire, nous allons recourir à la considération de la conductibilité.

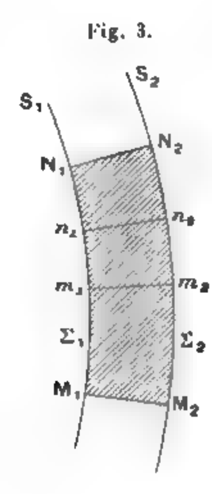
Sur la surface S_1, prenons (*fig.* 3) une aire d'étendue finie M_1N_1 ou Σ_1; par les divers points M_1, N_1, ... du contour de cette aire, menons des normales à la surface S_1 et prolongeons-les jusqu'à la surface S_2; elles y dessinent le contour M_2N_2 d'une aire finie Σ_2. Demandons à la théorie de la conductibilité l'expression de la quantité de chaleur dQ dégagée, dans le temps dt, par le volume $M_1N_1M_2N_2$. Si dS est un élément de la surface S qui limite ce volume,

si ν est la normale à cet élément vers l'intérieur de ce volume, nous avons

$$dQ = dt \int k \frac{\partial T}{\partial \nu} dS.$$

La surface S se compose de trois parties : les deux aires Σ_1, Σ_2 et la surface réglée σ qui s'appuie sur leurs contours. Soit $m_1 n_1 = d\Sigma_1$ un élément de l'aire Σ_1 ; des normales à S_1, issues des divers points $m_1, n_1, \ldots$ du contour de cet élément,

Fig. 3.



découpent en l'aire Σ_2 un élément $m_2 n_2 = d\Sigma_2$, qui correspond à l'élément $d\Sigma_1$ α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale $m_1 m_2$ à la surface S_1 ; la normale menée en m_2 à la surface S_2, dirigée dans le même sens que la précédente, a pour cosinus directeurs α_2, β_2, γ_2. Nous aurons alors

$$\begin{aligned} dQ = dt \int_\sigma k \frac{\partial T}{\partial \nu} d\sigma + dt \int_{\Sigma_1} k(m_1) \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1 \alpha + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1 \beta + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1 \gamma \right] d\Sigma_1 \\ - dt \int_{\Sigma_2} k(m_2) \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2 \alpha_2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_2 \beta_2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_2 \gamma_2 \right] d\Sigma_2, \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} (18) \quad dQ = - dt \int_{\Sigma_1} k(m_1) \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2 \alpha + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2 \beta + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2 \gamma \right] d\Sigma_1 \\ - dt \int_{\Sigma_1} \Big\{ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2 \left[\alpha_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \alpha k(m_1) \right] \\ + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_2 \left[\beta_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \beta k(m_1) \right] \\ + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_2 \left[\gamma_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \gamma k(m_1) \right] \Big\} d\Sigma_1 + dt \int_\sigma k \frac{\partial T}{\partial \nu} d\sigma. \end{aligned}$$

L'aire σ est de l'ordre de ε; si le coefficient de conductibilité est très petit de l'ordre de χ, l'intégrale $\int_\sigma k\frac{\partial T}{\partial \nu}d\sigma$ sera de l'ordre de $\varepsilon\chi$.

Les différences

$$\alpha_2-\alpha,\quad \beta_2-\beta,\quad \gamma_2-\gamma,\quad \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1}-1$$

sont assurément de l'ordre de ε; on a

$$k(m_2)-k(m_1)=k(\rho_2, T_2)-k(\rho_1, T_1),$$

et, comme les différences $(\rho_2-\rho_1)$, (T_2-T_1) sont de l'ordre de ε, la différence $k(m_2)-k(m_1)$ sera de l'ordre de $\varepsilon\chi$. Il en sera de même des différences

$$\alpha_2 k(m_2)\frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1}-\alpha k(m_1),$$

$$\beta_2 k(m_2)\frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1}-\beta k(m_1),$$

$$\gamma_2 k(m_2)\frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1}-\gamma k(m_1),$$

et de la seconde intégrale en l'égalité (18). Cette égalité peut s'écrire

$$dQ=-dt\int_{\Sigma_1}k(m_1)\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2\alpha+\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2\beta+\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2\gamma\right]d\Sigma_1+\lambda\varepsilon\chi\,dt,$$

λ étant une quantité finie. Mais les quantités

$$k(m_1)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2\alpha,\quad k(m_1)\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2\beta,\quad k(m_1)\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2\gamma$$

sont d'ordre $\varepsilon\chi$ si la quasi-onde est du premier ordre en T, et d'ordre $\varepsilon^2\chi$ si la quasi-onde est du deuxième ordre en T; on peut donc écrire, en toute circonstance,

$$dQ=\lambda\varepsilon\chi\,dt. \tag{19}$$

λ étant une quantité finie.

La quantité de chaleur dQ peut encore s'exprimer d'une autre manière; on a [*Recherches*, Ire Partie, égalité (90)]

$$E\,dQ=dt\int\left[T\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}u+\frac{\partial T}{\partial y}v+\frac{\partial T}{\partial z}w+\frac{\partial T}{\partial t}\right)-T\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]d\varpi,$$

l'intégrale s'étendant au volume $M_1N_1N_2M_2$. Ce volume est de l'ordre de ε; on

voit alors que la quantité sous le signe $\int$ doit, selon l'égalité (19), être de l'ordre de χ :

$$T\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}u+\frac{\partial T}{\partial y}v+\frac{\partial T}{\partial z}w+\frac{\partial T}{\partial t}\right)-T\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\mu\chi,$$

μ étant une quantité finie. Si nous écrivons cette égalité au point m_1, puis au point m_2, et si nous retranchons membre à membre les résultats obtenus, nous trouverons sans peine l'égalité

$$(20)\qquad \begin{aligned} &T\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2 u+\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2 v+\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2 w+\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_1^2\right]\\ &\qquad -T\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_1^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2\right]=\nu\chi+\varpi\varepsilon,\end{aligned}$$

ν et ϖ étant deux quantités finies.

Si la quasi-onde considérée est du premier ordre par rapport à T, les égalités (4), (4 *bis*) et (16) transformeront l'égalité (20) en

$$(21)\qquad T\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}(\mathfrak{N}-\alpha u-\beta v-\gamma w)\mathfrak{G}+T\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})=\nu\chi+\theta\varepsilon,$$

θ étant une quantité finie.

En chaque point du fluide, on peut écrire la relation supplémentaire [*Recherches*, Ire Partie, égalité (94)]

$$(22)\qquad \begin{aligned} &k\,\Delta T+\frac{\partial k}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right]\\ &\quad+\frac{\partial k}{\partial\rho}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\\ &\quad+\frac{T}{E}\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}u+\frac{\partial T}{\partial y}v+\frac{\partial T}{\partial z}w+\frac{\partial T}{\partial t}\right)\\ &\quad-\frac{T}{E}\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0.\end{aligned}$$

Le premier membre se compose de cinq termes; en toutes circonstances, le quatrième et le cinquième sont au plus finis, le deuxième et le troisième sont de l'ordre de χ.

Si la quasi-onde est du premier ordre par rapport à la température T, les dérivées partielles du second ordre de T en x, y, z, seront, en général, d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$ à l'intérieur de cette quasi-onde; il en sera de même de ΔT; $k\,\Delta T$ sera donc de

l'ordre de grandeur $\frac{\chi}{\varepsilon}$. Si, au contraire, la quasi-onde est, en T, d'ordre supérieur au premier, ΔT est fini et $k\,\Delta T$ est de l'ordre de χ.

L'égalité précédente nous enseigne donc que, *pour qu'une quasi-onde, du premier ordre en* u, v, w, ρ, Π, *puisse être du premier ordre en* T, *il faut que* $\frac{\chi}{\varepsilon}$ *soit fini, ou que son épaisseur soit du même ordre de grandeur que le coefficient de conductibilité; si, au contraire, son épaisseur* ε *est très petite par rapport au coefficient de conductibilité, la quasi-onde est d'ordre supérieur au premier par rapport à* T.

Dans ce dernier cas, on a

$$\mathfrak{T} = 0. \tag{23}$$

Dans le premier, l'égalité (21) peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{T} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}(\alpha \mathfrak{U} + \beta \mathfrak{V} + \gamma \mathfrak{W}) = \eta \varepsilon, \tag{24}$$

η étant une quantité finie.

Les égalités (10), (13), (15), (17), (24) ne diffèrent que par des termes de l'ordre de ε des équations qui nous ont permis de traiter la propagation des ondes proprement dites dans les fluides parfaits (*Recherches*, 2[e] Partie, Chap. IV). Nous parvenons donc sans peine aux résultats suivants :

Au sein d'un fluide parfait très peu conducteur, on peut observer :

1° *Des quasi-ondes sensiblement transversales. Elles ne se propagent pas, en sorte que l'on a sensiblement*

$$\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w = 0.$$

2° *Des quasi-ondes sensiblement longitudinales. Celles-ci sont de deux sortes :*

A. *Les unes ont une épaisseur très petite par rapport au coefficient de conductibilité du fluide; leur vitesse de propagation est donnée sensiblement par la formule de Newton*

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T}.$$

B. *Les autres ont une épaisseur du même ordre de grandeur que le coefficient de conductibilité du fluide; leur vitesse de propagation est sensible-*

ment donnée par la formule de Laplace

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T} \frac{C}{c}.$$

Les ondes proprement dites, dont l'épaisseur est rigoureusement nulle, doivent être regardées comme la forme limite des premières ondes.

Nous voyons maintenant que les observations faites sur la propagation du son dans l'air et les autres gaz concordent avec les résultats de la théorie, pourvu que l'on admette la proposition suivante :

En aucun cas on n'observe, au sein de l'air ou d'un gaz peu conducteur, ni la propagation d'une onde proprement dite, ni la propagation d'une quasi-onde dont l'épaisseur soit très petite par rapport au coefficient de conductibilité.

§ 3. — Des quasi-ondes au sein des fluides visqueux.

Il reste à rechercher les raisons que l'on peut avoir d'admettre l'exactitude d'une telle proposition. Ces raisons vont être tirées de la remarque suivante : *Ni l'air, ni les autres gaz ne sont des fluides parfaits; leurs coefficients de viscosité ne sont pas rigoureusement nuls; ils sont seulement très petits.*

Or, ce que nous savons déjà (*Recherches*, IIe Partie, Chap. III) nous enseigne qu'*aucune onde proprement dite ne peut se propager dans un fluide visqueux, quelque petits que soient les coefficients de viscosité.*

Mais il y a plus. Nous allons voir que l'existence de la viscosité, si faible soit-elle, impose une limite inférieure à l'épaisseur d'une quasi-onde capable de se propager.

Considérons une quasi-onde $S_1 S_2$ du premier ordre par rapport à u, v, w, ρ, Π. Par cet énoncé, nous excluons les quasi-ondes qui seraient du premier ordre par rapport à certains de ces éléments et du second ordre par rapport à d'autres; comme les ondes proprement dites jouissant de telles propriétés, de semblables quasi-ondes sont possibles, mais elles ne se propagent pas.

Au sein de la quasi-onde $S_1 S_2$, découpons le volume $M_1 N_1 N_2 M_2$ représenté par la figure 3. Donnons un déplacement virtuel à la masse fluide que renferme ce volume. Nous supposerons que lorsqu'on traverse ce volume suivant une normale $m_1 m_2$ à la surface S_1, les composantes δx, δy, δz varient de telle sorte que leurs dérivées partielles $\frac{\partial\, \delta x}{\partial x}$, ..., soient du même ordre de grandeur que δx, ...;

dès lors, du point m_1 au point m_2, δx subit une variation $(\delta x_2 - \delta x_1)$ qui est du même ordre de grandeur que $\varepsilon\,\delta x$.

Pour ce déplacement virtuel, nous pourrons écrire

$$(25) \qquad d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}_j + d\mathfrak{T}_v - \delta_T \mathfrak{F} + \int_S [P_x\,\delta x + P_y\,\delta y + P_z\,\delta z] = 0.$$

Dans cette égalité,

$d\mathfrak{T}_e$ représente le travail virtuel des forces extérieures appliquées aux divers éléments de masse du fluide déplacé,

$d\mathfrak{T}_j$ le travail des forces d'inertie appliquées aux mêmes éléments,

$d\mathfrak{T}_v$ le travail des actions de viscosité appliquées aux mêmes éléments,

$\mathfrak{F}$ le potentiel interne de la masse fluide,

S la surface qui la limite,

enfin P_x, P_y, P_z ont les valeurs suivantes [*Recherches sur l'Hydrodynamique*, Ire Partie, égalités (77)]

$$(26) \quad \begin{cases} P_x = (\Pi + \nu_x)\cos(n_i, x) + \tau_z \cos(n_i, y) + \tau_y \cos(n_i, z), \\ P_y = \tau_z \cos(n_i, x) + (\Pi + \nu_y)\cos(n_i, y) + \tau_x \cos(n_i, z), \\ P_z = \tau_y \cos(n_i, x) + \tau_x \cos(n_i, y) + (\Pi + \nu_z)\cos(n_i, z). \end{cases}$$

$d\mathfrak{T}_e$, $d\mathfrak{T}_j$, $\delta_T \mathfrak{F}$ sont visiblement des quantités infiniment petites du même ordre de grandeur que $\varepsilon\,\delta x$.

Il est facile de voir qu'il en est de même de $d\mathfrak{T}_v$. Cette quantité, en effet, a pour valeur [*Recherches*, 1re Partie, égalité (46)]

$$d\mathfrak{T}_v = \int \left[\nu_x \frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial\,\delta z}{\partial z} + \tau_x \left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial y} \right) + \tau_y \left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta x}{\partial z} \right) + \tau_z \left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial x} \right) \right] d\varpi,$$

tandis que ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z sont donnés par les égalités [*Recherches*, 1re Partie, égalités (51)]

$$(27) \quad \begin{cases} \nu_x = -\lambda(\rho, T)\theta - 2\mu(\rho, T)\dfrac{\partial u}{\partial x}, \qquad \tau_x = -\mu(\rho, T)\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Les quantités ν_i, τ_i sont visiblement finies; $d\mathfrak{T}_v$ est donc une quantité infiniment petite de l'ordre de $\varepsilon\,\delta x$, même si les coefficients de viscosité λ, μ ne sont pas très petits.

La surface S se décompose en trois parties que nous avons désignées par σ, Σ_1, Σ_2. Il est clair que, dans l'égalité (25), la partie de l'intégrale $\int_S$ qui se rapporte à la surface σ est infiniment petite de l'ordre de $\varepsilon\,\delta x$.

Si donc nous désignons par K une quantité du même ordre de grandeur que les déplacements virtuels δx, δy, δz, l'égalité (25) pourra s'écrire

$$(28)\qquad \begin{aligned}&\int_{\Sigma_1}[P_x(m_1)\,\delta x_1 + P_y(m_1)\,\delta y_1 + P_z(m_1)\,\delta z_1]\,d\Sigma_1\\ &+\int_{\Sigma_2}[P_x(m_2)\,\delta x_2 + P_y(m_2)\,\delta y_2 + P_z(m_2)\,\delta z_2]\,d\Sigma_2 = K\varepsilon.\end{aligned}$$

Considérons la somme

$$P_x(m_1)\,\delta x_1\,d\Sigma_1 + P_x(m_2)\,\delta x_2\,d\Sigma_2.$$

On peut l'écrire

$$(29)\qquad [P_x(m_2) + P_x(m_1)]\,\delta x_1\,d\Sigma_1 + P_x(m_2)[\delta x_2\,d\Sigma_2 - \delta x_1\,d\Sigma_1].$$

La quantité $P_x(m_2)$ est finie; la différence $(\delta x_2\,d\Sigma_2 - \delta x_1\,d\Sigma_1)$ est de l'ordre de grandeur de $\varepsilon\,\delta x_1\,d\Sigma_1$; il en est donc de même du second terme de l'expression (29).

Considérons le premier terme.

En m_1,

$$\cos(n_i, x) = \alpha,\qquad \cos(n_i, y) = \beta,\qquad \cos(n_i, z) = \gamma,$$

En m_2,

$$\cos(n_i, x) = -\alpha_2,\qquad \cos(n_i, y) = -\beta_2,\qquad \cos(n_i, z) = -\gamma_2.$$

Nous pourrons donc écrire en vertu des égalités (26),

$$\begin{aligned}P_x(m_2) + P_x(m_1) = {}&(\Pi_1 - \Pi_2 + \nu_{x1} - \nu_{x2})\alpha + (\tau_{z1} - \tau_{z2})\beta + (\tau_{y1} - \tau_{y2})\gamma\\ &- (\Pi_2 + \nu_{x2})(\alpha_2 - \alpha) - \tau_{z2}(\beta_2 - \beta) - \tau_{y2}(\gamma_2 - \gamma).\end{aligned}$$

Les quantités $(\Pi_2 - \Pi_1)$, $(\alpha_2 - \alpha)$, $(\beta_2 - \beta)$, $(\gamma_2 - \gamma)$ étant des quantités très petites de l'ordre de ε, nous pourrons réduire $P_x(m_2) + P_x(m_1)$ à

$$(\nu_{x1} - \nu_{x2})\alpha + (\tau_{z1} - \tau_{z2})\beta + (\tau_{y1} - \tau_{y2})\gamma,$$

augmenté d'une quantité très petite de l'ordre de ε.

Par ces raisonnements et par des raisonnements analogues, on voit que l'éga-

lité (28) peut se mettre sous la forme

$$\int_{\Sigma_1}\Big\{ [(\nu_{x2}-\nu_{x1})\alpha+(\tau_{z2}-\tau_{z1})\beta+(\tau_{y2}-\tau_{y1})\gamma]\,\delta x_1$$
$$+[(\tau_{z2}-\tau_{z1})\alpha+(\nu_{y2}-\nu_{y1})\beta+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\gamma]\,\delta y_1$$
$$+[(\tau_{y2}-\tau_{y1})\alpha+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\beta+(\nu_{z2}-\nu_{z1})\gamma]\,\delta z_1\Big\}\,d\Sigma_1=\mathrm{L}\varepsilon,$$

L étant une quantité du même ordre de grandeur que δx, δy, δz.

Cette égalité devant avoir lieu quels que soient δx_1, δy_1, δz_1, on doit avoir, en tout point de la surface Σ_1,

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned}&(\nu_{x2}-\nu_{x1})\alpha+(\tau_{z2}-\tau_{z1})\beta+(\tau_{y2}-\tau_{y1})\gamma=\mathrm{G}\;\varepsilon,\\&(\tau_{z2}-\tau_{z1})\alpha+(\nu_{y2}-\nu_{y1})\beta+(\tau_{z2}-\tau_{z1})\gamma=\mathrm{G}'\,\varepsilon,\\&(\tau_{y2}-\tau_{y1})\alpha+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\beta+(\nu_{z2}-\nu_{z1})\gamma=\mathrm{G}'\varepsilon,\end{aligned}\right.$$

G, G′, G″ étant trois quantités finies.

Selon la première égalité (27), nous pouvons écrire

$$\nu_{x2}-\nu_{x1}=-\lambda(\rho_1,\mathrm{T}_1)(\theta)_1^2-2\mu(\rho_1,\mathrm{T}_1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2$$
$$-\theta_2[\lambda(\rho_2,\mathrm{T}_2)-\lambda(\rho_1,\mathrm{T}_1)]-2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2[\mu(\rho_2,\mathrm{T}_2)-\mu(\rho_1,\mathrm{T}_1)].$$

Lors même que les coefficients de viscosité λ, μ ne seraient pas très petits, les différences

$$\lambda(\rho_2,\mathrm{T}_2)-\lambda(\rho_1,\mathrm{T}_1),\quad \mu(\rho_2,\mathrm{T}_2)-\mu(\rho_1,\mathrm{T}_1)$$

sont des quantités très petites de l'ordre de ε; il en est donc de même des deux derniers termes de l'égalité précédente.

Par ce raisonnement et par des raisonnements analogues, nous pourrons, au lieu des égalités (30), écrire les égalités

$$(31)\quad\left\{\begin{aligned}&\Big\{\lambda\Big[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_1^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2\Big]+2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2\Big\}\alpha\\&\quad+\mu\Big[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1^2\Big]\beta+\mu\Big[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2\Big]\gamma=\mathrm{H}\varepsilon,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}\right.$$

λ, μ étant mis respectivement pour $\lambda(\rho_1, \mathrm{T}_1)$, $\mu(\rho_1, \mathrm{T}_1)$ et H, H′, H″ étant trois quantités finies.

Moyennant les égalités (4) et (4 *bis*), ces égalités (31) deviennent

$$(32)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})\alpha+\mu\mathfrak{U}=h\ \varepsilon, \\ (\lambda+\mu)(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})\beta+\mu\mathfrak{V}=h'\varepsilon, \\ (\lambda+\mu)(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})\gamma\ +\mu\mathfrak{W}=h''\varepsilon, \end{cases}$$

h, h', h'' étant trois quantités finies.

Si nous multiplions respectivement ces égalités par α, β, γ et si nous les ajoutons membre à membre, nous trouvons l'égalité

$$(\lambda+2\mu)(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})=(\alpha h+\beta h'+\gamma h'')\varepsilon$$

qui permet de leur donner la forme suivante :

$$(33)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}=\left[h\ -(\alpha h+\beta h'+\gamma h'')\alpha\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right]\dfrac{\varepsilon}{\mu}, \\ \mathfrak{V}=\left[h'-(\alpha h+\beta h'+\gamma h'')\beta\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right]\dfrac{\varepsilon}{\mu}, \\ \mathfrak{W}=\left[h''-(\alpha h+\beta h'+\gamma h'')\gamma\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right]\dfrac{\varepsilon}{\mu}. \end{cases}$$

Pour que la quasi-onde considérée soit réellement du premier ordre en u, v, w, il faut que $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ soient des quantités finies, et non pas des quantités très petites; il ne faut donc pas que $\frac{\varepsilon}{\mu}$ soit une quantité très petite. Nous pouvons, dès lors, énoncer les propositions suivantes :

Un fluide dont le coefficient de viscosité μ n'est pas très petit ne permet la propagation d'aucune quasi-onde très mince.

Un fluide dont le coefficient de viscosité μ est très petit ne permet la propagation d'une quasi-onde que si l'épaisseur ε de cette quasi-onde est au moins de l'ordre de μ; si l'épaisseur ε de la quasi-onde était très petite par rapport à μ, cette quasi-onde ne pourrait se propager.

Cette proposition nous donne déjà la raison de celle qui a été admise à la fin du paragraphe précédent.

Mais une question se pose maintenant : L'existence d'une faible viscosité ne modifie-t-elle pas d'une manière notable les lois de la propagation d'une quasi-onde établie au § 1? C'est cette question que nous allons examiner.

Les termes de viscosité n'intervenant ni dans l'équation de continuité, ni dans l'équation de compressibilité, rien n'est changé à l'établissement des équations (10) et (17); il nous faut au contraire reprendre les raisonnements qui ont

donné les équations (13), (21), (23) et (24).

En tout point du milieu, nous devons écrire les égalités

$$(34)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\Pi}{\partial x}-\rho X+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&\quad-(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}-\mu\Delta u-\theta\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right)\\&\quad-\left[2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial\rho}{\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial\rho}{\partial z}\right]\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\\&\quad-\left[2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial T}{\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right]\frac{\partial\mu}{\partial T}=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right.$$

Au sein de la quasi-onde, les dérivées du second ordre $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ... sont très grandes, comme $\frac{1}{\varepsilon}$; il en est donc de même, en général, de $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$, $\frac{\partial\theta}{\partial z}$, Δu. Nous supposerons que μ soit une quantité très petite de l'ordre de ε, sans quoi, nous l'avons vu, aucune quasi-onde ne pourrait se propager; dès lors, aux premiers membres des équations (34), tous les termes sont assurément finis, sauf peut-être les termes

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x},\quad \lambda\frac{\partial\theta}{\partial y},\quad \lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}.$$

Les équations (34) ne peuvent avoir lieu que si ces termes sont aussi finis.

Supposons d'abord λ fini; il faudra que $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$, $\frac{\partial\theta}{\partial z}$ soient, dans toute l'étendue de la quasi-onde, non pas des quantités très grandes de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$, mais simplement des quantités finies. Dès lors, $\theta(m_2)-\theta(m_1)$, au lieu d'être une quantité finie, sera une quantité très petite de l'ordre de ε.

Mais les égalités (4) et (4 *bis*) donnent

$$\theta(m_2)-\theta(m_1)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2=(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})+(a+b'+c'')\varepsilon.$$

On voit donc que si λ est fini, $(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})$ devra être une quantité très petite de l'ordre de ε; toute quasi-onde sera sensiblement transversale. Laissons de côté cette onde transversale, dont l'existence était prévue et dont la vitesse de propagation est nulle.

Nous ne pourrons observer une quasi-onde autre que celle-là, à moins que λ ne soit une quantité très petite du même ordre que ε, et partant que μ.

Tous les termes qui figurent aux premiers membres des égalités (34) seront

maintenant des termes finis. Nous pourrons donc écrire ces équations au point m_2, puis au point m_1, et retrancher membre à membre les équations correspondantes; mais, auparavant, nous devrons prendre une précaution qui, jusqu'ici, était inutile.

Les dérivées partielles telles que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ... sont, à l'intérieur de la quasi-onde, très grandes de l'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$; en dehors de la quasi-onde, elles redeviennent finies. On aura soin de tracer les surfaces S_1, S_2 dans les parties de l'espace où ces dérivées du second ordre ont des valeurs finies.

Moyennant cette précaution, l'opération indiquée redonnera les équations (11) et (13).

Venons maintenant à l'équation (20) et au raisonnement qui l'a fournie.

Il devra être modifié ainsi qu'il suit :

On a [*Recherches*, Ire Partie, égalité (90)]

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = dt\int\Big\{&\mathrm{T}\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial \mathrm{T}^2}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}u + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}v + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}w + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\right)\\
&- \mathrm{T}\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial \mathrm{T}}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\\
&+ 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right.\\
&\qquad\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\Big\}\,d\varpi,
\end{aligned}$$

l'intégrale s'étendant au volume $M_1N_1N_2M_2$.

Si l'on observe que ce volume est de l'ordre de ε et que dQ doit, selon l'égalité (19), être de l'ordre $\varepsilon\chi\,dt$, on voit que la quantité sous le signe $\int$ doit être de l'ordre de χ. Si l'on observe, d'ailleurs, que λ et μ sont des quantités du même ordre de grandeur que ε, on voit que l'on peut écrire

$$\mathrm{T}\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial \mathrm{T}^2}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}u + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}v + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}w + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\right) - \mathrm{T}\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial \mathrm{T}}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \sigma\chi + \xi\varepsilon.$$

Écrivons cette égalité pour le point m_1, puis pour le point m_2, et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous retrouvons l'égalité

$$(20)\qquad \begin{aligned}
&\mathrm{T}\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial \mathrm{T}^2}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\right)_1^2 u + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\right)_1^2 v + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\right)_1^2 w + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\right)_1^2\right]\\
&\quad - \mathrm{T}\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial \mathrm{T}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2\right] = \nu\chi + \varpi\varepsilon.
\end{aligned}$$

Quant à l'égalité (22), elle devra être complétée en ajoutant au premier membre [*Recherches*, Ire Partie, égalité (94)] les termes

$$\frac{\lambda}{E}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$
$$+\frac{2\mu}{E}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right].$$

Ces termes, qui ont en facteur λ ou μ, sont de l'ordre de ε; il ne modifient donc rien aux conclusions tirées de l'égalité (22).

En résumé, *dans un milieu très peu visqueux, une quasi-onde dont l'épaisseur ε est du même ordre de grandeur que les coefficients de viscosité λ et μ, se propage sensiblement suivant les mêmes lois qu'en un fluide parfait.*

CONCLUSION DE LA TROISIÈME PARTIE.

Nous voyons, par ce qui précède, que dans l'air ou dans tout autre gaz très peu conducteur et très peu visqueux, on n'a jamais observé la propagation d'une onde proprement dite; ce qui semble une onde à l'expérimentateur apparaît au mathématicien comme une quasi-onde.

L'étude de la propagation du son avait si bien familiarisé les physiciens avec la notion d'onde et de vitesse de propagation d'une onde, que ce mode de propagation semblait à beaucoup d'entre eux le seul possible; ils répugnaient à admettre que certaines propriétés, telle la température au sein d'une masse conductrice, pussent dépendre exclusivement de fonctions analytiques de x, y, z, t, en sorte qu'il n'y eût, dans l'acte de leur propagation, ni onde, ni vitesse. Il est piquant de constater que ce mode de propagation est précisément celui qui convient au mouvement sonore dans l'air et que, même dans ce cas, l'existence d'ondes, l'existence d'une vitesse de propagation sont seulement des apparences et des approximations.

QUATRIÈME PARTIE.

DES CONDITIONS AUX LIMITES.

CHAPITRE I.

SUR LE FROTTEMENT.

§ 1. — Du frottement en général.

Le principe de d'Alembert a longtemps été regardé comme fournissant les équations les plus générales du mouvement d'un système; puis il a été nécessaire de généraliser ces équations en y introduisant les actions de viscosité; cette introduction nous a conduits aux équations générales de l'Hydrodynamique, étudiées en la première Partie de ces *Recherches* ([1]).

Cette généralisation ne suffit pas à mettre en équations tous les problèmes mécaniques; pour traiter plusieurs d'entre eux il est nécessaire d'introduire dans les formules de la Dynamique de nouveaux termes, les termes de frottement; c'est cette introduction, dont nous avons, en un autre endroit ([2]), approfondi les principes, qu'il nous faut étudier à nouveau afin de préciser certains points demeurés obscurs ou incomplets.

Considérons un système dénué de frottement, mais qui peut être affecté de viscosité; supposons que la déformation virtuelle la plus générale de ce système soit définie par des *variations normales*. Les équations du mouvement de ce système s'obtiendront en écrivant que l'on a, en toute modification virtuelle,

$$(1) \qquad d\mathfrak{T}_e - \delta_T \mathcal{F} + d\mathfrak{T}_j + d\mathfrak{T}_v = 0.$$

Dans cette égalité, $d\mathfrak{T}_e$ est le travail virtuel des actions extérieures; $d\mathfrak{T}_j$ est le

([1]) *Recherches sur l'Hydrodynamique*, Ire Partie : *Sur les Principes fondamentaux de l'Hydrodynamique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. III, 1901, p. 315).

([2]) *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5e série, t. II, 1896).

travail virtuel des forces d'inertie; $d\mathfrak{T}_v$ est le travail virtuel des actions de viscosité; enfin $\delta_T \mathfrak{F}$ est la variation subie par le potentiel interne dans une modification virtuelle qui diffère en un seul point de la modification considérée : elle laisse invariable la température en chacun des éléments matériels du système.

C'est cette égalité fondamentale (1) que nous allons modifier par l'introduction d'un nouveau terme en son premier membre; nous la remplacerons par l'égalité

$$(2) \qquad d\mathfrak{T}_e - \delta_T \mathfrak{F} + d\mathfrak{T}_j + d\mathfrak{T}_v + d\mathfrak{T}_f = 0,$$

où $d\mathfrak{T}_f$ sera le *travail virtuel du frottement;* à l'égard de ce travail, nous allons formuler une suite d'hypothèses.

Nous admettrons tout d'abord que toute modification virtuelle du système peut être représentée au moyen d'un système particulier de variations normales que nous nommerons les *variations privilégiées;* celles-ci, d'ailleurs, se partageront en deux groupes : le premier groupe sera formé par les *variations à frottement* $\delta a, \delta b, \ldots, \delta l$; le second groupe sera formé par les *variations sans frottement* $\delta m, \ldots, \delta n$.

La modification réelle éprouvée par le système dans le temps dt sera représentée par les variations privilégiées

$$\delta a = a' dt, \quad \delta b = b' dt, \quad \ldots, \quad \delta l = l' dt, \quad \delta m = m' dt, \quad \ldots, \quad \delta n = n' dt.$$

$a', b', \ldots, l', m', \ldots, n'$ seront les *vitesses privilégiées* qui correspondent respectivement aux variations privilégiées $\delta a, \delta b, \ldots, \delta l, \delta m, \ldots, \delta n$.

Cela posé, le travail virtuel des actions de frottement sera supposé de la forme suivante :

$$(3) \qquad d\mathfrak{T}_f = g_a \frac{a'}{|a'|} \delta a + g_b \frac{b'}{|b'|} \delta b + \ldots + g_l \frac{l'}{|l'|} \delta l.$$

Les quantités $g_a, g_b, \ldots, g_l$ dépendent :

1° De l'état du système à l'instant considéré, y compris la température en chaque point;

2° Des vitesses privilégiées, parmi lesquelles ne se trouve pas la vitesse de variation de la température en chaque point;

3° Des actions extérieures qui sollicitent le système à l'instant considéré.

Lorsque les vitesses privilégiées $a', b', \ldots, l', m', \ldots, n'$ tendent vers 0, les quantités $g_a, g_b, \ldots, g_l$ ne tendent pas vers 0, mais vers des limites finies $\gamma_a, \gamma_b, \ldots, \gamma_l$ qui dépendent de l'état du système à l'instant considéré, y compris la distribution des températures sur le système, et des actions extérieures qui sollicitent ce système.

Enfin les quantités $g_a, g_b, \ldots, g_l$ sont essentiellement négatives :

$$(4) \qquad g_a < 0, \quad g_b < 0, \quad \ldots, \quad g_l < 0.$$

Soient P_{ij} des quantités qui dépendent de l'état du système à l'instant t, mais point de la distribution des températures sur ce système. Supposons que le déterminant

$$\begin{vmatrix} P_{mm} & \cdots & P_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{nm} & \cdots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

soit différent de o. Les équations

$$\begin{aligned} \delta m &= P_{mm}\delta m' + \ldots + P_{mn}\delta n', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta n &= P_{nm}\,\delta m' + \ldots + P_{nn}\,\delta n' \end{aligned}$$

définissent les quantités $\delta m'$, ..., $\delta n'$ fonctions linéaires et homogènes de δm, ..., δn. Il est clair que

$$\delta a,\quad \delta b,\quad \ldots,\quad \delta l,\quad \delta m',\quad \ldots,\quad \delta n'$$

forment un nouveau système de variations privilégiées, où δa, δb, ..., δl continuent à être les variations à frottement et où $\delta m'$, ..., $\delta n'$ représentent les nouvelles variations sans frottement. Celles-ci sont donc susceptibles de changements dont les variations à frottement ne sont pas, en général, susceptibles.

Parmi les variations privilégiées qui définissent la modification virtuelle la plus générale d'un système, il en existe toujours au moins 6 qui sont des variations sans frottement; on peut toujours choisir les variations sans frottement de telle sorte que ces six variations-là définissent le déplacement d'ensemble le plus général du système dans l'espace. Un simple déplacement d'ensemble du système dans l'espace n'entraîne donc aucun travail des actions de frottement.

Les six variations dont nous venons de parler peuvent n'être pas les seules variations sans frottement. Il peut arriver que la vitesse m' qui correspond à une certaine variation privilégiée δm soit identiquement nulle par définition; dans ce cas la variation δm sera sûrement une variation sans frottement.

Donnons-en un exemple :

Un point matériel M se meut sur une surface P que l'on suppose immobile. A l'instant t, ce point est animé d'une certaine vitesse s' suivant une certaine direction tangente à la surface P. Le déplacement virtuel le plus général du point M, qui doit demeurer sur la surface P, se compose d'un déplacement δs dans la direction de la vitesse s' et d'un autre déplacement δm normal au précédent et tangent à la surface P. Nous admettrons que ce sont là les variations privilégiées du système. Or, en la modification réelle que le système éprouve pendant le temps dt, on a

$$\delta s = s'\,dt, \qquad \delta m = 0.$$

La variation privilégiée δm correspond, par définition, à une vitesse m' identiquement nulle; dès lors, ce doit être une variation sans frottement; le travail virtuel de frottement se réduit à

$$(5) \qquad d\mathfrak{T}_f = g_s \frac{s'}{|s'|} \delta s.$$

Le frottement équivaut, dans ce cas, à une force appliquée au point M, qui aurait pour valeur absolue $-g_s$ et qui serait dirigée en sens contraire de la vitesse du point M. C'est ce qu'on admet dans les Traités élémentaires de Mécanique.

Il faut bien observer, dans l'application de ce postulat important, que si la vitesse m' qui correspond à la variation privilégiée δm est nulle par définition, il n'en doit pas être de même de la variation virtuelle δm; si, par suite des liaisons imposées au système, on avait non seulement $m' = 0$, mais encore $\delta m = 0$, le postulat précédent deviendrait un simple truisme, car, grâce à l'égalité $\delta m = 0$, l'expression de $d\mathfrak{T}_f$ ne renfermerait sûrement aucun terme en δm.

Bien des questions pourraient être développées à partir des principes que nous venons de poser; nous renverrons à l'exposé que nous en avons donné ailleurs [1]; nous nous contenterons d'étudier ici ce qui arrive lorsqu'on associe plusieurs systèmes primitivement indépendants.

Nous considérerons d'abord un système formé de plusieurs parties indépendantes et, pour simplifier les notations sans inconvénient réel au point de vue de la généralité, nous supposerons qu'il n'existe que deux telles parties, les parties 1 et 2.

Nous supposerons que, pour définir la modification virtuelle la plus générale de la partie 1, il faille joindre, aux variations que subit la température des diverses portions du corps 1, les variations normales privilégiées

$$\delta a_1, \quad \delta b_1, \quad \ldots, \quad \delta l_1, \quad \delta m_1, \quad \ldots, \quad \delta n_1,$$

les unes affectées de frottement, les autres dénuées de frottement. Pour la partie 2, nous adopterons les notations analogues

$$\delta a_2, \quad \delta b_2, \quad \ldots, \quad \delta l_2, \quad \delta m_2, \quad \ldots, \quad \delta n_2.$$

Le potentiel interne de la partie 1 sera représenté par $\mathcal{F}_1$, le potentiel interne de la partie 2 par $\mathcal{F}_2$ et le potentiel interne du système que forment ces deux parties par

$$(6) \qquad \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + E\Psi.$$

(1) *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques* (*Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, 5e série, t. II, 1896).

Nous écrirons

$$
\begin{aligned}
-\delta_T \mathcal{F}_1 &= A_1\,\delta a_1 + B_1\,\delta a_1 + \ldots + L_1\,\delta l_1 + M_1\,\delta m_1 + \ldots + N_1\,\delta n_1,\\
-\delta_T \mathcal{F}_2 &= A_2\,\delta a_2 + B_2\,\delta a_2 + \ldots + L_2\,\delta l_2 + M_2\,\delta m_2 + \ldots + N_2\,\delta n_2,\\
-E\,\delta\Psi &= \mathcal{A}'_1\,\delta a_1 + \mathcal{B}'_1\,\delta b_1 + \ldots + \mathcal{L}'_1\,\delta l_1 + \mathcal{M}'_1\,\delta m_1 + \ldots + \mathcal{N}'_1\,\delta n_1\\
&\quad + \mathcal{A}'_2\,\delta a_2 + \mathcal{B}'_2\,\delta b_2 + \ldots + \mathcal{L}'_2\,\delta l_2 + \mathcal{M}'_2\,\delta m_2 + \ldots + \mathcal{N}'_2\,\delta n_2.
\end{aligned}
$$

Les quantités $\mathcal{A}'_1$, $\mathcal{B}'_1$, ..., $\mathcal{L}'_1$, $\mathcal{M}'_1$, ..., $\mathcal{N}'_1$ sont les actions du corps 2 sur le corps 1; les quantités $\mathcal{A}'_2$, $\mathcal{B}'_2$, ..., $\mathcal{L}'_2$, $\mathcal{M}'_2$, ... $\mathcal{N}'_2$ sont les actions du corps 1 sur le corps 2.

Le travail des actions extérieures appliquées au corps 1 peut, en une modification virtuelle quelconque, s'écrire

$$d\mathcal{T}_{e1} = (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1)\,\delta a_1 + \ldots + (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}'_1)\,\delta l_1 + \ldots + (\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1)\,\delta n_1,$$

$\mathcal{A}_1$, ..., $\mathcal{L}_1$, ..., $\mathcal{N}_1$ étant les actions extérieures, non émanées du corps 2, qui s'exercent sur le corps 1.

De même, le travail virtuel des actions extérieures appliquées au corps 2 peut s'écrire

$$d\mathcal{T}_{e2} = (\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}'_2)\,\delta a_2 + \ldots + (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}'_2)\,\delta l_2 + \ldots + (\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}'_2)\,\delta n_2,$$

$\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{L}_2$, ..., $\mathcal{N}_2$ étant les actions extérieures, non émanées du corps 1, qui s'exercent sur le corps 2.

Enfin désignons, pour le corps 1, les travaux virtuels d'inertie, de viscosité et de frottement par

$$
\begin{aligned}
d\mathcal{T}_{j1} &= J_{a1}\,\delta a_1 + \ldots + J_{l1}\,\delta l_1 + J_{m1}\,\delta m_1 + \ldots + J_{n1}\,\delta n_1,\\
d\mathcal{T}_{v1} &= f_{a1}\,\delta a_1 + \ldots + f_{l1}\,\delta l_1 + f_{m1}\,\delta m_1 + \ldots + f_{n1}\,\delta n_1,\\
d\mathcal{T}_{f1} &= g_{a1}\,\frac{a'_1}{|a'_1|}\,\delta a_1 + g_{b1}\,\frac{b'_1}{|b'_1|}\,\delta b_1 + \ldots + g_{l1}\,\frac{l'_1}{|l'_1|}\,\delta l_1.
\end{aligned}
$$

Dans la dernière égalité, chacune des quantités g dépend de l'état du système 1, des vitesses a'_1, b'_1, ..., l'_1, m'_1, ..., n'_1, enfin de

$$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1), \quad \ldots, \quad (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}'_1), \quad \ldots, \quad (\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1).$$

Pour la partie 2, adoptons des notations analogues.

A la partie 1, appliquons l'identité (2). Nous aurons

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + A_1 + J_{a1} + f_{a1} + g_{a1}\frac{a'_1}{|a'_1|} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}'_1 + L_1 + J_{l1} + f_{l1} + g_{l1}\frac{l'_1}{|l'_1|} = 0,\\
&\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}'_1 + M_1 + J_{m1} + f_{m1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1 + N_1 + J_{n1} + f_{n1} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Si, à la partie 2, nous appliquons de même l'identité (2), nous obtiendrons des égalités analogues aux précédentes, qu'il est inutile d'écrire et que nous nous contenterons de désigner par (7 *bis*).

Multiplions respectivement les égalités (7) par $\delta a_1, \ldots, \delta l_1, \delta m_1, \ldots, \delta n_1$, les égalités (7 *bis*) par $\delta a_2, \ldots, \delta l_2, \delta m_2, \ldots, \delta n_2$ et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; si nous désignons par $d\mathcal{T}_e, d\mathcal{T}_j, d\mathcal{T}_v$ le travail virtuel des actions extérieures, des forces d'inertie et des actions de viscosité pour le système 1-2 tout entier, nous trouverons sans peine l'égalité

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
0 = {}& d\mathcal{T}_e - \delta_T(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + E\Psi) + d\mathcal{T}_j + d\mathcal{T}_v\\
&+ g_{a1}\frac{a'_1}{|a'_1|}\delta a_1 + \ldots + g_{l1}\frac{l'_1}{|l'_1|}\delta l_1 + g_{a2}\frac{a'_2}{|a'_2|}\delta a_2 + \ldots + g_{l2}\frac{l'_2}{|l'_2|}\delta l_2.
\end{aligned}
$$

Si l'on tient compte de l'égalité (6), cette égalité a, comme on devait s'y attendre, la forme de l'égalité (2). On voit que, dans un système formé de plusieurs parties indépendantes 1, 2, ..., les variations privilégiées à frottement comprennent :

1° Les variations privilégiées à frottement qui définiraient les modifications virtuelles de la partie 1, considérée comme un système isolé;

2° Les variations privilégiées à frottement qui définiraient les modifications virtuelles de la partie 2, considérée comme un système indépendant, etc.

La quantité g_{a1} dépend de l'état du système 1, des vitesses $a'_1, \ldots, n'_1$, enfin des actions $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1), \ldots, (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}'_1), \ldots, (\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1)$; mais les actions $\mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{L}'_1, \ldots, \mathcal{N}'_1$ dépendent de l'état du système formé par les parties 1 et 2; on peut donc dire que la quantité g_{a1}, dépend de l'état de tout le système formé par les parties indépendantes 1 et 2, des vitesses $a'_1, \ldots, n'_1$, enfin des actions extérieures $\mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{N}'_1$. Les quantités $g_{b1}, \ldots, g_{l1}, g_{a2}, \ldots, g_{l2}$ prêtent à des considérations analogues qui s'accordent pleinement avec ce qui a été dit à propos de l'égalité (2).

Considérons maintenant une suite continue de systèmes, formés de deux parties

indépendantes 1 et 2, et supposons que cette suite ait pour limite un système où les parties 1 et 2 présentent un ou plusieurs contacts correspondant à une liaison bilatérale exprimée par des égalités de la forme

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} P_{a1}\,\delta a_1 + \ldots + P_{n1}\,\delta n_1 + P_{a2}\,\delta a_2 + \ldots + P_{n2}\,\delta n_2 = 0, \\ P'_{a1}\,\delta a_1 + \ldots + P'_{n1}\,\delta n_1 + P'_{a2}\,\delta a_2 + \ldots + P'_{n2}\,\delta n_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Ces égalités s'obtiennent en exprimant que les parties 1 et 2, qui sont en contact avant le déplacement virtuel $\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2$, sont encore en contact après; pour les former, il suffit donc de connaître la figure et la position des parties 1 et 2 avant ce déplacement virtuel et le changement que cette modification virtuelle apporte à cette figure et à cette position. Dès lors, si certaines variations, dites *variations sans inertie,* définissent des modifications virtuelles où chacune des parties du système change de propriétés, mais sans changer de figure ni d'état, ces variations ne figurent pas dans les conditions (9) et une modification où ces variations diffèrent seules de o n'altère pas la valeur des quantités P, P'.

Les variations $\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2$ étant supposées normales, la figure et la position des diverses parties du système ne varient pas lorsque les températures varient seules. Dès lors, les considérations précédentes montrent que les températures des diverses parties du système ne peuvent influer sur les valeurs des coefficients P, P'.

Nous supposerons que lorsque le système formé de deux parties indépendantes tend vers cette forme limite, les diverses grandeurs que nous avons eu à considérer dans l'étude de ce système tendent vers des limites bien déterminées.

Nous admettrons alors qu'une égalité analogue à l'égalité (2) *est vérifiée, non pas en toute modification virtuelle du système* 1-2, *mais en toute modification virtuelle qui vérifie les conditions de liaison* (9).

Dans cette équation dont nous admettons l'existence, les termes $d\mathfrak{T}_e$, $\delta_T \mathfrak{F}$, $d\mathfrak{T}_i$ sont simplement les limites vers lesquelles tendent les termes analogues relatifs au système formé de deux parties indépendantes; mais il n'en est pas de même des termes $d\mathfrak{T}_v$ et $d\mathfrak{T}_f$.

Le terme $d\mathfrak{T}_v$ sera la somme de trois autres :

1° La limite $d\mathfrak{T}_{v1}$ du travail virtuel des actions de viscosité relatives à la partie 1;

2° La limite $d\mathfrak{T}_{v2}$ du travail virtuel des actions de viscosité relatives à la partie 2;

3° Un terme $d\mathfrak{T}_w$, travail virtuel de la *viscosité au contact* des parties 1 et 2. Les suppositions à faire au sujet de ce terme vont arrêter un instant notre attention.

Au moyen des variations normales $\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2$, on peut former des combinaisons linéaires et homogènes dont les coefficients dépendent de l'état du système 1-2, mais point de la distribution des températures sur ce système ; on peut évidemment choisir ces combinaisons $\delta f, \ldots, \delta g, \delta h, \ldots, \delta k$ de telle sorte qu'elles soient déterminées lorsque l'on connaît le déplacement virtuel relatif des parties 1 et 2 au voisinage de leurs points de contact et réciproquement; en outre, de telle sorte que, dans le cas où le déplacement relatif en question s'annule, on ait

$$\delta f = 0, \quad \ldots, \quad \delta g = 0, \quad \delta h = 0, \quad \ldots, \quad \delta k = 0.$$

Dès lors, il est clair que les conditions de liaisons (9) peuvent toujours se mettre sous la forme

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_f\,\delta f + \ldots + p_g\,\delta g + p_h\,\delta h + \ldots + p_k\,\delta k = 0, \\ p'_f\,\delta f + \ldots + p'_g\,\delta g + p'_h\,\delta h + \ldots + p'_k\,\delta k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Les quantités $p, p', \ldots$ dépendent de l'état des corps 1 et 2 au voisinage de leurs contacts, mais point de leur température.

Pour repasser de la forme (10) des équations de liaison à la forme (9), il suffit de remplacer $\delta f, \ldots, \delta g, \delta h, \ldots, \delta k$ par leurs expressions en fonctions de $\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2$. On voit alors que les quantités P, P', ... sont des fonctions linéaires et homogènes des quantités $p, p', \ldots$, les coefficients dépendant de l'état des deux corps en contact, mais point de la distribution des températures.

Dans le temps dt, les parties des corps 1 et 2 qui avoisinent les contacts éprouvent un déplacement relatif réel dans lequel

$$\delta f = f'\,dt, \quad \ldots, \quad \delta g = g'\,dt, \quad \delta h = h'\,dt, \quad \ldots, \quad \delta k = k'\,dt.$$

$f', \ldots, g', h', \ldots, k'$ sont les *vitesses relatives au voisinage du contact.*

Si ces vitesses sont constamment nulles

$$(11) \qquad f' = 0, \quad \ldots, \quad g' = 0, \quad h' = 0, \quad \ldots, \quad k' = 0,$$

la liaison considérée est une *soudure*.

Ces préliminaires posés, nous admettrons que $d\varpi_w$ est de la forme suivante :

$$(12) \qquad d\varpi_w = \mathrm{F}_f\,\delta f + \ldots + \mathrm{F}_g\,\delta g + \mathrm{F}_h\,\delta h + \ldots + \mathrm{F}_k\,\delta k.$$

Les quantités F dépendent de l'état des parties 1 et 2 au voisinage des contacts, y compris la température de ces parties; elles dépendent en outre des vitesses

relatives f', ..., g', h', ..., k'; elles s'annulent lorsque toutes ces vitesses sont nulles, en sorte que les égalités (11) entraînent les égalités

$$(13) \qquad F_f = 0, \quad F_g = 0, \quad F_h = 0, \quad \ldots, \quad F_k = 0.$$

Lorsque la liaison établie entre deux corps est une soudure, les actions de viscosité au contact de ces deux corps sont identiquement nulles. C'est une proposition que nous avons énoncée et dont nous avons fait usage en la première Partie de ces *Recherches.*

Enfin, lorsque les égalités (11) ne sont pas simultanément vérifiées, on a

$$(14) \qquad F_f f' + \ldots + F_g g' + F_h h' + \ldots + F_k k' \leqq 0.$$

Aux propositions précédentes on peut en adjoindre d'autres si l'on admet l'hypothèse de lord Rayleigh aux termes de laquelle il existe, pour tout système indépendant, une *fonction dissipative.*

Le corps 1, en effet, tant qu'il demeure indépendant, doit, selon cette hypothèse, admettre une fonction dissipative; les actions de viscosité qui figurent dans $d\mathfrak{T}_{v1}$ doivent donc dériver d'une telle fonction. Il doit en être de même des actions qui figurent dans $d\mathfrak{T}_{v2}$. Dès lors, pour que le système tout entier dérive d'une fonction dissipative, *il faut et il suffit que les actions de viscosité qui figurent dans $d\mathfrak{T}_w$ dérivent d'une fonction dissipative qui sera forcément une forme quadratique en f', ..., g', h', ..., k'.*

Supposons qu'à l'une des variations virtuelles δf, ..., δg, δh, ..., δk, soit la variation δk, corresponde une vitesse k' identiquement nulle; la fonction dissipative dont nous venons de parler ne renfermera pas de terme en k', en sorte que F_k sera égal à 0 et que $d\mathfrak{T}_w$ ne renfermera pas de terme en δk.

Occupons-nous maintenant du terme $d\mathfrak{T}_f$.

Ce terme, lui aussi, est la somme de trois autres :

1° Du terme

$$(15) \qquad d\mathfrak{T}_{\varphi 1} = \mathcal{G}_{a1} \frac{a'_1}{|a'_1|} \delta a_1 + \ldots + \mathcal{G}_{l1} \frac{l'_1}{|l'_1|} \delta l_1.$$

Les termes $\mathcal{G}_{a1}$, ..., $\mathcal{G}_{l1}$ dépendent de l'état de tout le système formé par les parties 1 et 2, y compris la distribution des températures sur ce système; des actions extérieures appliquées à ce système; enfin des vitesses des diverses parties de ce système.

Le terme $\mathcal{G}_{a1}$ n'est pas la limite vers laquelle tend le terme g_{a1} lorsque les deux parties 1 et 2 viennent au contact. Nous verrons tout à l'heure quelle relation existe entre les quantités g_{a1} et $\mathcal{G}_{a1}$.

On a d'ailleurs

$$\mathcal{G}_{a1} < 0, \quad \ldots, \quad \mathcal{G}_{l1} < 0. \qquad [illegible]$$

2° Du terme

$$d\varpi_{\varphi 2} = \mathcal{G}_{a2} \frac{a'_2}{|a'_2|} \delta a_2 + \ldots + \mathcal{G}_{l2} \frac{l'_2}{|l'_2|} \delta l_2, \qquad [illegible]$$

analogue au terme $d\varpi_{\varphi 1}$.

3° Du terme $d\varpi_\psi$, travail virtuel du *frottement au contact des corps* **1** *et* **2**. Ce terme va être étudié de près.

Parmi les diverses manières de déterminer les variations virtuelles $\delta f, \ldots, \delta g, \delta h, \ldots, \delta k$, nous supposerons qu'il en existe au moins une telle que l'on puisse écrire

$$d\varpi_\psi = G_f \frac{f'}{|f'|} \delta f + \ldots + G_g \frac{g'}{|g'|} \delta g, \qquad (17)$$

le travail virtuel $d\varpi_\psi$ ne renfermant aucun terme en $\delta h, \ldots, \delta k$; il se peut, du reste, qu'il n'existe aucune variation telle que $\delta h, \ldots, \delta k$.

Si l'une des quantités $\delta f, \ldots, \delta g, \delta h, \ldots, \delta k$ correspond à une valeur nulle de celle des quantités $f', \ldots, g', h', \ldots, k'$ qui lui correspond, le facteur G correspondant est supposé égal à 0; la variation correspondante est une des variations $\delta h, \ldots, \delta k$. Dans l'étude du mouvement d'un point matériel sur une surface, nous avons déjà trouvé une occasion d'appliquer cette remarque.

Si l'une des quantités δf est nulle *par liaison*, elle cesse évidemment de figurer dans l'expression de $d\varpi_\psi$, ce qui revient au même que si l'on supposait $G_f = 0$; si la liaison établie par les égalités (10) ou les égalités (11), qui leur sont équivalentes, est telle que

$$\delta f = 0, \quad \ldots, \quad \delta g = 0,$$

$d\varpi_\psi$ est identiquement nul; le résultat est alors le même que si l'on supposait

$$G_f = 0, \quad \ldots, \quad G_g = 0. \qquad (18)$$

Les quantités G qui ne sont pas nulles sont négatives :

$$G_f < 0, \quad \ldots, \quad G_g < 0. \qquad (19)$$

Les quantités G dépendent de l'état du système, des actions extérieures qui le sollicitent, des vitesses de ses diverses parties.

On voit qu'en somme, pour passer de ce que nous avons dit au sujet du frottement en général à ce que nous venons de dire au sujet du frottement au contact

de deux corps qui présentent une liaison bilatérale, il suffit de formuler une seule hypothèse qui est la suivante :

Les variations privilégiées à frottement du système formé par les corps 1 et 2 se composent :

1° *Des variations privilégiées à frottement* $\delta a_1, \ldots, \delta l_1$ *de la partie 1 considérée comme un système indépendant;*

2° *Des variations privilégiées à frottement* $\delta a_2, \ldots, \delta l_2$ *de la partie 2 considérée comme un système indépendant;*

3° *De certaines variations* $\delta f, \ldots, \delta g$ *qui sont déterminées lorsqu'on connaît le déplacement virtuel relatif des parties voisines du ou des points de contact, et qui s'annulent avec ce déplacement.*

Poussant plus loin, nous allons introduire deux autres hypothèses, auxquelles vont nous conduire les considérations suivantes :

Nous admettons, avons-nous dit, qu'une égalité analogue à l'égalité (2) doit être vérifiée. D'après ce qui vient d'être exposé, cette égalité s'écrira

$$(20)\qquad \begin{aligned} d\mathfrak{E}_e - \delta_T \mathfrak{F} + d\mathfrak{E}_{l1} + d\mathfrak{E}_{l2} + d\mathfrak{E}_{\nu 1} + d\mathfrak{E}_{\nu 2} + d\mathfrak{E}_{\varphi 1} + d\mathfrak{E}_{\varphi 2} \\ + F_f \delta f + \ldots + F_g \delta g + F_h \delta h + \ldots + F_k \delta k \\ + G_f \frac{f'}{|f'|} \delta f + \ldots + G_g \frac{g'}{|g'|} \delta g = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité (20) doit avoir lieu, non pas identiquement, mais pour toutes les modifications virtuelles qui vérifient les égalités (9) ou, ce qui revient au même, les égalités (10).

Or les quantités $\delta f, \ldots, \delta g, \delta h, \ldots, \delta k$ étant des fonctions linéaires et homogènes de $\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2$, le premier membre de l'égalité (20) est, en définitive, une forme linéaire et homogène des variations

$$\delta a_1, \quad \ldots, \quad \delta n_1, \quad \delta a_2, \quad \ldots, \quad \delta n_2,$$

forme que nous désignerons par

$$\Delta(\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2).$$

Les coefficients de cette forme dépendent de l'état du système formé par les parties 1 et 2, des actions extérieures exercées sur ce système et des vitesses $a'_1, \ldots, n'_1, a'_2, \ldots, n'_2$.

L'égalité (20) ou

$$\Delta(\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2) = 0 \tag{21}$$

doit être vérifiée toutes les fois que $\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2$ vérifient les égalités (9). Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe des quantités $\Pi, \Pi', \ldots$, fonctions des coefficients de la forme Δ et des quantités $P, P', \ldots$ qui figurent dans les égalités (9), telles que l'on ait *identiquement*

$$\begin{aligned}\Delta(\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2) & \\ + \Pi(P_{a1}\delta a_1 + \ldots + P_{n1}\delta n_1 + P_{a2}\delta a_2 + \ldots + P_{n2}\delta n_2) & \\ + \Pi'(P'_{a1}\delta a_1 + \ldots + P'_{n1}\delta n_1 + P'_{a2}\delta a_2 + \ldots + P'_{n2}\delta n_2) & \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 0.\end{aligned} \tag{22}$$

Il résulte de ce qui va être supposé que des équations permettent de déterminer les quantités $\Pi, \Pi', \ldots$ lorsqu'on connaît l'état du système **1-2**, les actions extérieures qui le sollicitent, enfin les vitesses $a'_1, \ldots, n'_1, a'_2, \ldots, n'_2$. Il est nécessaire de faire cette remarque avant d'énoncer les deux hypothèses que voici :

I. Si la partie **1** formait un système indépendant, le travail virtuel du frottement relatif à ce système serait de la forme

$$g_{a1}\frac{a'_1}{|a'_1|}\delta a_1 + \ldots + g_{l1}\frac{l'_1}{|l'_1|}\delta l_1.$$

Les fonctions $g_{a1}, \ldots, g_{l1}$ dépendraient, d'une manière bien déterminée :

1° De l'état du système, y compris la température en ses divers points;

2° Des vitesses $a'_1, \ldots, n'_1, a'_2, \ldots, n'_2$;

3° Des actions extérieures $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{N}_1$. Nous mettrons ces dernières variables en évidence en écrivant

$$\begin{aligned} g_{a1} &= g_{a1}(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{N}_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_{l1} &= g_{l1}(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{N}_1). \end{aligned}$$

Or, *nous supposerons que les fonctions* $\mathcal{G}_{a1}, \ldots, \mathcal{G}_{l1}$ *se tirent simplement des fonctions* $g_{a1}, \ldots, g_{l1}$ *en y remplaçant respectivement* $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{N}_1$ ***par***

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + \Pi P_{a1} + \Pi' P'_{a1} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1 + \Pi P_{n1} + \Pi' P'_{n1} + \ldots, \end{aligned}$$

de telle sorte que l'on ait

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{G}_{a1} = g_{a1}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + \Pi P_{a1} + \Pi' P'_{a1} + \ldots, \;\ldots, \;\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1 + \Pi P_{n1} + \Pi' P'_{n1} + \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathcal{G}_{l1} = g_{l1}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + \Pi P_{a1} + \Pi' P'_{a1} + \ldots, \;\ldots, \;\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1 + \Pi P_{n1} + \Pi' P'_{n1} + \ldots). \end{array}\right.$$

On peut énoncer cette hypothèse sous la forme que voici :

Le travail virtuel $d\mathcal{T}_{f1}$ se calcule exactement comme se calculerait le travail virtuel du frottement au sein d'un système indépendant qui serait identique au corps 1, mais qui serait soumis aux actions extérieures

$$\begin{array}{l} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + \Pi P_{a1} + \Pi' P'_{a1} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}'_1 + \Pi P_{n1} + \Pi' P'_{n1} + \ldots. \end{array}$$

Naturellement, cette hypothèse s'étend, *mutatis mutandis,* au travail virtuel $d\mathcal{T}_{f2}$.

II. *Nous supposerons que les fonctions* $G_f, \ldots, G_g$ *s'obtiennent en remplaçant* $\Pi, \Pi', \ldots$ *par leurs valeurs dans certaines fonctions*

$$\mathfrak{G}_f(\Pi, \Pi', \ldots), \quad \ldots, \quad \mathfrak{G}_g(\Pi, \Pi', \ldots)$$

qui, outre $\Pi, \Pi', \ldots$, *dépendent exclusivement de l'état des corps* 1 *et* 2 *au voisinage immédiat des parties que la liaison* (9) *met en contact et des vitesses* $f', \ldots, g', h', \ldots, k'$:

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} G_f = \mathfrak{G}_f(\Pi, \Pi', \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ G_g = \mathfrak{G}_g(\Pi, \Pi', \ldots). \end{array}\right.$$

D'après ce qui a été dit sur le passage des égalités (9) aux égalités (10), on a identiquement

$$\begin{array}{l} P_{a1}\,\delta a_1 + \ldots + P_{n1}\,\delta n_1 = p_f\,\delta f + \ldots + p_h\,\delta h, \\ P'_{a1}\,\delta a_1 + \ldots + P'_{n1}\,\delta n_1 = p'_f\,\delta f + \ldots + p'_h\,\delta h, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Dès lors, en vertu des égalités (12), (15), (15 *bis*), (17), (22), (23) et (24), on peut énoncer la proposition suivante :

En nombre égal aux équations de liaisons (9), *il existe des quantités*

$\Pi, \Pi', \ldots,$ *telles que l'on ait identiquement*

$$(25)\quad \begin{aligned} & d\mathfrak{C}_e - \delta_T \mathcal{F} + d\mathfrak{C}_{l1} + d\mathfrak{C}_{l2} + d\mathfrak{C}_{v1} + d\mathfrak{C}_{v2} \\ & + F_f \delta f + \ldots + F_g \delta g + F_h \delta h + \ldots + F_k \delta k \\ & + g_{a1}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + \Pi P_{a1} + \Pi' P'_{a1} + \ldots, \ \ldots) \frac{a'_1}{|a'_1|} \delta a_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + g_{l1}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}'_1 + \Pi P_{n1} + \Pi' P'_{n1} + \ldots, \ \ldots) \frac{l'_1}{|l'_1|} \delta l_1 \\ & + g_{a2}(\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}'_2 + \Pi P_{a2} + \Pi' P'_{a2} + \ldots, \ \ldots) \frac{a'_2}{|a'_2|} \delta a_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + g_{l2}(\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}'_2 + \Pi P_{a2} + \Pi' P'_{a2} + \ldots, \ \ldots) \frac{l'_2}{|l'_2|} \delta l_2 \\ & + \Phi_f(\Pi, \Pi', \ldots) \frac{f'}{|f'|} \delta f + \ldots + \Phi_g(\Pi, \Pi', \ldots) \frac{g'}{|g'|} \delta g \\ & + \Pi (P_{a1} \delta a_1 + \ldots + P_{n1} \delta n_1 + P_{a2} \delta a_2 + \ldots + P_{n2} \delta n_2) \\ & + \Pi' (P'_{a1} \delta a_1 + \ldots + P'_{n1} \delta n_1 + P'_{a2} \delta a_2 + \ldots + P'_{n2} \delta n_2) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

Si, dans cette égalité, nous remplaçons les quantités $\delta f, \ldots, \delta g, \delta h, \ldots, \delta k$ par leurs expressions linéaires et homogènes en $\delta a_1, \ldots, \delta n_1, \delta a_2, \ldots, \delta n_2$, nous trouvons une égalité dont le premier membre est une forme linéaire et homogène par rapport aux ν_1 quantités $\delta a_1, \ldots, \delta n_1$ et aux ν_2 quantités $\delta a_2, \ldots, \delta n_2$. Cette égalité devant avoir lieu quelles que soient ces $(\nu_1 + \nu_2)$ variations, nous trouvons $(\nu_1 + \nu_2)$ égalités indépendantes de ces variations.

Parmi ces variations, il peut se faire qu'il en existe un certain nombre ρ qui soient *sans inertie,* c'est-à-dire telles que les quantités J correspondantes soient identiquement nulles; les $\sigma = \nu_1 + \nu_2 - \rho$ autres sont affectées d'inertie.

Les ρ premières sont telles que les modifications virtuelles qu'elles représentent n'entraînent, pour les diverses masses qui composent les parties 1 et 2, aucun déplacement dans l'espace. Dès lors, comme nous l'avons vu, il est certain qu'elles ne figurent pas dans les conditions (9) et, de plus, que les coefficients P ne varieraient pas dans une modification virtuelle où ces seules variations seraient différentes de o. Ce que nous venons de dire de ces ρ variations peut se répéter de la température T.

Les conditions (9), dont nous désignerons le nombre par ϖ, appliquées à la modification réelle que le système subit dans le temps dt, donnent les relations

$$\begin{aligned} & P_{a1} a'_1 + \ldots + P_{n1} n'_1 + P_{a2} a'_2 + \ldots + P_{n2} n'_2 = 0, \\ & P'_{a1} a'_1 + \ldots + P'_{n1} n'_1 + P'_{a2} a'_2 + \ldots + P'_{n2} n'_2 = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En différentiant ces relations par rapport à t, nous obtiendrons ϖ nouvelles relations où figureront celles des accélérations $a''_1, \ldots, n''_1, a''_2, \ldots, n''_2$ qui correspondent à des variations à inertie; σ en sera le nombre; ni les températures, ni leurs dérivées par rapport à t n'y figureront.

Nous obtenons ainsi $(\sigma + \varpi)$ relations linéaires par rapport aux σ accélérations qui correspondent aux variations à inertie. Ces relations dépendent, en outre, des ϖ facteurs $\Pi, \Pi', \ldots$, de l'état du système, y compris la température de ses diverses parties, des actions extérieures et des vitesses $a'_1, \ldots, n'_1, a'_2, \ldots, n'_2$; les vitesses de variation de la température des diverses parties n'y figurent pas. Ces $(\sigma + \varpi)$ relations sont ce que nous nommerons les *relations du premier groupe*.

Nous avons, en outre, fournies par les variations sans inertie, ρ *relations du second groupe,* où figurent les ϖ facteurs $\Pi, \Pi', \ldots$ et qui dépendent de l'état du système à l'instant t, y compris sa température aux divers points, des actions extérieures et des vitesses, sauf de la vitesse de variation de la température.

Entre les $(\sigma + \varpi)$ relations du premier groupe, éliminons les σ accélérations qui y figurent et qui se rapportent toutes aux variations à inertie. Il nous restera ϖ équations permettant de déterminer les ϖ facteurs $\Pi, \Pi', \ldots$ en fonctions de l'état du système, y compris la température aux divers points, des actions extérieures et des vitesses $a'_1, \ldots, n'_1, a'_2, \ldots, n'_2$. Ce premier résultat rend légitime les hypothèses formulées tout à l'heure.

Dans les $(\rho + \sigma)$ relations qui fournit l'identité (25), remplaçons $\Pi, \Pi', \ldots$ par les valeurs ainsi déterminées. Il nous restera $(\rho + \sigma)$ équations dépendant de l'état du système, *y compris la température* T en ses diverses parties, des actions extérieures et des vitesses $a'_1, \ldots, n'_1, a'_2, \ldots, n'_2$; en outre, σ de ces équations, celles qui proviennent des σ variations à inertie, contiendront les σ accélérations correspondantes.

Si l'on connaissait la loi de variation des actions extérieures et de la température T en fonction de t, ces équations détermineraient les lois du mouvement du système, pourvu que l'on connût son état initial et les vitesses initiales qui correspondent aux variations à inertie. Mais, comme la variation des températures T en fonction de t n'est pas, en général, connue, il faudra, aux équations précédentes, joindre autant de *relations supplémentaires* qu'il y a, dans le système, de températures indépendantes.

Pour terminer ces considérations générales sur le frottement, il nous reste à faire la remarque suivante :

La méthode qui nous a servi à passer d'un système formé de parties indépendantes à un système où ces parties présentent une liaison, permet également de passer d'un système où figure une liaison à un système où figurent deux liaisons, et ainsi de suite.

A chaque liaison correspondra un système de variations à frottement telles que $\delta f, \ldots, \delta g$; des facteurs analogues à $\Pi, \Pi', \ldots$; un travail virtuel de frottement analogue à $d\mathfrak{T}_w$. *Le travail virtuel des actions de frottement qui s'exercent aux divers contacts est la somme de ces quantités analogues à* $d\mathfrak{T}_w$.

§ 2. — Frottement au contact de deux corps solides.

Avant d'étendre ces considérations aux systèmes composés d'un solide indéformable et d'un fluide, ou bien aux systèmes composés de deux fluides, nous allons les appliquer au cas bien connu de deux solides indéformables qui se touchent en un point.

Pour un solide indépendant, le potentiel interne dépend exclusivement de la température. On a donc

$$\delta_T \mathcal{F}_1 = 0, \qquad \delta_T \mathcal{F}_2 = 0$$

et, partant,

$$\delta_T \mathcal{F} = E\,\delta\Psi.$$

Le mouvement virtuel le plus général d'un solide invariable n'entraîne aucun travail de viscosité ni de frottement; on a donc

$$d\mathfrak{T}_{v1} = 0, \qquad d\mathfrak{T}_{v2} = 0,$$
$$d\mathfrak{T}_{\varphi 1} = 0, \qquad d\mathfrak{T}_{\varphi 2} = 0.$$

Le corps 1 et le corps 2 se touchent en un point O. Le déplacement relatif virtuel le plus général du corps 2 par rapport au corps 1 peut toujours se ramener à une rotation autour d'un axe passant par le point O et à une translation. Il en est de même du déplacement relatif réel du corps 2 par rapport au corps 1 pendant le temps dt. Mais ici, comme on doit supposer les deux corps 1 et 2 en contact aussi bien à l'instant $(t + dt)$ qu'à l'instant t, la translation devra être parallèle au plan tangent commun aux deux corps 1 et 2.

Le déplacement relatif réel du corps 2 par rapport au corps 1, dans le temps dt, peut donc se décomposer en trois :

1° Une rotation $p'\,dt$ autour de la normale commune ON aux deux corps; cette rotation constitue le *pivotement* pendant le temps dt;

2° Une rotation $r'\,dt$ autour d'une droite OR menée dans le plan tangent commun; cette rotation constitue le *roulement* pendant le temps dt et OR est l'*axe de roulement*.

3° Une translation $g'\,dt$ suivant une droite OG située dans le plan tangent commun; cette translation constitue le *glissement* pendant le temps dt et OG est la *direction du glissement*.

Un déplacement relatif virtuel du corps 2 par rapport au corps 1 peut toujours se décomposer en six autres :

1° Une rotation δp autour de la normale commune ON;

2° Une rotation δr autour de l'axe de roulement OR;

3° Une rotation $\delta\rho$ autour d'une droite O$\mathcal{R}$, située dans le plan tangent commun et perpendiculaire à OR;

4° Une translation δn parallèle à la normale commune ON;

5° Une translation δg parallèle à la direction de glissement OG;

6° Une translation $\delta\gamma$ parallèle à une direction O$\mathcal{G}$ située dans le plan tangent commun et perpendiculaire à OG.

Nous admettrons que les six variations

$$\delta p, \quad \delta r, \quad \delta\rho, \quad \delta n, \quad \delta g, \quad \delta\gamma$$

jouent ici le rôle qui est attribué, dans la théorie générale, aux quantités

$$\delta f, \quad \ldots, \quad \delta g, \quad \delta h, \quad \ldots, \quad \delta k.$$

En la modification réelle qui se produit pendant le temps dt, on a

$$\delta p = p'\,dt, \qquad \delta r = r'\,dt, \qquad \delta\rho = 0,$$
$$\delta n = 0, \qquad \delta g = g'\,dt, \qquad \delta\gamma = 0.$$

D'après ce que nous avons vu, les variations virtuelles $\delta\rho$, $\delta\gamma$, δn ne figureront pas dans le travail virtuel de la viscosité de contact qui aura pour expression

$$(26) \qquad d\varpi_w = F_p\,\delta p + F_r\,\delta r + F_g\,\delta g,$$

les fonctions F_p, F_r, F_g dépendant de la nature et de l'état des corps en contact et, en outre, des vitesses p', r', g'.

Les vitesses ρ' et γ' étant nulles par définition et δn étant nul par liaison, $d\varpi_\psi$ ne renferme aucun terme en $\delta\rho$, $\delta\gamma$, δn :

$$(27) \qquad d\varpi_\psi = G_p \frac{p'}{|p'|}\,\delta p + G_r \frac{r'}{|r'|}\,\delta r + G_g \frac{g'}{|g'|}\,\delta g.$$

Pour définir le déplacement virtuel le plus général du système, il suffit d'adjoindre aux six variations

$$\delta p, \quad \delta r, \quad \delta\rho, \quad \delta n, \quad \delta g, \quad \delta\gamma$$

six autres variations définissant un mouvement d'ensemble du système, d'ailleurs identique au déplacement d'ensemble le plus général du corps 1. Ces six variations peuvent toujours se ramener aux trois composantes $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ d'une rotation et aux trois composantes $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ d'une translation.

On pourra toujours écrire

$$(28)\qquad \begin{aligned} d\mathcal{C}_e - \mathrm{E}\,\delta\Psi = {} & \mathrm{X}\,\delta\xi + \mathrm{Y}\,\delta\eta + \mathrm{Z}\,\delta\zeta \\ & + \mathrm{L}\,\delta\lambda + \mathrm{M}\,\delta\mu + \mathrm{N}\,\delta\nu \\ & + \mathcal{A}\,\delta p + \mathcal{B}\,\delta r + \mathcal{C}\,\delta\rho + \mathcal{O}\,\delta n + \mathcal{E}\,\delta g + \mathcal{F}\,\delta\gamma. \end{aligned}$$

Le travail des forces d'inertie $d\mathcal{C}_j$ sera une fonction linéaire et homogène des douze mêmes variations indépendantes.

Enfin la liaison qui existe entre les deux corps s'exprimera par l'égalité

$$(29)\qquad \delta n = 0.$$

Dès lors, d'après ce que nous avons vu, il existera une grandeur Π dépendant de l'état des deux corps 1 et 2, de leurs vitesses et des actions qui s'exercent sur eux, telle qu'on ait l'égalité

$$(30)\qquad d\mathcal{C}_e - \mathrm{E}\,\delta\Psi + d\mathcal{C}_j + d\mathcal{C}_w + d\mathcal{C}_\psi + \Pi\,\delta n = 0,$$

quelles que soient les variations

$$\begin{array}{cccccc} \delta\xi, & \delta\eta, & \delta\zeta, & \delta\lambda, & \delta\mu, & \delta\nu, \\ \delta p, & \delta r, & \delta\rho, & \delta n, & \delta g, & \delta\gamma. \end{array}$$

D'ailleurs les coefficients G_p, G_r, G_g peuvent être ramenés à ne dépendre que de l'état des corps 1 et 2, des vitesses p', r', g' et de Π :

$$(31)\qquad \left\{ \begin{aligned} G_p &= \mathfrak{G}_p(\Pi, p', r', g'), \\ G_r &= \mathfrak{G}_r(\Pi, p', r', g'), \\ G_g &= \mathfrak{G}_g(\Pi, p', r', g'). \end{aligned} \right.$$

Dès lors, l'égalité (30), jointe aux égalités (26), (27), (28) et (31), nous fournit les douze relations suivantes :

$$(32)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{X} + \mathrm{J}_\xi = 0, & \mathrm{Y} + \mathrm{J}_\eta = 0, & \mathrm{Z} + \mathrm{J}_\zeta = 0, \\ \mathrm{L} + \mathrm{J}_\lambda = 0, & \mathrm{M} + \mathrm{J}_\mu = 0, & \mathrm{N} + \mathrm{J}_\nu = 0, \end{array} \right.$$

$$(33)\qquad \mathcal{O} + \mathrm{J}_n + \Pi = 0,$$

$$(34)\qquad \mathcal{C} + \mathrm{J}_\rho = 0, \qquad \mathcal{F} + \mathrm{J}_\gamma = 0,$$

$$(35)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A} + \mathrm{J}_p + \mathrm{F}_p + \mathfrak{G}_p \frac{p'}{|p'|} &= 0, \\ \mathcal{B} + \mathrm{J}_r + \mathrm{F}_r + \mathfrak{G}_r \frac{r'}{|r'|} &= 0, \\ \mathcal{E} + \mathrm{J}_g + \mathrm{F}_g + \mathfrak{G}_g \frac{g'}{|g'|} &= 0, \end{aligned} \right.$$

auxquelles il faut joindre la treizième équation

$$(36) \qquad n' = 0,$$

qui résulte de la liaison (29), pour obtenir les treize équations du mouvement du système.

Les trois équations (35) n'ont de sens que si les trois quantités p', r', g' sont différentes de o. Si l'une d'elles, p' par exemple, devenait égale à o, la première n'aurait plus de sens.

Mais, d'autre part, l'hypothèse selon laquelle p' est différent de o peut fort bien, elle aussi, conduire à des résultats inacceptables.

En effet, la première équation (35) équivaut, en réalité, à deux équations distinctes, savoir : L'équation

$$(35\ bis) \qquad \mathcal{A} + J_p + F_p + \mathfrak{G}_p = 0,$$

que l'on ne doit employer que si p' est positif, et l'équation

$$(35\ ter) \qquad \mathcal{A} + J_p + F_p - \mathfrak{G}_p = 0,$$

que l'on ne doit point employer à moins que p' ne soit négatif.

Or, on peut fort bien se trouver dans les conjonctures suivantes : Si l'on remplace la première équation (35) par l'équation (35 *bis*), les équations du mouvement du système donnent pour p' une valeur négative; si, au contraire, on remplace la première équation (35) par l'équation (35 *ter*), les équations du mouvement du système fournissent pour p' une valeur positive.

Dans ce cas, l'hypothèse qu'il existe une vitesse de pivotement différente de o conduit, on le voit, à une contradiction; on est contraint de supposer que le corps 2 ne pivote pas sur le corps 1, de poser constamment

$$(36) \qquad p' = 0.$$

Mais alors, la mise en équation du problème doit être modifiée.

Doit-on considérer l'hypothèse (36) de la manière suivante :

La vitesse p' est nulle identiquement, mais la variation virtuelle δp n'est pas nécessairement nulle?

Dans ce cas, d'après le postulat que nous avons formulé, il suffira d'égaler F_p, G_p et, partant, $\mathfrak{G}_p$ à zéro.

Dès lors, la première équation (35) deviendra

$$(35_{IV}) \qquad \mathcal{A} + J_p = 0.$$

Mais alors, à la seule première équation (35), nous nous trouvons avoir substitué les deux équations (35_{IV}) et (36); comme le nombre des inconnues n'a pas changé, il est à prévoir que le nombre des équations sera devenu surabondant et que le nouveau problème conduira encore à des impossibilités.

Par conséquent, on doit regarder l'égalité (36) comme résultant de l'hypothèse suivante :

*Au problème primitif, reconnu impossible, nous substituons un nouveau problème qui diffère du précédent par l'*INTRODUCTION DE L'ÉQUATION DE LIAISON

$$\delta p = 0. \tag{36 bis}$$

Dans ce cas, on doit bien encore égaler à o les coefficients F_p, $G_{p'}$, $\mathfrak{G}_{p'}$; mais l'égalité (30) ne doit plus avoir lieu identiquement, elle doit avoir lieu seulement en vertu de la condition (36 *bis*); il doit donc exister une grandeur P dépendant de l'état des deux corps 1 et 2, de leurs vitesses et des actions qui s'exercent sur eux, telle que l'on ait identiquement

$$d\mathfrak{T}_e - E\,\delta\Psi + d\mathfrak{T}_i + d\mathfrak{T}_w + d\mathfrak{T}_\psi - \Pi\,\delta n - P\,\delta p = 0. \tag{30 bis}$$

Alors les coefficients G_r, G_g peuvent être ramenés à ne dépendre que de l'état des corps 1 et 2, des valeurs r' et g' *et des grandeurs* Π *et* P :

$$\left\{ \begin{aligned} G_r &= \mathfrak{G}'_r(\Pi, P, r', g'), \\ G_g &= \mathfrak{G}'_g(\Pi, P, r', g'). \end{aligned} \right. \tag{31 bis}$$

La première égalité (35) est remplacée non par l'égalité (35_{IV}), mais par l'égalité

$$\mathfrak{J} + J_p + P = 0. \tag{35_V}$$

La première égalité (35) est donc remplacée par les équations (35_V) et (36), ce qui augmente encore d'une unité le nombre des équations du problème; mais l'introduction de la nouvelle action de liaison P augmente aussi d'une unité le nombre des inconnues. Cette manière nouvelle d'envisager l'introduction de la relation (36) ne conduit donc plus à une impossibilité, comme la précédente méthode.

Ce que nous venons de dire au sujet du pivotement peut se répéter au sujet du roulement et du glissement.

Habituellement, on fait, au sujet du frottement entre solides, des hypothèses plus restreintes que celles dont nous avons donné l'exposé; on suppose que

l'on a

$$
(37)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} F_p = 0, & F_r = 0, & F_g = 0, \\ \Phi_p = H_p \Pi, & \Phi_r = H_r \Pi, & \Phi_g = H_g \Pi, \end{array} \right.
$$

les quantités H_p, H_r, H_g dépendant exclusivement de l'état des corps 1 et 2, mais point des vitesses p', r', g' de pivotement, de roulement et de glissement, ni de pression Π.

CHAPITRE II.

ÉTABLISSEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES.

§ 1. — Viscosité et frottement a la surface de contact de deux corps, dont l'un au moins est fluide.

Au Chapitre précédent, nous avons supposé qu'il existait entre les corps 1 et 2 un nombre limité de liaisons dont chacune correspondait à un nombre également fini de conditions; nous avons été amenés alors à regarder les quantités $d\varpi_w$, $d\varpi_\psi$ comme la somme d'autant de termes distincts qu'il y avait de liaisons indépendantes et nous avons étudié en détail la forme d'un de ces termes.

Nous allons aborder maintenant un cas un peu plus compliqué.

Supposons que deux corps 1 et 2, dont l'un au moins est fluide, soient assujettis à demeurer en contact tout le long d'une certaine surface S. Si δx_1, δy_1, δz_1 sont les composantes du déplacement virtuel d'un point du corps 1, tandis que δx_2, δy_2, δz_2 sont les composantes du déplacement virtuel d'un point du corps 2, nous devrons avoir, à tout instant et en tout point de la surface S,

$$
(38)\qquad (\delta x_1 - \delta x_2)\cos(N, x) + (\delta y_1 - \delta y_2)\cos(N, y) + (\delta z_1 - \delta z_2)\cos(N, z) = 0,
$$

N étant la normale à la surface S dirigée, par exemple, vers l'intérieur du corps 2.

La liaison imposée ici s'exprime non par un nombre limité de conditions, mais par une condition vérifiée en tous les points de la surface S, c'est-à-dire par une infinité d'équations; ou mieux, on peut dire que nous imposons aux corps 1 et 2 une infinité de liaisons bilatérales dont chacune se rapporte à un point de la surface S et s'exprime par la condition (38) qui se rapporte à ce point.

Nous sommes amenés ainsi à penser que le travail de viscosité et le travail de

frottement au contact des corps 1 et 2 peuvent se mettre sous la forme

$$(39)\qquad d\mathfrak{C}_w = \int d\tau_w \, dS, \qquad d\mathfrak{C}_\psi = \int d\tau_\psi \, dS,$$

$d\tau_w$, $d\tau_\psi$ vérifiant des hypothèses analogues à celles que nous avons énoncées, au Chapitre précédent, pour $d\mathfrak{C}_w$, $d\mathfrak{C}_\psi$.

Soient u_1, v_1, w_1 les composantes de la vitesse en un point du corps 1 et u_2, v_2, w_2 les composantes de la vitesse en un point du corps 2. La condition (38) exige que l'on ait, à tout instant et en tout point de la surface S,

$$(40)\qquad (u_1 - u_2)\cos(N, x) + (v_1 - v_2)\cos(N, y) + (w_1 - w_2)\cos(N, z) = 0.$$

La vitesse relative est donc tangente à la surface S; en chaque point M de la surface S et à chaque instant, nous désignerons par Mr la tangente à la surface S qui marque la direction de la vitesse relative, dont $(u_1 - u_2)$, $(v_1 - v_2)$, $(w_1 - w_2)$ sont les composantes, et par r' cette vitesse relative, comptée positivement suivant Mr.

Soit Ms une ligne tangente en M à la surface S et perpendiculaire à Mr; par définition, nous aurons

$$(41)\qquad (u_1 - u_2)\cos(s, x) + (v_1 - v_2)\cos(s, y) + (w_1 - w_2)\cos(s, z) = 0.$$

Considérons, pour les corps 1 et 2, un déplacement virtuel quelconque, soumis ou non à la condition (38); dans cette modification, le déplacement relatif des corps 1 et 2, au voisinage du point M, est déterminé si l'on connaît les trois quantités

$$(42)\qquad \begin{cases} \delta N = (\delta x_1 - \delta x_2)\cos(N, x) + (\delta y_1 - \delta y_2)\cos(N, y) + (\delta z_1 - \delta z_2)\cos(N, z), \\ \delta r = (\delta x_1 - \delta x_2)\cos(r, x) + (\delta y_1 - \delta y_2)\cos(r, y) + (\delta z_1 - \delta z_2)\cos(r, z), \\ \delta s = (\delta x_1 - \delta x_2)\cos(s, x) + (\delta y_1 - \delta y_2)\cos(s, y) + (\delta z_1 - \delta z_2)\cos(s, z). \end{cases}$$

Si les corps 1 et 2 sont isotropes, nous admettrons que ces quantités δN, δr, δs sont les variations normales privilégiées dont dépendent $d\tau_w$ et $d\tau_\psi$.

Dans le temps dt se produit une modification réelle pour laquelle on a

$$\delta N = N' \, dt, \qquad \delta r = r' \, dt, \qquad \delta s = s' \, dt.$$

Mais les égalités (40), (42), (41) donnent sans peine

$$N' = 0, \qquad s' = 0.$$

Les quantités $d\tau_w$, $d\tau_\psi$ ne doivent donc renfermer ni terme en δN, ni terme en δs,

en sorte que l'on aura

(43) $$d\mathfrak{E}_w = \int F\,\delta r\,dS,$$

(44) $$d\mathfrak{E}_\psi = \int G\,\frac{r'}{|r'|}\,\delta r\,dS.$$

Ces égalités vont se mettre sous une forme un peu différente.

F dépend de l'état des corps 1 et 2 au voisinage du point M et de la vitesse r'; nulle avec r', cette quantité est toujours de signe contraire à r'; on peut donc écrire

(45) $$F = fr',$$

f étant une fonction de r' et de l'état des corps 1 et 2 au voisinage du point M; cette quantité est toujours négative :

(46) $$f < 0.$$

D'autre part, la seconde égalité (42) donne

(47) $$r'\,\delta r = (u_1 - u_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (v_1 - v_2)(\delta y_1 - \delta y_2) + (w_1 - w_2)(\delta z_1 - \delta z_2).$$

Les égalités (43), (45) et (47) donnent

(48) $$d\mathfrak{E}_w = \int f\,[(u_1 - u_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (v_1 - v_2)(\delta y_1 - \delta y_2) + (w_1 - w_2)(\delta z_1 - \delta z_2)]\,dS.$$

Si l'on observe que

(49) $$|r'| = [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2]^{\frac{1}{2}},$$

les égalités (44) et (47) donnent

(50) $$d\mathfrak{E}_\psi = \int G\,\frac{[(u_1 - u_2)(\delta x_1 - \delta x_2) + (v_1 - v_2)(\delta y_1 - \delta y_2) + (w_1 - w_2)(\delta z_1 - \delta z_2)]}{[(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2]^{\frac{1}{2}}}\,dS.$$

L'équation générale du mouvement du système peut désormais s'écrire sans difficulté.

La quantité $-E\,\delta\Psi$ est la somme de deux termes; l'un est le travail virtuel des actions que le corps 2 exerce sur le corps 1, l'autre est le travail virtuel des actions que le corps 1 exerce sur le corps 2; si donc on désigne par $d\mathfrak{E}_{e1}$ le travail virtuel des actions que le corps 1 subit de la part des corps extérieurs, *y compris le corps* 2, par $d\mathfrak{E}_{e2}$ le travail virtuel des actions que le corps 2 subit de

la part des corps extérieurs, *y compris le corps* 1, on pourra écrire

$$d\mathfrak{T}_e - \mathrm{E}\,\delta\Psi' = d\mathfrak{T}_{e1} + d\mathfrak{T}_{e2}$$

et l'égalité (20) pourra s'écrire

$$(51)\qquad \begin{aligned} &d\mathfrak{T}_{e1} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_1 + d\mathfrak{T}_{i1} + d\mathfrak{T}_{\nu 1} + d\mathfrak{T}_{\varphi 1} \\ &+ d\mathfrak{T}_{e2} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_2 + d\mathfrak{T}_{i2} + d\mathfrak{T}_{\nu 2} + d\mathfrak{T}_{\varphi 2} \\ &\qquad + d\mathfrak{T}_w + d\mathfrak{T}_\psi = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité ne doit pas avoir lieu quelles que soient les modifications virtuelles imposées aux corps 1 et 2, mais seulement pour les modifications virtuelles qui respectent la condition de liaison (38). Dès lors, les principes du calcul des variations nous enseignent qu'il existe une quantité ϖ, variable d'une manière continue le long de la surface S, telle que l'égalité

$$(52)\qquad \begin{aligned} &d\mathfrak{T}_{e1} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_1 + d\mathfrak{T}_{i1} + d\mathfrak{T}_{\nu 1} + d\mathfrak{T}_{\varphi 1} \\ &+ d\mathfrak{T}_{e2} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_2 + d\mathfrak{T}_{i2} + d\mathfrak{T}_{\nu 2} + d\mathfrak{T}_{\varphi 2} \\ &\qquad + d\mathfrak{T}_w + d\mathfrak{T}_\psi \\ &- \int \varpi[(\delta x_1 - \delta x_2)\cos(\mathrm{N}, x) + (\delta y_1 - \delta y_2)\cos(\mathrm{N}, y) + (\delta z_1 - \delta z_2)\cos(\mathrm{N}, z)]\,d\mathrm{S} = 0 \end{aligned}$$

ait lieu quelle que soit la modification virtuelle imposée à chacun des corps 1 et 2.

En outre, la quantité G pourra s'exprimer en fonction de l'état des corps 1 et 2 au voisinage du point M auquel elle se rapporte, de r' et de ϖ.

Les corps 1 et 2 étant supposées isotropes, l'état de chacun d'eux en un point est déterminé lorsqu'on connaît sa densité et sa température en ce point. Soient ρ_1, ρ_2 les densités des corps 1 et 2 au voisinage du point M ; soit T leur commune température au voisinage de ce point; nous pourrons écrire

$$(53)\qquad \mathrm{G} = \mathfrak{G}(\rho_1, \rho_2, \mathrm{T}, r', \varpi) < 0.$$

Nous aurons aussi

$$(46\ bis)\qquad f = f(\rho_1, \rho_2, \mathrm{T}, r') < 0.$$

§ 2. — Conditions vérifiées a la surface de contact de deux fluides.

Supposons que le corps 1 soit un corps fluide. Nous aurons alors, en conservant les hypothèses faites dans la première Partie de ces *Recherches,*

$$d\mathfrak{T}_{\varphi 1} = 0.$$

En outre, $d\mathfrak{T}_{v1}$ sera donné par ce que nous avons dit, en cette première Partie, sur la viscosité au sein des fluides.

Donnons d'abord au fluide 1 une modification virtuelle telle que δx_1, δy_1, δz_1 s'annulent tout le long de la surface S; laissons le corps 2 invariable. L'égalité (52) deviendra

$$d\mathfrak{T}_{e1} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathfrak{F}_1 + d\mathfrak{T}_{i1} + d\mathfrak{T}_{v1} = 0.$$

C'est l'équation (2) de la première Partie de ces *Recherches*. Elle entraîne comme conséquence l'existence, au sein du fluide 1, des équations de l'Hydrodynamique.

Celles-ci admises, on peut obtenir, par un calcul que nous avons déjà fait ([1]), le résultat suivant :

Dans une modification virtuelle *absolument quelconque* du fluide 1, on a

$$(54)\quad \begin{aligned} & d\mathfrak{T}_{e1} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathfrak{F}_1 + d\mathfrak{T}_{i1} + d\mathfrak{T}_{v1} \\ &\quad = \int \Big\{ [\Pi_1 \cos(\mathrm{N}, x) + p_{x1}]\,\delta x_1 + [\Pi_1 \cos(\mathrm{N}, y) + p_{y1}]\,\delta y_1 \\ &\qquad\qquad + [\Pi_1 \cos(\mathrm{N}, z) + p_{z1}]\,\delta z_1 \Big\}\, d\mathrm{S}, \end{aligned}$$

Π_1 étant la pression à l'intérieur du fluide 1 et p_{x1}, p_{y1}, p_{z1} étant, pour ce fluide, les composantes de la pression de viscosité, telles que les déterminent les égalités (48) et (51), en la première Partie de ces *Recherches*.

Supposons maintenant que le corps 2 soit, lui aussi, un fluide; en raisonnant comme nous venons de le faire, nous prouverons, en premier lieu, que les équations de l'Hydrodynamique doivent être vérifiées en tous les points de ce fluide; en second lieu, que l'on a, en toute modification virtuelle du fluide 2,

$$(54\ bis)\quad \begin{aligned} & d\mathfrak{T}_{e2} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathfrak{F}_2 + d\mathfrak{T}_{i2} + d\mathfrak{T}_{v2} \\ &\quad = -\int \Big\{ [\Pi_2 \cos(\mathrm{N}, x) - p_{x2}]\,\delta x_2 + [\Pi_2 \cos(\mathrm{N}, y) - p_{y2}]\,\delta y_2 \\ &\qquad\qquad + [\Pi_2 \cos(\mathrm{N}, z) - p_{z2}]\,\delta z_2 \Big\}\, d\mathrm{S}. \end{aligned}$$

Dès lors, en vertu des égalités (48), (50), (53), (54) et (54 *bis*), l'égalité (52)

([1]) *Recherches sur l'Hydrodynamique*, IIe Partie, Chapitre I, § 2.

devient

$$(55)\quad \int \Bigg\{ \left[(\Pi_1 - \varpi)\cos(N, x) + p_{x1} + f(u_1 - u_2) + \text{€}\frac{u_1 - u_2}{|r'|}\right]\delta x_1$$
$$+ \left[(\Pi_1 - \varpi)\cos(N, y) + p_{y1} + f(v_1 - v_2) + \text{€}\frac{v_1 - v_2}{|r'|}\right]\delta y_1$$
$$+ \left[(\Pi_1 - \varpi)\cos(N, z) + p_{z1} + f(w_1 - w_2) + \text{€}\frac{w_1 - w_2}{|r'|}\right]\delta z_1$$
$$- \left[(\Pi_2 - \varpi)\cos(N, x) + p_{x2} + f(u_1 - u_2) + \text{€}\frac{u_1 - u_2}{|r'|}\right]\delta x_2$$
$$- \left[(\Pi_2 - \varpi)\cos(N, y) + p_{y2} + f(v_1 - v_2) + \text{€}\frac{v_1 - v_2}{|r'|}\right]\delta y_2$$
$$- \left[(\Pi_2 - \varpi)\cos(N, z) + p_{z2} + f(w_1 - w_2) + \text{€}\frac{w_1 - w_2}{|r'|}\right]\delta z_2 \Bigg\} dS = 0.$$

Les six quantités δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, δz_2 sont entièrement arbitraires; donc, en chaque point de la surface S, les coefficients qui, sous le signe $\int$, affectent ces six quantités, doivent être égaux à 0. On obtient ainsi six équations qui doivent être vérifiées en tout point de la surface S. Au lieu de transcrire simplement ces six équations, nous allons leur donner une forme symétrique.

Dans ce but, nous désignerons par n_1 la normale dirigée vers l'intérieur du fluide 1 et par n_2 la normale dirigée vers l'intérieur du fluide 2; n_2 coïncidera avec N et n_1 sera opposé à N; en outre, nous aurons [Ire Partie, égalités (48)]

$$(56)\quad \begin{cases} p_{x1} = -[\nu_{x1}\cos(n_1, x) + \tau_{z1}\cos(n_1, y) + \tau_{y1}\cos(n_1, z)], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ p_{x2} = -[\nu_{x2}\cos(n_2, x) + \tau_{z2}\cos(n_2, y) + \tau_{y2}\cos(n_2, z)], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Dès lors, nos six équations pourront s'écrire

$$(57)\quad \begin{cases} (\Pi_1 + \nu_{x1} - \varpi)\cos(n_1, x) + \tau_{z1}\cos(n_1, y) + \tau_{y1}\cos(n_1, z) = \left(f + \frac{\text{€}}{|r'|}\right)(u_1 - u_2), \\ \tau_{z1}\cos(n_1, x) + (\Pi_1 + \nu_{y1} - \varpi)\cos(n_1, y) + \tau_{x1}\cos(n_1, z) = \left(f + \frac{\text{€}}{|r'|}\right)(v_1 - v_2), \\ \tau_{y1}\cos(n_1, x) + \tau_{x1}\cos(n_1, y) + (\Pi_1 + \nu_{z1} - \varpi)\cos(n_1, z) = \left(f + \frac{\text{€}}{|r'|}\right)(w_1 - w_2), \\ (\Pi_2 + \nu_{x2} - \varpi)\cos(n_2, x) + \tau_{z2}\cos(n_2, y) + \tau_{y2}\cos(n_2, z) = \left(f + \frac{\text{€}}{|r'|}\right)(u_2 - u_1), \\ \tau_{z2}\cos(n_2, x) + (\Pi_2 + \nu_{y2} - \varpi)\cos(n_2, y) + \tau_{x2}\cos(n_2, z) = \left(f + \frac{\text{€}}{|r'|}\right)(v_2 - v_1), \\ \tau_{y2}\cos(n_2, x) + \tau_{x2}\cos(n_2, y) + (\Pi_2 + \nu_{z2} - \varpi)\cos(n_2, z) = \left(f + \frac{\text{€}}{|r'|}\right)(w_2 - w_1). \end{cases}$$

A ces égalités il faut joindre la condition (40) qui peut s'écrire indifféremment sous l'une des deux formes

$$(40\ bis)\quad \begin{cases} (u_1-u_2)\cos(n_1,x)+(v_1-v_2)\cos(n_1,y)+(w_1-w_2)\cos(n_1,z)=0, \\ (u_2-u_1)\cos(n_2,x)+(v_2-v_1)\cos(n_2,y)+(w_2-w_1)\cos(n_2,z)=0. \end{cases}$$

De ces égalités tirons quelques conséquences.

Si nous remarquons que

$$\cos(n_1,x)+\cos(n_2,x)=0,$$
$$\cos(n_1,y)+\cos(n_2,y)=0,$$
$$\cos(n_1,z)+\cos(n_2,z)=0$$

et si nous tenons compte des égalités (56), nous voyons que les égalités (57) donnent

$$(58)\quad \begin{cases} p_{x1}+p_{x2}=(\Pi_1-\Pi_2)\cos(n_1,x), \\ p_{y1}+p_{y2}=(\Pi_1-\Pi_2)\cos(n_1,y), \\ p_{z1}+p_{z2}=(\Pi_1-\Pi_2)\cos(n_1,z). \end{cases}$$

Le vecteur p_1, dont les composantes sont p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}, et le vecteur p_2, dont les composantes sont p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}, ont une résultante dirigée suivant la normale n_1 et ayant pour grandeur $(\Pi_1-\Pi_2)$; *le plan de ces deux vecteurs est donc normal à la surface* S.

Ce plan est facile à déterminer.

Multiplions respectivement les trois premières égalités (57) par $\cos(s,x)$, $\cos(s,y)$, $\cos(s,z)$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus; observons que l'on a

$$\cos(n_1,x)\cos(s,x)+\cos(n_1,y)\cos(s,y)+\cos(n_1,z)\cos(s,z)=0$$

et

$$(u_1-u_2)\cos(s,x)+(v_1-v_2)\cos(s,y)+(w_1-w_2)\cos(s,z)=0.$$

Nous trouvons la première égalité

$$(59)\quad \begin{cases} p_{x1}\cos(s,x)+p_{y1}\cos(s,y)+p_{z1}\cos(s,z)=0, \\ p_{x2}\cos(s,x)+p_{y2}\cos(s,y)+p_{z2}\cos(s,z)=0. \end{cases}$$

La seconde se démontre d'une manière analogue.

Le plan des deux vecteurs p_1, p_2 est le plan normal à la surface S, *mené par la vitesse relative v' dont (u_1-u_2), (v_1-v_2), (w_1-w_2) sont les composantes.*

premières égalités (57) par $\cos(r, x)$,
membre en observant que

$$\ldots y) + \cos(n_1, z)\cos(r, z) = 0,$$
$$\ldots y) + (w_1 - w_2)\cos(r, z) = r'.$$

$$\ldots p_{z1}\cos(r, z) = -\mathfrak{G}(r', \varpi)\frac{r'}{|r'|} - fr',$$

$$\ldots p_{z1}\cos(r, z) = \quad \mathfrak{G}(r', \varpi)\frac{r'}{|r'|} + fr'.$$

même.

en premier lieu, que *les vecteurs* p_1, p_2 *ont, sur* ... *gales et directement opposées.*

compte des inégalités (46) et (53), on voit que *la pro-* ... *vecteur* p_1 *est dirigée comme la vitesse relative* r', ... *vecteur* p_2 *est dirigée en sens contraire.*

... dans l'expression de $\mathfrak{G}$, est facile à déterminer. Mul- ... égalités (57) par $\cos(n_1, x)$, la seconde par $\cos(n_1, y)$, ... et ajoutons membre à membre les résultats obtenus ... la première condition (40 *bis*); nous trouvons la première

$$\Pi \quad \ldots\cos(n_1, x) - p_{y1}\cos(n_1, y) - p_{z1}\cos(n_1, z),$$
$$\Pi \quad \ldots\cos(n_2, x) - p_{y2}\cos(n_2, y) - p_{z2}\cos(n_2, z).$$

... démontre de même.

... *tient en retranchant de la pression* Π_1 *la projection du* ... *normale* n_1; *ou bien en retranchant de la pression* Π_2 *la* ... p_2 *sur la normale* n_2.

$$\ldots \quad p_{x1}\cos(n_1, x) + p_{y1}\cos(n_1, y) + p_{z1}\cos(n_1, z)$$

... du vecteur p_1 sur la normale n_1 et

$$\ldots \quad p_{x2}\cos(n_2, x) + p_{y2}\cos(n_2, y) + p_{z2}\cos(n_2, z)$$

... du vecteur p_2 sur la normale n_2. Les égalités (61) deviendront

$$\Pi_1 - \varpi = p_{n1}, \qquad \Pi_2 - \varpi = p_{n2}$$

et les égalités (57) pourront s'écrire :

$$(57\ bis)\quad \begin{cases} p_{n1}\cos(n_1, x) - p_{x1} = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(u_1 - u_2), \\ p_{n1}\cos(n_1, y) - p_{y1} = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(v_1 - v_2), \\ p_{n1}\cos(n_1, z) - p_{z1} = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(w_1 - w_2), \\ p_{n2}\cos(n_2, x) - p_{x2} = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(u_2 - u_1), \\ p_{n2}\cos(n_2, y) - p_{y2} = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(v_2 - v_1), \\ p_{n2}\cos(n_2, z) - p_{z2} = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(w_2 - w_1). \end{cases}$$

Les auxiliaires Π_1, Π_2, ϖ sont éliminées des conditions aux limites mises sous cette forme.

Tous ces théorèmes n'ont de sens qu'autant que la vitesse relative r' est différente de o. Or il peut arriver que cette supposition implique contradiction ; nous allons en donner un exemple.

La fonction $\mathfrak{G}(\rho_1, \rho_2, T, r', \varpi)$, qui est toujours négative, selon l'inégalité (53), peut dépendre de r' ; supposons, ce qui paraît conforme à tous les enseignements de l'expérience, qu'elle soit indépendante de r', ou bien que sa valeur absolue croisse en même temps que la valeur absolue de r' ; si nous posons

$$\mathfrak{G}(\rho_1, \rho_2, T, 0, \varpi) = \Gamma(\rho', \rho_2, T, \varpi),$$

nous aurons

$$(62)\qquad \mathfrak{G}(\rho_1, \rho_2, T, r', \varpi) \leqq \Gamma(\rho_1, \rho_2, T, \varpi).$$

En vertu des inégalités (46 *bis*) et (53), le second membre de chacune des égalités (60) a une valeur absolue qui ne peut être inférieure à $-\Gamma(\rho_1, \rho_2, T, \varpi)$. Dès lors, les égalités (60) nous donnent la proposition suivante :

Si la valeur absolue commune des projections des deux vecteurs p_1, p_2 sur la surface S *est inférieure à* $-\Gamma(\rho_1, \rho_2, T, \varpi)$, *la vitesse relative r' des deux fluides le long de la surface* S *ne peut différer de* o ; *les deux fluides sont alors soudés le long de cette surface.*

On est assuré, en particulier, que les deux fluides demeurent sans cesse soudés l'un à l'autre le long de leur surface de contact lorsqu'on suppose nulle la viscosité intrinsèque de chacun d'eux sans supposer nul le frottement au contact.

Dans ce cas, en effet, les deux vecteurs p_1, p_2 sont identiquement nuls; leurs projections sur la surface S sont donc inférieures à $-\Gamma(\rho_1, \rho_2, T, \varpi)$.

Il en est encore de même si l'on suppose nul le frottement, mais non la viscosité, au contact des deux fluides sans viscosité intrinsèque :

$$\mathfrak{G} = 0, \qquad f < 0.$$

Dans ce cas, en effet, si les deux fluides n'étaient pas soudés l'un à l'autre, on pourrait écrire les égalités (57) réduites à

$$(63)\quad \begin{cases} (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, x) = f(u_1 - u_2), & (\Pi_2 - \varpi)\cos(n_2, x) = f(u_2 - u_1), \\ (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, y) = f(v_1 - v_2), & (\Pi_2 - \varpi)\cos(n_2, y) = f(v_2 - v_1), \\ (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, z) = f(w_1 - w_2), & (\Pi_2 - \varpi)\cos(n_2, z) = f(w_2 - w_1). \end{cases}$$

Multiplions respectivement les trois premières égalités (67) par $\cos(r, x)$, $\cos(r, y)$, $\cos(r, z)$, et ajoutons-les membre à membre; nous trouvons

$$fr' = 0 \qquad \text{ou} \qquad r' = 0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Donc, *deux fluides sans viscosité intrinsèque sont forcément soudés l'un à l'autre le long de la surface de contact, à moins que la viscosité de contact et le frottement de contact ne soient nuls tous deux.*

Supposons maintenant que l'un des deux fluides, le fluide 1, soit dénué de viscosité intérieure, tandis que le fluide 2 est visqueux. Le vecteur p_1 sera encore nul, tandis que le vecteur p_2 sera, en général, différent de o.

En répétant les raisonnements précédents, nous démontrerons encore les propositions suivantes :

Si deux fluides, dont l'un n'a aucune viscosité intérieure, sont en contact, ils sont soudés le long de la surface de contact, à moins que la viscosité de contact et le frottement de contact ne soient nuls tous deux.

Comment faut-il modifier les conditions aux limites dans le cas où le glissement des deux fluides l'un sur l'autre est une impossibilité?

En tout point de la surface d'adhérence des deux fluides, nous devons écrire $r' = 0$, ce qui, joint aux égalités (40 *bis*), équivaut à

$$(64)\qquad u_2 - u_1 = 0, \qquad v_2 - v_1 = 0, \qquad w_2 - w_1 = 0.$$

Si nous ne regardions pas l'adhérence des deux fluides comme constituant une

nouvelle liaison qui entraîne, en même temps que les égalités (64), les conditions

$$(65) \qquad \delta x_2 - \delta x_1 = 0, \qquad \delta y_2 - \delta y_1 = 0, \qquad \delta z_2 - \delta z_1 = 0,$$

nous devrions faire simplement

$$(66) \qquad f = 0, \qquad \Phi = 0,$$

sans apporter dans nos équations aucune autre modification.

Suivons les conséquences de cette manière de voir.

Si on l'adopte, on doit encore écrire les équations (57), mais à la condition de remplacer par o tous les seconds membres, ce qui donnera

$$(67) \qquad \begin{cases} (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, x) = p_{x1}, & (\Pi_2 - \varpi)\cos(n_2, x) = p_{x2}, \\ (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, y) = p_{y1}, & (\Pi_2 - \varpi)\cos(n_2, y) = p_{y2}, \\ (\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, z) = p_{z1}, & (\Pi_2 - \varpi)\cos(n_2, z) = p_{z2}. \end{cases}$$

Soit d une direction quelconque tangente à la surface S; multiplions respectivement les trois premières équations (67) par $\cos(d, x)$, $\cos(d, y)$, $\cos(d, z)$, et ajoutons-les membre à membre en observant que

$$\cos(n_1, x)\cos(d, x) + \cos(n_1, y)\cos(d, y) + \cos(n_1, z)\cos(d, z) = 0;$$

nous trouvons la première des égalités

$$(68) \qquad \begin{cases} p_{x1}\cos(d, x) + p_{y1}\cos(d, y) + p_{z1}\cos(d, z) = 0, \\ p_{x2}\cos(d, x) + p_{y2}\cos(d, y) + p_{z2}\cos(d, z) = 0. \end{cases}$$

La seconde se démontre d'une manière analogue.

Ces deux égalités entraînent la conséquence suivante :

Lorsque deux fluides sont soudés l'un à l'autre le long de la surface S, *les deux vecteurs* p_1, p_2 *sont normaux en chaque point à la surface* S.

Soit p_1 la valeur du premier vecteur, comptée positivement suivant la normale n_1; soit p_2 la valeur du second vecteur, comptée positivement selon la normale n_2; nous aurons

$$p_{x1}\cos(n_1, x) + p_{y1}\cos(n_1, y) + p_{z1}\cos(n_1, z) = p_1,$$

$$p_{x2}\cos(n_2, x) + p_{y2}\cos(n_2, y) + p_{z2}\cos(n_2, z) = p_2.$$

Ces égalités, jointes aux égalités (61), nous montrent que *lorsque les deux fluides sont soudés l'un à l'autre le long de la surface* S, *on a les deux éga-*

lités

(69) $$\Pi_1 - \varpi = p, \qquad \Pi_2 - \varpi = p_2,$$

d'où l'on tire la troisième égalité

(70) $$\Pi_1 - \Pi_2 = p_1 - p_2.$$

Supposons maintenant, à l'imitation de ce qui a été dit au Chapitre I, § 2, qu'au lieu d'admettre, tout le long de la surface d'adhérence, les égalités (64) sans admettre les conditions (65), nous regardions cette adhérence comme constituant une nouvelle liaison qui impose aux modifications virtuelles, en tout point de la surface d'adhérence, les conditions (65). Nous devrons encore poser, dans nos formules,

(66) $$f = 0, \qquad \mathfrak{G} = 0.$$

Dès lors, l'égalité (51) devra avoir lieu, non plus pour toutes les modifications virtuelles qui respectent la condition (38), mais seulement pour toutes les modifications virtuelles qui respectent les trois conditions (65). Il devra exister trois fonctions ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z, variables d'une manière continue le long de la surface de contact, telles que l'égalité

(52 *bis*) $$\begin{aligned} & d\mathcal{C}_{e1} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_1 + d\mathcal{C}_{i1} + d\mathcal{C}_{v1} + d\mathcal{C}_{\varphi 1} \\ & + d\mathcal{C}_{e2} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_2 + d\mathcal{C}_{i2} + d\mathcal{C}_{v2} + d\mathcal{C}_{\varphi 2} \\ & - \int [\varpi_x(\delta x_1 - \delta x_2) + \varpi_y(\delta y_1 - \delta y_2) + \varpi_z(\delta z_1 - \delta z_2)]\, d\mathrm{S} = 0 \end{aligned}$$

ait lieu quelle que soit la modification virtuelle imposée aux corps 1 et 2.

Nous n'avons pas fait figurer dans cette égalité les quantités $d\mathcal{C}_w$ et $d\mathcal{C}_\psi$, qui sont nulles en vertu des égalités (66).

La substitution de l'égalité (52 *bis*) à l'égalité (52) transforme l'égalité (55) en

(55 *bis*) $$\begin{aligned} \int \Big\{ & [\Pi_1 \cos(\mathrm{N}, x) - \varpi_x + p_{x1}]\,\delta x_1 + [\Pi_1 \cos(\mathrm{N}, y) - \varpi_y + p_{y1}]\,\delta y_1 \\ & + [\Pi_1 \cos(\mathrm{N}, z) - \varpi_z + p_{z1}]\,\delta z_1 \\ & - [\Pi_2 \cos(\mathrm{N}, x) - \varpi_x + p_{x2}]\,\delta x_2 - [\Pi_2 \cos(\mathrm{N}, y) - \varpi_y + p_{y2}]\,\delta y_2 \\ & - [\Pi_2 \cos(\mathrm{N}, z) - \varpi_z + p_{z2}]\,\delta z_2 \Big\}\, d\mathrm{S} = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité entraîne, en tout point de la surface d'adhérence, les égalités

(71) $$\left\{ \begin{array}{ll} \Pi_1 \cos(n_1, x) + \varpi_x = p_{x1}, & \Pi_2 \cos(n_2, x) - \varpi_x = p_{x2}, \\ \Pi_1 \cos(n_1, y) + \varpi_y = p_{y1}, & \Pi_2 \cos(n_2, y) - \varpi_y = p_{y2}, \\ \Pi_1 \cos(n_1, z) + \varpi_z = p_{z1}, & \Pi_2 \cos(n_2, z) - \varpi_z = p_{z2}. \end{array} \right.$$

Ces égalités (71) ont encore pour conséquence les relations (58) et le théorème qui les traduit.

On voit en outre que si l'on désigne par t une direction quelconque tangente à la surface d'adhérence, on tire des égalités (71) les égalités

$$(72)\qquad \begin{aligned} & p_{x1}\cos(t,x)+p_{y1}\cos(t,y)+p_{z1}\cos(t,z)\\ = & -p_{x2}\cos(t,x)-p_{y2}\cos(t,y)-p_{z2}\cos(t,z)\\ = & \ \varpi_x\cos(t,x)+\varpi_y\cos(t,y)+\varpi_z\cos(t,z). \end{aligned}$$

Le vecteur (p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}) *et le vecteur* (p_{x2}, p_{y2}, p_{z2}) *ont encore, sur la surface de contact des deux fluides, des projections égales et directement opposées.*

§ 3. — Conditions vérifiées a la surface de contact d'un solide et d'un fluide.

Nous imaginerons maintenant que le corps 1 continue à être un fluide, mais que le corps 2 soit un solide invariable et isotrope.

Le déplacement virtuel le plus général de ce solide consistera en trois rotations $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ autour des axes Ox, Oy, Oz, et en trois translations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ suivant ces trois axes. Les composantes δx_2, δy_2, δz_2 du déplacement virtuel le plus général d'un point x_2, y_2, z_2 de ce solide seront

$$(73)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta x_2 &= \delta\xi - z_2\,\delta\mu + y_2\,\delta\nu,\\ \delta y_2 &= \delta\eta - x_2\,\delta\nu + z_2\,\delta\lambda,\\ \delta z_2 &= \delta\zeta - y_2\,\delta\lambda + x_2\,\delta\mu. \end{aligned}\right.$$

Les composantes de la vitesse du même point seront

$$(74)\qquad \left\{\begin{aligned} u_2 &= \xi' - z_2\,\mu' + y_2\,\nu',\\ v_2 &= \eta' - x_2\,\nu' + z_2\,\lambda',\\ w_2 &= \zeta' - y_2\,\lambda' + x_2\,\mu'. \end{aligned}\right.$$

Par des calculs connus, on mettra $d\mathfrak{T}_{e2}$ et $d\mathfrak{T}_{i2}$ sous les formes

$$(75)\qquad d\mathfrak{T}_{e2} = \mathrm{X}\,\delta\xi + \mathrm{Y}\,\delta\eta + \mathrm{Z}\,\delta\zeta + \mathrm{L}\,\delta\lambda + \mathrm{M}\,\delta\mu + \mathrm{N}\,\delta\nu,$$

$$(76)\qquad d\mathfrak{T}_{i2} = \mathrm{J}_x\,\delta\xi + \mathrm{J}_y\,\delta\eta + \mathrm{J}_z\,\delta\zeta + \mathrm{J}_l\,\delta\lambda + \mathrm{J}_m\,\delta\mu + \mathrm{J}_n\,\delta\nu,$$

tandis que, le corps considéré étant un solide invariable, l'on aura

$$(77)\qquad \delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}_2 = 0, \qquad d\mathfrak{T}_{v2} = 0, \qquad d\mathfrak{T}_{\varphi 2} = 0.$$

Ces valeurs (75), (76), (77) devront être reportées dans l'égalité (52).

En raisonnant comme nous l'avons fait au paragraphe précédent pour obtenir l'égalité (54), nous trouverons que l'on a, en une modification quelconque du fluide,

$$(78)\quad d\mathfrak{T}_{e1} - \mathrm{E}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathfrak{F}_1 + d\mathfrak{T}_{i1} + d\mathfrak{T}_{c1} = -\int \Big\{ [\Pi_1 \cos(n_1, x) - p_{x1}]\,\delta x_1 + [\Pi_1 \cos(n_1, y) - p_{y1}]\,\delta y_1 + [\Pi_1 \cos(n_1, z) - p_{z1}]\,\delta z_1 \Big\}\, d\mathrm{S},$$

S étant la surface de contact du solide et du fluide et n_1 étant, en chaque point de cette surface, la demi-normale dirigée vers l'intérieur du fluide.

En vertu des égalités (73), (75), (76), (77), (78), (48), (50) et (53), l'égalité (52) pourra s'écrire

$$\begin{aligned}
&\int \Big\{ \Big[(\varpi - \Pi_1) \cos(n_1, x) - p_{x1} - f(u_1 - u_2) + \mathfrak{E}\frac{u_1 - u_2}{r} \Big] \delta x_1 \\
&- \Big[(\varpi - \Pi_1) \cos(n_1, y) - p_{y1} - f(v_1 - v_2) + \mathfrak{E}\frac{v_1 - v_2}{r} \Big] \delta y_1 \\
&- \Big[(\varpi - \Pi_1) \cos(n_1, z) - p_{z1} - f(w_1 - w_2) + \mathfrak{E}\frac{w_1 - w_2}{r} \Big] \delta z_1 \Big\} d\mathrm{S} \\
&- \Big\{ \mathrm{X} - \mathrm{J}_x - \int \Big[f(u_2 - u_1) - \mathfrak{E}\frac{u_2 - u_1}{r} - \varpi \cos(n_1, x) \Big] d\mathrm{S} \Big\} \delta\xi \\
&- \Big\{ \mathrm{Y} - \mathrm{J}_y - \int \Big[f(v_2 - v_1) - \mathfrak{E}\frac{v_2 - v_1}{r} - \varpi \cos(n_1, y) \Big] d\mathrm{S} \Big\} \delta\eta \\
&- \Big\{ \mathrm{Z} - \mathrm{J}_z - \int \Big[f(w_2 - w_1) - \mathfrak{E}\frac{w_2 - w_1}{r} - \varpi \cos(n_1, z) \Big] d\mathrm{S} \Big\} \delta\zeta \\
&- \Big\{ \mathrm{L} - \mathrm{J}_\lambda - \int \Big\{ \Big(f - \frac{\mathfrak{E}}{r}\Big)[(u_2 - u_1) y_2 - (v_2 - v_1) z_2] - \varpi[y_2 \cos(n_1, z) - z_2 \cos(n_1, y)] \Big\} d\mathrm{S} \Big\} \delta\lambda \\
&- \Big\{ \mathrm{M} - \mathrm{J}_\mu - \int \Big\{ \Big(f - \frac{\mathfrak{E}}{r}\Big)[(u_2 - u_1) z_2 - (w_2 - w_1) x_2] - \varpi[z_2 \cos(n_1, x) - x_2 \cos(n_1, z)] \Big\} d\mathrm{S} \Big\} \delta\mu \\
&- \Big\{ \mathrm{N} - \mathrm{J}_\nu - \int \Big\{ \Big(f - \frac{\mathfrak{E}}{r}\Big)[(v_2 - v_1) x_2 - (u_2 - u_1) y_2] - \varpi[x_2 \cos(n_1, y) - y_2 \cos(n_1, x)] \Big\} d\mathrm{S} \Big\} \delta\nu = 0
\end{aligned}$$

Cette égalité doit avoir lieu quels que soient $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ et, en outre, quels que soient, aux divers points de la surface S, δx_1, δy_1, δz_1. On a donc

1° En tout point de la surface S, les trois égalités

$$(80)\quad \left\{\begin{aligned} &(\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, x) - p_{x1} = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(u_1 - u_2),\\ &(\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, y) - p_{y1} = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(v_1 - v_2),\\ &(\Pi_1 - \varpi)\cos(n_1, z) - p_{z1} = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)(w_1 - w_2),\end{aligned}\right.$$

identiques aux trois premières égalités (57);

2° Les six égalités

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned} &X + J_x + \int\left[f(u_2 - u_1) + \frac{\mathfrak{G}(u_2 - u_1)}{|r'|} - \varpi\cos(n_1, x)\right]dS = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &L + J_l - \int\left\{\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)[(w_2 - w_1)y_2 - (v_2 - v_1)z_2] - \varpi[y_2\cos(n_1, z) - z_2\cos(n_1, y)]\right\}dS = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

qui peuvent encore s'écrire, en vertu des égalités (80),

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} &X + J_x - \int[\Pi_1\cos(n_1, x) - p_{x1}]\,dS = 0,\\ &Y + J_y - \int[\Pi_1\cos(n_1, y) - p_{y1}]\,dS = 0,\\ &Z + J_z - \int[\Pi_1\cos(n_1, z) - p_{z1}]\,dS = 0,\\ &L + J_l + \int\{\Pi_1[y_2\cos(n_1, z) - z_2\cos(n_1, y)] - (y_2 p_{z1} - z_2 p_{y1})\}\,dS = 0,\\ &M + J_m + \int\{\Pi_1[z_2\cos(n_1, x) - x_2\cos(n_1, z)] - (z_2 p_{x1} - x_2 p_{z1})\}\,dS = 0,\\ &N + J_n + \int\{\Pi_1[x_2\cos(n_1, y) - y_2\cos(n_1, x)] - (x_2 p_{y1} - y_2 p_{x1})\}\,dS = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces dernières équations feraient connaître le mouvement du corps solide si l'on connaissait Π_1, p_{x1}, p_{y1}, p_{z1}.

Les équations (80) peuvent être traitées comme les trois premières équations (57); elles nous enseignent que *l'on a, en tout point de la surface* S,

$$(83)\qquad \varpi = \Pi_1 - p_{x1}\cos(n_1, x) - p_{y1}\cos(n_1, y) - p_{z1}\cos(n_1, z).$$

Elles nous montrent, en outre, que *la projection du vecteur p_1 sur la surface* S *coïncide avec la direction r de la vitesse relative r'. Cette projection*

donnée par l'égalité

$$(84)\qquad p_{x1}\cos(r, x) + p_{y1}\cos(r, y) + p_{z1}\cos(r, z) = -\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right) r'.$$

Tout ce que nous venons de dire suppose que le solide et le fluide ne sont pas soudés le long de leur surface de contact.

Dans le cas où ils seraient soudés en une région de leur surface de contact *et où cette soudure ne serait pas regardée comme une liaison nouvelle* (¹), on aurait, en tout point de cette région,

$$u_1 - u_2 = 0, \qquad v_1 - v_2 = 0, \qquad w_1 - w_2 = 0, \qquad \mathfrak{G} = 0, \qquad f = 0.$$

On devrait donc, pour tout point de cette région, remplacer par o le second membre des égalités (80) et, dans les égalités (81), restreindre les intégrales aux parties de la surface de contact qui ne sont pas des soudures.

Les égalités (82) *resteront vraies, même si le solide et le fluide sont soudés tout le long de la surface de contact ou le long d'une partie de cette surface. Mais, en tout point de la surface* S *où les deux corps sont soudés l'un à l'autre, le vecteur* p_1 *est normal à la surface* S; *si l'on désigne par* p_1 *sa valeur comptée positivement dans le sens de la normale* n_1, *on a, en un tel point,*

$$(85)\qquad \varpi = \Pi_1 - p_1.$$

Ce que nous venons de dire cesse d'être exact *si l'on regarde la condition imposée au fluide d'adhérer au solide comme constituant une nouvelle liaison* (²). Dans ce cas, on doit avoir, en tout point de la surface d'adhérence, non seulement les égalités

$$(64)\qquad u_2 - u_1 = 0, \qquad v_2 - v_1 = 0, \qquad w_2 - w_1 = 0,$$

mais encore les conditions, imposées à tout déplacement virtuel,

$$(65)\qquad \delta x_2 - \delta x_1 = 0, \qquad \delta y_2 - \delta y_1 = 0, \qquad \delta z_2 - \delta z_1 = 0.$$

Dès lors, il ne suffit plus de poser, dans nos équations,

$$f = 0, \qquad \mathfrak{G} = 0.$$

(¹) *Sur les conditions aux limites en Hydrodynamique* (*Comptes rendus*, t. CXXXIV, p. 149; 20 janvier 1902).

(²) *Sur l'extension du théorème de Lagrange aux liquides visqueux* (*Comptes rendus*, t. CXXXIV, p. 580; 10 mars 1902).

Il faut encore remplacer l'égalité (52) par l'égalité (52 *bis*). L'égalité (79) est alors remplacée par l'égalité

$$(86)\quad \int \Big\{ [\varpi_x + \Pi_1 \cos(n_1, x) - p_{x1}]\,\delta x_1 + [\varpi_y - \Pi_1 \cos(n_1, y) + p_{y1}]\,\delta y_1 + [\varpi_z - \Pi_1 \cos(n_1, z) + p_{z1}]\,\delta z_1 \Big\} dS$$
$$- \left[X + J_x + \int \varpi_x \, dS\right] \delta\xi - \left[Y + J_y + \int \varpi_y \, dS\right] \delta\eta - \left[Z + J_y + \int \varpi_z \, dS\right] \delta\zeta$$
$$- \left[L + J_l + \int (\varpi_y z_2 - \varpi_z y_2)\, dS\right] \delta\lambda - \left[M + J_m + \int (\varpi_z x_2 - \varpi_x z_2)\, dS\right] \delta\mu$$
$$- \left[N + J_n + \int (\varpi_x y_2 - \varpi_y x_2)\, dS\right] \delta\nu = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu quels que soient $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ et, en outre, quels que soient δx_1, δy_1, δz_1 aux divers points de la surface S.

On a donc :

1° En tout point de la surface S, les trois égalités

$$(87)\quad \begin{cases} \Pi_1 \cos(n_1, x) + \varpi_x = p_{x1}, \\ \Pi_1 \cos(n_1, y) + \varpi_y = p_{y1}, \\ \Pi_1 \cos(n_1, z) + \varpi_z = p_{z1}, \end{cases}$$

identiques aux premières égalités (71);

2° Les égalités

$$(88)\quad \begin{cases} X + J_x + \int \varpi_x \, dS = 0, \qquad Y + J_y + \int \varpi_y \, dS = 0, \qquad Z + J_z + \int \varpi_z \, dS = 0, \\ L + J_l + \int (\varpi_y z_2 - \varpi_z y_2)\, dS = 0, \\ M + J_m + \int (\varpi_z x_2 - \varpi_x z_2)\, dS = 0, \\ N + J_n + \int (\varpi_x y_2 - \omega_y x_2)\, dS = 0. \end{cases}$$

Cette seconde manière de voir est celle que les considérations développées au Chapitre I, § 2, nous présentent comme vraisemblable. Nous verrons qu'elle s'impose.

LES GROUPES D'ORDRE 16p,

p ÉTANT UN NOMBRE PREMIER IMPAIR,

Par M. R. LE VAVASSEUR,

à Toulouse.

J'ai divisé la discussion en trois Parties. Dans la première Partie (A), je suppose que le groupe cherché admet un sous-groupe d'ordre p, conjugué de lui-même; I étant ce sous-groupe, G le groupe cherché, je prends pour $\frac{G}{\Gamma}$ successivement les 14 groupes connus d'ordre 16 (nos 2, 3, ..., 15). J'ai ainsi 25 groupes. Pour savoir s'ils sont distincts, j'énumère dans chacun d'eux le nombre d'opérations d'ordre donné (nos 16, 17, ..., 40).

Dans la deuxième Partie (B), j'arrive au cas où il n'y a pas dans le groupe cherché de sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même, mais où il y a un sous-groupe d'ordre 16, conjugué de lui-même (nos 41, 42, ..., 56).

Dans la troisième Partie (C), j'envisage le cas où le groupe cherché d'ordre 16 p n'admet ni sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même, ni sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même (nos 57, 58, ..., 67).

A la fin est un Tableau résumant les résultats obtenus.

1. Le groupe cherché a au moins un sous-groupe d'ordre p.

L'égalité

$$16p = pm(1 + hp) \quad (^1)$$

donne

$$16 = m(hp + 1).$$

Donc, pour $p > 7$, le groupe admet un sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même.

Pour $p = 7$, on peut supposer $h = 1$, $m = 2$.

Pour $p = 5$, » $h = 3$, $m = 1$.

Pour $p = 3$, » $h = 1$, $m = 4$ ou $h = 5$, $m = 1$.

---

(1) *Voir* § 21, p. 18 de mon Mémoire sur l'*Énumération des groupes d'opérations*, édité chez Hermann, 8, rue de la Sorbonne, ou chez Privat (Toulouse).

2. A). Nous supposerons d'abord que le groupe admet un sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même.

I. Ce sous-groupe Γ étant d'ordre p, $\frac{G}{\Gamma}$ est du type G_{16} (¹). On a

$$a^{16} = b^p = 1, \qquad ba = ab^\alpha \qquad \text{avec} \qquad \alpha^{16} \equiv 1 \qquad (\text{mod}\, p).$$

Si $\alpha = 1$, on a

$$G_{16p} = G_{16} G_p.$$

Si α appartient à l'exposant 2, le groupe sera désigné par G^1_{16p},
» 4, » G^2_{16p},
» 8, » G^3_{16p},
» 16, » G^4_{16p}.

3. II. $\frac{G}{\Gamma}$ est du type $G_8 G_2$:

$$(a'^8 = b'^2 = 1,\ a'b' = b'a').$$

On a

$$a^8 = b^2 = 1, \qquad ab = ba, \qquad c^p = 1,$$

puis

$$ca = ac^\alpha, \qquad \alpha^8 \equiv 1 \qquad (\text{mod}\, p),$$
$$cb = bc^\beta, \qquad \beta^2 \equiv 1 \qquad (\text{mod}\, p).$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne

$$G_8 G_2 G_p = G_{8p} G_2 = G_{2p} G_8.$$

(2). Soit $\beta = 1$, $\alpha \neq 1$.
Si α appartient à l'exposant 2 (mod p), on a $G^1_{8p} G_2$ }
» 4 » » $G^2_{8p} G_2$ } (²).
» 8 » » $G^3_{8p} G_2$ }
(3). Soit $\alpha = 1$, $\beta = -1$, on a $G^1_{2p} G_8$.
(4). Soit $\beta = -1$, $\alpha \neq 1$.
Si $\alpha = -1$, $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, $cab = ac^{-1}b = abc$.
On peut poser $ab = a'$.
On retrouvera $G^1_{2p} G_8$.
Si α appartient à l'exposant 4 (mod p) on a le groupe G^5_{16p} :

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^{-1}$$

[α appartient à l'exposant 4 (mod p)].

(¹) *Loc. cit.*, Chap. VI.
(²) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

Si α appartient à l'exposant 8 $(\bmod p)$, α^4 appartient à l'exposant 2 $(\bmod p)$:

$$ca^4 = a^4c^{-1}, \qquad cb = bc^{-1}, \qquad ca^4b = a^4bc.$$

Posons $a^4b = b'$, on retrouve $G^3_{8p}G_2$.

4. III. $\frac{G}{\Gamma}$ est du type $(G_4)^2$:

$$(a'^4 = b'^4 = 1, \; a'b' = b'a').$$

On a

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^\beta,$$

avec

$$\alpha^4 \equiv \beta^4 \equiv 1 \qquad (\bmod p).$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne

$$(G_4)^2G_p = G_{4p}G_4.$$

(2). $\alpha = 1$, $\beta \neq 1$ donne

$$G^1_{4p}G_4 \quad \text{et} \quad G^2_{4p}G_4 \quad (^1).$$

(3). $\alpha = -1$, $\beta \neq 1$.

Soit $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, alors $cab = abc$.

Posons $ab = b'$, on retrouve $G^1_{4p}G_4$.

Si β appartient à l'exposant 4 $(\bmod p)$

$$ca = ac^{-1}, \qquad cb^2 = b^2c^{-1};$$

donc

$$cab^2 = ab^2c.$$

Posons $ab^2 = a'$, on retrouve $G^2_{4p}G_4$.

(4). α et β appartiennent tous deux à l'exposant 4 $(\bmod p)$.

Alors α et β sont racines de la congruence $x^2 + 1 \equiv 0 \; (\bmod p)$.

Si l'on suppose $\alpha = \beta$, on a

$$ca^3 = a^3c^{\alpha^3}, \qquad cb = bc^\alpha, \qquad ca^3b = a^3c^{\alpha^3}b = a^3bc.$$

Posons $a^3b = b'$, on retrouve $G^2_{4p}G_4$.

Si α est différent de β, on a

$$\alpha\beta \equiv 1 \qquad (\bmod p),$$

$$ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^\beta, \qquad cab = ac^\alpha b = abc^{\alpha\beta} = abc.$$

On retrouve encore $G^2_{4p}G_4$.

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. V.

5. IV. $\frac{G}{\Gamma} = G_4(G_2)^2$:

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ab = ba, \quad ac = ca, \quad bc = cb,$$

$$da = ad^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^4 \equiv 1 \quad (\text{mod } p),$$
$$db = bd^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \quad (\text{mod } p),$$
$$dc = cd^\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma^2 \equiv 1 \quad (\text{mod } p).$$

(1). $\alpha = \beta = \gamma = 1$, on a

$$G_4(G_2)^2 G_p = G_{4p}(G_2)^2 = G_{2p} G_4 G_2.$$

(2). $\beta = \gamma = 1$, $\alpha \neq 1$, on a

$$G_{4p}^1(G_2)^2, \quad G_{4p}^2(G_2)^2.$$

(3). $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$ donne

$$G_{2p}^1 G_4 G_2.$$

(4). $\beta = \gamma = -1$, $db = bd^{-1}$, $dc = cd^{-1}$; donc

$$dbc = bcd.$$

On pourra donc toujours supposer $\beta = 1$.
(5). $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\alpha \neq 1$.
Si $\alpha = -1$, $da = ad^{-1}$, $dc = cd^{-1}$, $dac = acd$.
Posant $ac = a'$, on retrouve $G_{2p}^1 G_4 G_2$.
Si α appartient à l'exposant 4 (mod p), $a^2 c$ est permutable avec d.
On pourra prendre $a^2 c = c'$ à la place de c comme opération génératrice.
On trouve $G_{4p}^2(G_2)^2$.

6. V. $\frac{G}{\Gamma} = (G_2)^4$:

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^p = 1,$$

$$ab = ba, \quad ac = ca, \quad ad = da,$$
$$bc = cb, \quad bd = db, \quad cd = dc,$$

$$ea = ae^\alpha, \quad eb = be^\beta, \quad ec = ce^\gamma, \quad ed = de^\delta, \quad \alpha^2 \equiv \beta^2 \equiv \gamma^2 \equiv \delta^2 \equiv 1 \quad (\text{mod } p).$$

En transformant e par toutes les opérations du groupe d'ordre 16, on trouve, comme exposants de l'opération transformée :

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \delta, \ \alpha\beta, \ \alpha\gamma, \ \alpha\delta, \ \beta\gamma, \ \beta\delta, \ \gamma\delta, \ \beta\gamma\delta, \ \gamma\delta\alpha, \ \delta\alpha\beta, \ \alpha\beta\gamma, \ \alpha\beta\gamma\delta.$$

Si $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$, tous ces exposants sont égaux à 1.
Si $\delta = -1$, $\alpha = \beta = \gamma = 1$, on trouve

$$1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, -1.$$

Si $\gamma = \delta = -1$, $\alpha = \beta = 1$, on trouve

$$1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1.$$

Si $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = -1$, on trouve

$$1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1.$$

Si $\alpha = \beta = \gamma = \delta = -1$, on trouve

$$-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1.$$

On n'obtient donc que les deux groupes suivants :

$$(G_2)^4 G_p = G_{2p}(G_2)^3 \qquad \text{et} \qquad G_{2p}^1 (G_2)^3.$$

7. VI. $\frac{G}{\Gamma} = G_8^1 G_2$ (1). On a

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb,$$

$$da = ad^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^4 \equiv 1 \quad (\text{mod}\, p),$$
$$db = bd^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \quad (\text{mod}\, p),$$
$$dc = cd^\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma^2 \equiv 1 \quad (\text{mod}\, p);$$

mais

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \qquad dba^3 = ba^3 d^{\alpha^3\beta}.$$

Donc, puisque $ab = ba^3$, on a

$$\alpha^2 \equiv 1 \qquad (\text{mod}\, p).$$

(1). $\alpha = \beta = \gamma = 1$ donne $G_8^1 G_2 G_p = G_8^1 G_{2p}$ (1).
(2). $\alpha = -1$, $\beta = \gamma = 1$ donne $G_{8p}^1 G_2$ (2).
(3). $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$ donne $G_{8p}^5 G_2$ (2).
(4). $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$ donne $G_8^1 G_{2p}^1$.

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. IV.
(2) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

(5). $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = -1$, $dbc = bcd$. Posons $bc = b'$; on trouve

$$a^4 = b'^2 = c^2 = 1, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb',$$
$$da = ad, \quad db' = b'd, \quad dc = cd^{-1}.$$

On retombe sur $G_8^1 G_{2p}^1$.

(6). $\beta = 1$, $\gamma = \alpha = -1$; $dac = acd$. Posons $ac = a'$; il vient

$$a'^4 = b^2 = c^2 = d^4 = 1, \quad a'b = ba'^3, \quad a'c = ca', \quad bc = cb,$$
$$da' = a'd, \quad db = bd, \quad dc = cd^{-1}.$$

On retrouve $G_8^1 G_{2p}^1$.

(7). $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = -1$, $dab = abd$. Posons $ab = b'$; on a

$$a^4 = b'^2 = c^2 = d^4 = 1, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb',$$
$$da = ad^{-1}, \quad db' = b'd, \quad dc = cd.$$

On retrouve $G_{8p}^4 G_2$ [*voir* (2), même numéro].

(8). $\alpha = \beta = \gamma = -1$. Posons $ab = b'$; on a

$$a^4 = b'^2 = c^2 = d^4 = 1, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb',$$
$$da = ad^{-1}, \quad db' = b'd, \quad dc = cd^{-1}.$$

On retrouve $G_8^1 G_{2p}^1$ [*voir* (6)].

8. VII. $\frac{G}{\Gamma} = G_8^2 G_2$:

$$a^4 = b^4 = c^2 = d^p = 1, \quad a^2 = b^2, \quad ab = ba^3, \quad ac = ca, \quad bc = cb,$$
$$da = ad^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^4 \equiv 1 \pmod{p},$$
$$db = bd^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^4 \equiv 1 \pmod{p},$$
$$dc = cd^\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

mais

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \quad dba^3 = ba^3 = d^{\alpha^3\beta}.$$

Comme $ab = ba^3$, on a

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

a^2 est permutable avec d, donc aussi $b^2 = a^2$; et par suite on a

$$\beta^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

On peut toujours supposer $\alpha = 1$, car si l'on a $\alpha = -1$, $\beta = 1$, on peut permuter a et b (on a $ba = ab^3$).

Si $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $dab = abd$; on peut poser $ab = a'$, car $a'b = ba'^3$.

(1). $\alpha = \beta = \gamma = 1$ donne $G_8^2 G_2 G_p = G_8^2 G_{2p}$.

(2). $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = -1$ donne $G_{8p}^6 G_2$ (¹).

(3). $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$ donne $G_8^2 G_{2p}^1$.

(4). $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = -1$, $dbc = bcd$.

Posons $bc = b'$; on a

$$a^4 = b'^4 = c^2 = d^p = 1, \quad a^2 = b'^2, \quad ab' = b'a^3, \quad ac = ca, \quad b'c = cb',$$
$$ad = da, \quad db' = b'd, \quad dc = cd^{-1}.$$

On retrouve $G_8^2 G_{2p}^1$.

9. VIII. $\dfrac{G}{\Gamma} = G_{16}^1$:

$$a^8 = b^2 = 1, \quad ab = ba^5 \quad (^2).$$

On a

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^5;$$

puis

$$ca = ac^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \quad (\text{mod}\, p),$$
$$cb = bc^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \quad (\text{mod}\, p).$$

Mais, d'une part

$$cab = abc^{\alpha\beta},$$

d'autre part

$$cba^5 = ba^5 c^{\alpha^5\beta},$$

d'où l'on déduit

$$\alpha^4 \equiv 1 \quad (\text{mod}\, p).$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G_{16}^1 G_p$.

(2). $\beta = 1$, $\alpha \not\equiv 1$, on a

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^5, \quad ca = ac^\alpha, \quad cb = bc.$$

Si α appartient à l'exposant 2 (mod p), on aura le groupe G_{16p}^6.

» 4 » G_{16p}^7.

(3). $\alpha = +1$, $\beta = -1$.

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^5, \quad ca = ac, \quad cb = bc^{-1}$$

définissent G_{16p}^8.

(4). $\beta = -1$, $\alpha \not\equiv 1$.

(¹) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

(²) *Loc. cit.*, Chap. VI.

Si $\alpha = -1$, on a

$$ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc^{-1} \qquad \text{donc} \qquad cab = abc.$$

On pourra poser $ab = a'$; alors, comme $ab = ba^{5}$, $a'^{2} = a^{6}$, $a'^{8} = 1$,

$$a'b = ab^{2} = ba^{5}b, \qquad a'^{4} = a^{4}, \qquad a'^{5} = a^{5}b \qquad \text{donc} \qquad a'b = ba'^{5}.$$

On retrouve G^{8}_{16p}.

Les formules

$$a^{8} = b^{2} = c^{p} = 1, \qquad ab = ba^{5}, \qquad ca = ac^{\alpha}, \qquad cb = bc^{-1},$$

où α appartient à l'exposant 4 (mod p), définissent G^{9}_{16p}.

Je rappelle, pour la clarté de ce qui précède, le Tableau suivant des opérations de G^{5}_{16} (¹).

8	a	$a\alpha$		ab		$ab\alpha$
4	α	α^{3}		α^{3}	$b\alpha$	α
2	α^{2}	α^{2}	b	α^{2}	α^{2}	α^{2}

10. IX. $\dfrac{G}{\Gamma} = G^{4}_{16}$:

$$a^{2} = b^{2} = c^{4} = 1, \qquad ab = bac^{2}, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb,$$

4			α	$a\alpha$	$b\alpha$	ab	
2	a	b	α^{2}	α^{2}	α^{2}	α^{2}	$ab\alpha$

$(c = \alpha)$ (²)

On a :

$$a^{2} = b^{2} = c^{4} = d^{p} = 1, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb, \qquad ab = bac^{2},$$

$$da = ad^{\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha^{2} \equiv 1 \pmod{p}$$
$$db = bd^{\beta} \quad \text{avec} \quad \beta^{2} \equiv 1 \pmod{p}$$
$$dc = cd^{\gamma} \quad \text{avec} \quad \gamma^{4} \equiv 1 \pmod{p}$$

Mais

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \qquad dbac^{2} = bac^{2}d^{\alpha\beta\gamma^{2}} \qquad \text{donc} \qquad \gamma = \pm 1.$$

(1). $\alpha = \beta = \gamma = 1$ donne $G^{4}_{16}\, G_{p}$.

(¹) *Loc. cit.*, Chap. VI.

(²) *Loc. cit.*, Chap. VI.

(2). $\alpha=\beta=1, \gamma=-1$ donne G_{16p}^{10} :

$$a^2=b^2=c^4=d^p=1, \quad ac=ca, \quad bc=cb, \quad ab=bac^2,$$
$$da=ad, \quad db=bd, \quad dc=cd^{-1}.$$

(3). $\alpha=1, \ \beta=-1, \gamma=1$ donne G_{16p}^{11} :

$$a^2=b^2=c^4=d^p=1, \quad ac=ca, \quad bc=cb, \quad ab=bac^2,$$
$$da=ad, \quad db=bd^{-1}, \quad dc=cd.$$

(4). $\alpha=-1, \ \beta=\gamma=1$ redonne G_{16p}^{11}. Il suffit, pour le voir, de permuter a et b, dans les équations précédentes.

(5). $\alpha=1, \ \beta=\gamma=-1$; $da=ad, \ db=bd^{-1}, \ dc=cd^{-1}, \ dabc=abcd$. Soit $abc=b'$; on a

$$a^2=b'^2=c^4=1, \quad ac=ca, \quad b'c=cb',$$
$$ab'=a^2bc=bca.a=bac.a=abc.ac^2=b'ac^2,$$
$$da=ad, \quad db'=b'd, \quad dc=cd^{-1}.$$

On retrouve G_{16p}^{10}.

(6). $\alpha=-1, \beta=1, \gamma=-1$ redonne G_{16p}^{10}.

(7). $\alpha=\beta=-1, \gamma=1$: $abc=a'$ est d'ordre 2. On a

$$a'^2=b^2=c^4=1, \quad a'b=abcb=ab^2c=bac^2bc=babc^3=ba'c^2,$$
$$a'c=ca', \quad bc=cb.$$

D'ailleurs, si $da=ad^{-1}$, $db=bd^{-1}$, $dc=cd$, on en conclut

$$da'=a'd.$$

On retrouve G_{16p}^{11}.

(8). $\alpha=\beta=\gamma=-1$; alors

$$dabc=abcd^{-1}.$$

Le groupe G_{16p}^{12} a, pour équations de définition,

$$a^2=b^2=c^4=d^p=1, \quad ac=ca, \quad bc=cb, \quad ab=bac^2,$$
$$da=ad^{-1}, \quad db=bd^{-1}, \quad dc=cd^{-1}.$$

11. X. $\frac{G}{\Gamma}=G_{16}^2$ [1]:

$$a^4=b^4=1, \quad ab=ba^3 \quad \text{ou bien} \quad a^2=\alpha, \quad b^2=\beta, \quad \alpha^2=\beta^2=1, \quad ab=ba\alpha.$$

---

[1] *Loc. cit.*, Chap. VI.

Rappelons le Tableau des opérations de G_{16}^2 :

4	a	b	ab	
2	α	β	β	$\alpha\beta$

On a

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^\beta,$$

avec

$$\alpha^4 \equiv \beta^4 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mais $ab = ba^3$, or

$$cab = abc^{\alpha\beta}, \qquad cba^3 = ba^3c^{\alpha^3\beta};$$

Donc on a

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G_{16}^2 G_p$.

(2). $\beta = 1$, $\alpha = -1$:

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc$$

définissent le groupe G_{16p}^{13}.

(3). Soit $\alpha = 1$, $\beta \neq 1$:

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad cb = bc^\beta.$$

Si $\beta = -1$, on a le groupe G_{16p}^{14}.

Si β appartient à l'exposant 4 (mod p), on a le groupe G_{16p}^{15}.

(4). Soit enfin $\alpha = -1$, $\beta \neq 1$.

Si $\beta = -1$, $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, donc

$$cab = abc.$$

Posons $ab = b'$, d'où $b'^2 = b^2$, donc

$$a^4 = b'^4 = c^p = 1, \qquad ab' = b'a^3, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb' = b'c.$$

On retrouve G_{16p}^{13}.

Si β appartient à l'exposant 4 (mod p), on a

$$ca = ac^{-1}, \qquad cb^2 = b^2c^{-1}, \qquad \text{donc} \qquad cab^2 = ab^2c.$$

Posons $ab^2 = a'$, $a'^2 = a^2$.

Donc

$$a'^4 = b^4 = 1 = c^p, \qquad a'b = ab^3 = b^3a^3 = b(ab^2)^3 = ba'^3, \qquad ca' = a'c, \qquad cb = bc^\beta.$$

On retrouve G_{16p}^{15}.

12. XI. $\frac{G}{\Gamma} = G^3_{16}$ (1):

$$a^4 = b^2 = c^2 = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac.$$

Rappelons le Tableau des opérations :

$$(a^2 = \alpha, \quad b^2 = \alpha^2 = \beta^2 = 1, \quad ab = ba\beta),$$

Ordre 4	a		ab	
Ordre 2	α	b	$\alpha\beta$	β

On a

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac,$$
$$da = ad^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^4 \equiv 1 \pmod p,$$
$$db = bd^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod p,$$
$$dc = cd^\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma^2 \equiv 1 \pmod p.$$

Mais, tout d'abord,

$$dab = abd^{\alpha\beta}, \quad dbac = bacd^{\alpha\beta\gamma}.$$

Comme $ab = bac$, j'en conclus

$$\gamma \equiv 1 \pmod p.$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G^3_{16}\,G_p$.
(2). $\beta = 1$, $\alpha \not\equiv 1$. On a, comme équations de définition,

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac,$$
$$da = ad^\alpha, \quad db = bd, \quad dc = cd.$$

Si $\alpha = -1$, ces équations définissent G^{16}_{16p}.
Si α appartient à l'exposant 4 (mod p), ces équations définissent G^{17}_{16p}.
(3). Soit $\beta = -1$, $\alpha = 1$, on a le groupe G^{18}_{16p}, défini par les équations

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac,$$
$$da = ad, \quad db = bd^{-1}, \quad cd = dc.$$

(4). Soit $\alpha \not\equiv 1$, $\beta = -1$.
Si $\alpha = -1$, $da = ad^{-1}$, $db = bd^{-1}$, donc

$$dab = abd.$$

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

Posons $ab = a'$, on a

$$a'^4 = b^2 = c^2 = 1, \qquad a'c = ca', \qquad bc = cb, \qquad a'b = ab^2 = bacb = babc = ba'c.$$

On retrouve G^{18}_{16p}.
Si α appartient à l'exposant 4 :

$$da^2 = a^2 d^{-1}, \qquad db = bd^{-1}, \qquad da^2 b = a^2 bd.$$

Posant $a^2 b = b'$, on retrouve G^{18}_{16p}.

13. XII. $\frac{G}{\Gamma} = G^5_{16}$ [1] :

$$a^4 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha, \qquad \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba^3\alpha.$$

Tableau des opérations.

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$
2	α	α	α	α	α	α

On a

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \qquad a^4 = b^2, \qquad ab = ba^7,$$
$$ca = ac^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \pmod{p},$$
$$cb = bc^\beta \quad \text{avec} \quad \beta^4 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mais

$$cab = abc^{\alpha\beta}, \qquad cba^7 = ba^7 c^{\alpha^7\beta}.$$

Donc on a

$$\alpha^6 \equiv 1 \pmod{p}, \qquad \alpha = \pm 1.$$

J'en conclus

$$ca^4 = a^4 c,$$

donc

$$cb^2 = b^2 c,$$

donc

$$\beta = \pm 1.$$

(1). Si $\alpha = \beta = 1$, on a le groupe $G^5_{16}\, G_p$.
(2). Si $\alpha = 1$, $\beta = -1$, on trouve G^{19}_{16p}, dont les équations de définition sont

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \qquad a^4 = b^2, \qquad ab = ba^7, \qquad ac = ca, \qquad cb = bc^{-1}.$$

[1] *Loc. cit.*, Chap. VI.

(3). Si $\alpha = -1$, $\beta = +1$, on trouve G_{16p}^{20}.

$$a^8 = b^4 = c^p = 1, \quad a^4 = b^2, \quad ab = ba^7, \quad ca = ac^{-1}, \quad bc = cb.$$

(4). Si $\alpha = \beta = -1$, $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, donc

$$cab = abc.$$

Posons $ab = b'$; on a

$$a^8 = b'^4 = c^p = 1, \quad a^4 = b'^2, \quad ab' = b'a^7, \quad ca = ac^{-1}, \quad b'c = cb'.$$

Donc on retrouve G_{16p}^{20}.

14. XIII. $\frac{G}{\Gamma} = G_{16}^{6}$ (1):

$$a^4 = \alpha, \quad b^2 = \alpha^2 = 1, \quad ab = ba^3.$$

Tableau des opérations.

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$		ab		a^3b
2	α	α	b	α	a^2b	α

On a

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3,$$

$$ca = ac^{\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \pmod{p},$$
$$cb = bc^{\beta} \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Mais

$$cab = abc^{\alpha\beta}, \quad cba^3 = ba^3c^{\alpha^3\beta};$$

donc

$$\alpha^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G_{16}^{6}G_p$.

(2). $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ac = ca, \quad cb = bc^{-1}$$

définissent G_{16p}^{21}.

(3). $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Le groupe G_{16p}^{22} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc.$$

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

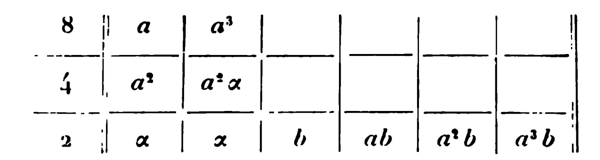
(4). $\alpha = \beta = -1$, G_{16p}^{23} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc^{-1}.$$

15. XIV. $\dfrac{G}{\Gamma} = G_{16}^{7}$ (1):

$$a^4 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba^2\alpha.$$

Voici le Tableau des opérations



8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$				
2	α	α	b	ab	a^2b	a^3b

On a

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^7,$$

$$ca = ac^{\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha^8 \equiv 1 \quad (\text{mod } p),$$
$$cb = bc^{\beta} \quad \text{avec} \quad \beta^2 \equiv 1 \quad (\text{mod } p).$$

Mais

$$cab = abc^{\alpha\beta}, \qquad cba^7 = ba^7c^{\alpha^7\beta},$$

d'où, puisque $ab = ba^7$,

$$\alpha^6 \equiv 1 \quad (\text{mod } p), \qquad \text{donc} \qquad \alpha = \pm 1.$$

(1). $\alpha = \beta = 1$ donne $G_{16}^{7}G_p$.
(2). $\alpha = 1$, $\beta = -1$ donne le groupe G_{16p}^{24}, défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^{-1}, \qquad ca = ac, \qquad cb = bc^{-1}.$$

(3). $\alpha = -1$, $\beta = 1$ donne le groupe G_{16p}^{25}, défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^{-1}, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc.$$

(4). $\alpha = \beta = -1$, $ca = ac^{-1}$, $cb = bc^{-1}$, $cab = abc$.
Or posons $ab = b'$.
On a

$$a^8 = b'^2 = 1, \qquad ab' = b'a^7.$$

On retrouve G_{16p}^{25}.

16. Il reste maintenant à chercher si les 25 groupes G_{16p}^{λ} trouvés ($\lambda = 1, 2, \ldots, 25$)

(1) *Loc. cit.*, Chap. VI.

sont bien distincts. Pour cela, énumérons dans chacun d'eux le nombre d'opérations d'ordre donné.

Soit d'abord G^1_{16p} :

$$a^{16} = b^p = 1, \qquad ab^{-1} = ba,$$

a^2 est une opération d'ordre 8, conjuguée d'elle-même dans le groupe total.

On a

$$b^{-\mu} a = ab^{\mu}, \qquad \text{donc} \qquad (ab^{\mu})^2 = a^2,$$

pour toute valeur de μ.

$a^{2\lambda+1} b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 16.

On a donc $8p$ opérations d'ordre 16.

$a^2 b^{\mu}$, $a^6 b^{\mu}$, $a^{10} b^{\mu}$, $a^{14} b^{\mu}$ (μ premier avec p) sont d'ordre $8p$.

Cela fait $4(p-1)$ opérations d'ordre $8p$.

$a^4 b^{\mu}$, $a^{12} b^{\mu}$ (μ premier avec p) sont d'ordre $4p$, d'où $2(p-1)$ opérations d'ordre $4p$.

$a^8 b^{\mu}$ (μ premier avec p) est d'ordre $2p$, d'où $(p-1)$ opérations d'ordre $2p$.

b^{μ} (μ premier avec p) est d'ordre p, d'où $(p-1)$ opérations d'ordre p.

a^2, a^6, a^{10}, a^{14} donnent 4 opérations d'ordre 8.

a^4, a^{12} donnent 2 opérations d'ordre 4.

a^8 est d'ordre 2.

Ainsi, G^1_{16p} a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4(p-1)$	»	$8p$,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
4	»	8,
2	»	4,
1	opération d'ordre	2.

17. G^2_{16p} est défini par les équations

$$a^{16} = b^p = 1, \qquad ba = ab^{\alpha},$$

où α appartient à l'exposant $4 \pmod p$; $p-1$ doit être divisible par 4; *exemples :* $p = 5, 13, 17, \ldots$

On a

$$b^{\alpha'} a = ab \qquad \text{avec} \qquad \alpha'\alpha \equiv 1 \pmod p.$$

α' est différent de 1

$$ab^{\mu} = b^{\alpha'\mu}a,$$
$$(ab^{\mu})^2 = b^{\alpha'\mu}a^2 b^{\mu} = a^2 b^{\mu(1-\alpha')},$$
$$(ab^{\mu})^4 = a^2 b^{\mu(1-\alpha')} a^2 b^{\mu(1-\alpha')} = a^4.$$

Donc ab^{μ} est d'ordre 16, quel que soit μ.

De même

$$(a^2 b^{\mu})^2 = a^4.$$

$a^2 b^{\mu}$ est d'ordre 8, quel que soit μ.

Ainsi, $a^{2\lambda+1} b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 16;

$a^{2(2\lambda+1)} b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 8.

$a^{4(2\lambda+1)} b^{\mu}$ (μ premier avec p) est d'ordre $4p$.

$a^8 b^{\mu}$ (μ premier avec p) est d'ordre $2p$.

b^{μ} (μ premier avec p) est d'ordre p.

$a^{4(2\lambda+1)}$ est d'ordre 4, a^8 d'ordre 2.

G^2_{16p} a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4p$	»	8,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
2	»	4,
1	opération d'ordre	2.

18. G^3_{16p} est défini par les équations

$$a^{16} = b^p = 1, \qquad ba = ab^{\alpha},$$

où α appartient à l'exposant $8 \pmod p$; $p-1$ est divisible par 8; ***exemples :*** $p = 17, 41, \ldots$.

Alors on a

$$b^{\alpha'}a = ab, \qquad \alpha'\alpha \equiv 1 \pmod p, \qquad b^{\alpha'\mu}a = ab^{\mu}, \qquad (ab^{\mu})^2 = b^{\alpha'\mu}a^2 b^{\mu}.$$

Mais

$$b^{\alpha'^2\mu}a^2 = a^2 b^{\mu}.$$

Donc

$$(ab^{\mu})^2 = b^{(\alpha'+\alpha'^2)\mu}a^2 = a^2 b^{\alpha^2\mu(\alpha'+\alpha'^2)} = a^2 b^{\mu(\alpha+1)}$$
$$(ab^{\mu})^4 = b^{(\alpha'+\alpha'^2)\mu} a^4 b^{\mu(\alpha+1)} = b^{(\alpha'+\alpha'^2)\mu-(\alpha+1)\mu} a^4 = a^4 b^{-(\alpha'+\alpha'^2)\mu+(\alpha+1)\mu}.$$

Enfin

$$(ab^{\mu})^8 = a^8.$$

Donc, $a^{2\lambda+1}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 16;
$a^{2(2\lambda+1)}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 8;
$a^{4(2\lambda+1)}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 4.
$a^{8}b^{\mu}$ (μ premier avec p) est d'ordre $2p$.
b^{μ} (μ premier avec p) est d'ordre p, et a^8 d'ordre 2.
G^3_{16p} a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4p$	»	8,
$2p$	»	4,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
1	opération d'ordre	2.

19. G^4_{16p}, $a^{16}=b^p=1$, $ba=ab^{\alpha}$, α appartient à l'exposant 16 (mod p), $p-1$ sera divisible par 16; *exemples :* $p=17, 97, \ldots$.

$$b^{\lambda}a^{\mu} = a^{\mu}b^{\lambda\alpha^{\mu}},$$
$$(b^{\lambda}a^{\mu})^2 = b^{\lambda}a^{2\mu}b^{\lambda\alpha^{\mu}} = a^{2\mu}b^{\lambda(\alpha^{\mu}+\alpha^{2\mu})},$$
$$(b^{\lambda}a^{\mu})^{\rho} = a^{\rho\mu}b^{\lambda(\alpha^{\mu}+\alpha^{2\mu}+\ldots+\alpha^{\rho\mu})} = a^{\rho\mu}b^{\lambda\alpha^{\mu}\frac{\alpha^{\rho\mu}-1}{\alpha^{\mu}-1}}.$$

Si α appartient à l'exposant 16 (mod p), pourvu que μ ne soit pas égal à 16, $\alpha^{\mu}-1$ sera différent de zéro.

Donc, on aura
$$(b^{\lambda}a^{\mu})^{16}=1.$$

Donc, $a^{2\lambda+1}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 16;
$a^{2(2\lambda+1)}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 8;
$a^{4(2\lambda+1)}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 4;
$a^{8}b^{\mu}$, quel que soit μ, est d'ordre 2.
b^{μ} (μ premier avec p) est d'ordre p.
G^4_{16p} a :

$8p$	opérations d'ordre	16,
$4p$	»	8,
$2p$	»	4,
p	»	2,
$p-1$	»	p.

20. G^5_{16p} est défini par les équations

$$a^8=b^2=c^p=1,\qquad ab=ba,\qquad ca=ac^{\alpha},\qquad cb=bc^{-1},$$

où α appartient à l'exposant 4 (mod p)

$$c^{\lambda} a^{\mu} b^{\nu} = a^{\mu} c^{\lambda \alpha^{\mu}} b^{\nu} = a^{\mu} b^{\nu} c^{(-1)^{\nu} \lambda \alpha^{\mu}},$$

$$(c^{\lambda} a^{\mu} b^{\nu})^2 = c^{\lambda} a^{2\mu} b^{2\nu} c^{(-1)^{\nu} \lambda \alpha^{\mu}} = a^{2\mu} b^{2\nu} c^{(-1)^{\nu} \lambda \alpha^{\mu} + (-1)^{2\nu} \lambda \alpha^{2\mu}},$$

$$(c^{\lambda} a^{\mu} b^{\nu})^{\rho} = a^{\rho\mu} b^{\rho\nu} c^{(-1)^{\nu} \lambda \alpha^{\mu} + (-1)^{2\nu} \lambda \alpha^{2\mu} + \ldots + (-1)^{\rho\nu} \lambda \alpha^{\rho\mu}}.$$

ν ne peut prendre que deux valeurs.

1° Soit $\nu = 0$:

$$(c^{\lambda} a^{\mu})^{\rho} = a^{\rho\mu} c^{\lambda \alpha^{\mu} \frac{\alpha^{\rho\mu} - 1}{\alpha^{\mu} - 1}}.$$

Si μ n'est pas multiple de 4, $\alpha^{\mu} - 1$ est différent de zéro.

Donc, on a

$$(c^{\lambda} a^{\mu})^4 = a^{4\mu}, \qquad \mu \not\equiv 0 \pmod 4.$$

2° Soit $\nu = 1$:

$$(c^{\lambda} a^{\mu} b)^{\rho} = a^{\rho\mu} b^{\rho} c^{-\lambda[\alpha^{\mu} - \alpha^{2\mu} + \ldots + (-1)^{\rho} \alpha^{\rho\mu}]} = a^{\rho\mu} b^{\rho} c^{\lambda \alpha^{\mu} \frac{(-1)^{\rho+1} \alpha^{\rho\mu} - 1}{\alpha^{\mu} + 1}}.$$

Soit $\rho = 2\rho'$:

$$(c^{\lambda} a^{\mu} b)^{2\rho'} = a^{2\rho'\mu} c^{-\lambda \alpha^{\mu} \frac{1 + \alpha^{2\mu}}{1 + \alpha^{\mu}}},$$

α appartient à l'exposant 4 (mod p). Donc, si μ est impair, $1 + \alpha^{\mu}$ est **différent** de zéro, $1 + \alpha^{2\mu}$ est nul, puisque $\alpha^2 = -1$.

Donc,

$$(c^{\lambda} a^{2\mu+1} b)^{2\rho} = a^{2\rho(2\mu+1)},$$

a^4 est une opération conjuguée d'elle-même.

Revenons à la formule

$$(c^{\lambda} a^{2\mu} b)^{\rho} = a^{2\mu\rho} b^{\rho} c^{-\lambda \alpha^{2\mu} + \lambda \alpha^{\mu 4} - \ldots + (-1)^{\rho} \lambda \alpha^{2\mu\rho}}.$$

Soit $\rho = 2\rho'$:

$$(c^{\lambda} a^{2\mu} b)^{2\rho'} = a^{4\mu\rho'} c^{-\lambda[(-1)^{\mu} - (-1)^{2\mu} + \ldots - (-1)^{2\mu\rho'}]}.$$

Si $\mu = 2\mu' + 1$, l'exposant de c sera

$$-\lambda(-1 - 1 - \ldots - 1) = +2\lambda\rho',$$

donc

$$(c^{\lambda} a^{2(2\mu+1)} b)^{2\rho} = a^{4\rho(2\mu+1)} c^{2\lambda\rho}$$

et, par suite,

$$(c^{\lambda} a^{2(2\mu+1)} b)^4 = c^{4\lambda}.$$

Si donc λ est premier avec p, $c^{\lambda} a^{2(2\mu+1)} b$ est d'ordre $4p$.

Si μ est pair,

$$\mu = 2\mu', \qquad (c^\lambda a^{4\mu'} b)^{2p'} = 1,$$

$c^\lambda a^{4\mu'} b$ est d'ordre 2.

En résumé :

				Cela donne	
$c^\lambda a^{2\mu+1} b$	(λ premier avec p)	est d'ordre	8	$4(p-1)$	opérations.
$c^\lambda a^{2(2\mu+1)} b$	»	»	$4p$	$2(p-1)$	»
$c^\lambda a^{4\mu} b$	»	»	2	$2(p-1)$	»
$c^\lambda a^{2\mu+1}$	»	»	8	$4(p-1)$	»
$c^\lambda a^{2(2\mu+1)}$	»	»	4	$2(p-1)$	»
$c^\lambda a^4$	»	»	$2p$	$(p-1)$	»
c^λ	»	»	p	$(p-1)$	»
	$a^{2\mu+1} b^\nu$, $\nu = 1, 2$	»	8	8	»
	$a^{2(2\mu+1)} b^\nu$, $\nu = 1, 2$	»	4	4	»
$a^{4\mu} b^\nu$, μ, $\nu = 1, 2$ (sauf $\mu = \nu = 2$)		»	2	3	»

Donc G^5_{16p} contient

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	8,
$2p+2$	»	4,
$2p+1$	»	2.

21. G^6_{16p} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^5, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad cb = bc.$$

Rappelons le Tableau des opérations de G^1_{16} :

8	a	$a\alpha$		ab		$ab\alpha$
4	α	α^3		α^3	$b\alpha$	α
2	α^2	α^2	b	α^2	α^2	α^2

Le groupe $\{a, b\}$ contient donc

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

Puisque $cb = bc$, $bc^\lambda = c^\lambda b$.

bc^λ (λ premier avec p) sera d'ordre $2p$; cela donne $(p-1)$ opérations d'ordre $2p$.

c^λ (λ premier avec p) sera d'ordre p; d'où $p-1$ opérations d'ordre p.

$$ca = ac^{-1}, \qquad \text{donc} \qquad c^{-1}a = ac, \qquad (ac)^2 = a^2.$$

Donc $a^{2\lambda+1}c^\mu$ (μ premier avec p) sera d'ordre 8.

Cela donne $4(p-1)$ opérations d'ordre 8.

$$cab = abc^{-1}, \qquad (cab)^2 = c\alpha^2c^{-1} = \alpha^2.$$

Donc $a^{2\lambda+1}bc^\mu$ (μ premier avec p) est d'ordre 8; d'où $4(p-1)$ opérations d'ordre 8.

α est une opération conjuguée d'elle-même.

Donc $\alpha^{2\lambda+1}b^\mu c^\lambda$ (λ premier avec p) est d'ordre $4p$; de là $4(p-1)$ opérations d'ordre $4p$.

$\alpha^2 b^\mu c^\lambda$ (λ premier avec p) est d'ordre $2p$; de là $2(p-1)$ opérations d'ordre $2p$.

G_{16p}^6 a donc :

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	8,
4	»	4,
3	»	2,

22. G_{16p}^7 est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^5, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc,$$

où α appartient à l'exposant 4 (mod p).

On a toujours, pour le groupe $\{a, b\}$,

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

bc^λ (λ premier avec p) sera d'ordre $2p$, d'où $p-1$ opérations d'ordre $2p$,

c^λ (λ premier avec p) sera d'ordre p, d'où $p-1$ opérations d'ordre p.

$$c^\lambda a^\mu = a^\mu c^{\lambda\alpha^\mu}, \qquad (c^\lambda a^\mu)^2 = c^\lambda a^{2\mu} c^{\lambda\alpha^\mu} = a^{2\mu} c^{\lambda(\alpha^\mu+\alpha^{2\mu})},$$

$$(c^\lambda a^\mu)^\rho = a^{\rho\mu} c^{\lambda(\alpha^\mu+\alpha^{2\mu}+\ldots+\alpha^{\rho\mu})} = a^{\rho\mu} c^{\lambda\alpha^\mu \frac{\alpha^{\rho\mu}-1}{\alpha^\mu-1}}.$$

Si μ est incongru à zéro (mod 4), $\alpha^\mu - 1$ sera différent de zéro.

Donc

$$(c^\lambda a^{2\mu+1})^4 = a^4;$$

$a^{2\mu+1} c^\lambda$ est d'ordre 8; d'où $4(p-1)$ opérations d'ordre 8.

$$(c^\lambda a^{2(2\mu+1)})^2 = a^4;$$

$a^{2(2\mu+1)} c^\lambda$ est d'ordre 4; d'où $2(p-1)$ opérations d'ordre 4.

$a^4 c^\lambda$ est d'ordre $2p$; d'où $(p-1)$ opérations d'ordre $2p$.

$$c^\lambda a^\mu b = a^\mu c^{\lambda\alpha^\mu} b = a^\mu b c^{\lambda\alpha^\mu},$$

$$(c^\lambda a^\mu b)^2 = c^\lambda a^{6\mu} c^{\lambda\alpha^\mu} = a^{6\mu} c^{\lambda(\alpha^\mu+\alpha^{6\mu})} = c^{-\lambda(\alpha^\mu+\alpha^{6\mu})} a^{6\mu},$$

$$(c^\lambda a^\mu b)^4 = a^{4\mu}.$$

$c^\lambda a^{2\mu+1} b$ est donc d'ordre 8, ce qui donne $4(p-1)$ opérations d'ordre 8,

$c^\lambda a^{2(2\mu+1)} b$ est donc d'ordre 4, ce qui donne $2(p-1)$ opérations d'ordre 4,

$c^\lambda a^4 b$ est donc d'ordre $2p$, ce qui donne $p-1$ opérations d'ordre $2p$.

G^7_{16p} a donc :

$3(p-1)$	opérations d'ordre	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	8,
$4p$	»	4,
3	»	2.

23. G^8_{16p} a pour équations de définition

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^5, \qquad ca = ac, \qquad cb = bc^{-1}.$$

On a toujours, pour le groupe $\{a, b\}$,

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

$c^{-\lambda} b = bc^\lambda$, $(bc^\lambda)^2 = 1$; d'où $p-1$ opérations d'ordre 2.

c^λ donne $(p-1)$ opérations d'ordre p.

$a^\mu bc^\lambda = c^{-\lambda}a^\mu b$, $(a^\mu bc^\lambda)^2 = (a^\mu b)^2$, quel que soit λ.

Donc

$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	est d'ordre	8;	d'où	$4(p-1)$	opérations d'ordre	8,
$a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda$	»	4;	»	$2(p-1)$	»	4,
a^4bc^λ	»	2;	»	$(p-1)$	»	2,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	»	$8p$;	»	$4(p-1)$	»	$8p$,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	»	$4p$;	»	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	»	$2p$;	»	$(p-1)$	»	$2p$.

G_{16p}^8 possède :

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p+4$	»	8,
$2p+2$	»	4,
$2p+1$	»	2.

24. G_{16p}^9 est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^5, \qquad ca = ac^\alpha, \qquad cb = bc^{-1},$$

α appartient à l'exposant 4 (mod p).

On a toujours, pour le groupe $\{a, b\}$,

8	opérations d'ordre	8,
4	»	4,
3	»	2.

$c^{-\lambda}b = bc^\lambda$, $(bc^\lambda)^2 = 1$; d'où $p-1$ opérations d'ordre 2.

c^λ donne $p-1$ opérations d'ordre p.

$a^{2\mu+1}c^\lambda$	est d'ordre	8 (*voir* n° 22),	d'où	$4(p-1)$	opérations d'ordre	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	»	4	»	$2(p-1)$	»	4,
a^4c^λ	»	$2p$,	»	$(p-1)$	»	$2p$,

$$a^\mu bc^\lambda = a^\mu c^{-\lambda}b, \qquad c^{-\alpha}a = ac, \qquad c^{\alpha\lambda}a = ac^{-\lambda}, \qquad c^{\alpha^\mu\lambda}a^\mu = a^\mu c^{-\lambda},$$

$$a^\mu bc^\lambda = c^{\alpha^\mu\lambda}a^\mu b, \qquad (a^\mu bc^\lambda)^2 = c^{\alpha^\mu\lambda}(a^\mu b)^2c^\lambda = c^{\alpha^\mu\lambda}a^{6\mu}c^\lambda = c^{\lambda(\alpha^\mu-1)}a^{6\mu} = a^{6\mu}c^{\lambda(1-\alpha^\mu)}$$

et

$$(a^{\mu} b c^{\lambda})^4 = a^{4\mu}.$$

$(a^{2\mu+1} b c^{\lambda})^4 = a^4$; c'est une opération d'ordre 8; d'où $4(p-1)$ opérations d'ordre 8.

$(a^{2(2\mu+1)} b c^{\lambda})^4 = 1$; d'où $2(p-1)$ opérations d'ordre 4.

$a^4 b c^{\lambda}$ est d'ordre 2; d'où $p-1$ opérations d'ordre 2.

G^9_{16p} a :

$p-1$	opérations d'ordre	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	8,
$4p$	»	4,
$2p+1$	»	2.

25. G^{10}_{16p} est défini par les équations

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2,$$
$$da = ad, \quad db = bd, \quad dc = cd^{-1}.$$

Le groupe des opérations $\{a, b, c\}$ a pour Tableau :

4			c	ac	ab	
2	a	b	c^2	c^2	c^2	abc

$\{a, b, c\}$ donne donc

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^{λ}	donne	$(p-1)$	»	p,
ad^{λ}	donne	$(p-1)$	»	$2p$,
bd^{λ}	donne	$(p-1)$	»	$2p$.

$dc)^2 = c^2$, dc est d'ordre 4.

$c^3 d^{\lambda}$, cd^{λ}	donnent	$2(p-1)$	opérations d'ordre	4,
$c^2 d^{\lambda}$	donne	$(p-1)$	»	$2p$,
bcd^{λ}, $bc^3 d^{\lambda}$	donnent	$2(p-1)$	»	4,
acd^{λ}, $ac^3 d^{\lambda}$	donnent	$2(p-1)$	»	4,
$bc^2 d^{\lambda}$, $ac^2 d^{\lambda}$	donnent	$2(p-1)$	»	$2p$,
abd^{λ}	donne	$p-1$	»	$4p$.

$abcd^\lambda = d^{-\lambda} abc$, donc $(abcd^\lambda)^2 = 1$.

$abcd^\lambda$, $abc^3 d^\lambda$	donnent	$2(p-1)$	opérations d'ordre	2,
$abc^2 d^\lambda$	donne	$(p-1)$	»	$2p$.

G^{10}_{16p} admet :

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$5(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$6p+2$	»	4,
$2p+5$	»	2.

26. G^{11}_{16p} a pour équations de définition

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2,$$
$$da = ad, \quad db = bd^{-1}, \quad dc = cd.$$

$\{a, b, c\}$ donne

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^λ	donne	$(p-1)$	»	p,
ad^λ	donne	$(p-1)$	»	$2p$,
bd^λ	donne	$(p-1)$	»	2,
cd^λ, $c^3 d^\lambda$	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
$c^2 d^\lambda$	donne	$(p-1)$	»	$2p$,
bcd^λ, $bc^3 d^\lambda$	donnent	$2(p-1)$	»	4,
acd^λ, $ac^3 d^\lambda$	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
$bc^2 d^\lambda$	donne	$p-1$	»	2,
$ac^2 d^\lambda$	donne	$p-1$	»	$2p$,

$$abd^\lambda = ad^{-\lambda} b = d^{-\lambda} ab, \qquad (abd^\lambda)^2 = c^2.$$

$abc^\mu d^\lambda$ donne

$4(p-1)$ opérations d'ordre 4.

Bref G^{11}_{16p} a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$6p+2$	»	4,
$2p+5$	»	2.

27. G_{16p}^{12} a pour équations de définition

$$a^2 = b^2 = c^4 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac^2,$$
$$da = ad^{-1}, \quad db = bd^{-1}, \quad dc = cd^{-1}.$$

$\{a, b, c\}$ donne

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^λ	donne	$p-1$	»	p,
ad^λ, bd^λ, cd^λ, c^3d^λ	donnent	$4(p-1)$	»	2,
c^2d^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
bcd^λ, bc^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
acd^λ, ac^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
bc^2d^λ, ac^2d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	2,
abd^λ, abc^2d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
$abcd^\lambda$, abc^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	2.

G_{16p}^{12} possède :

$6(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
8	»	4,
$8p-1$	»	2.

28. G_{16p}^{13} est défini par les équations

$$a^4 = b^4 = c^p = 1, \quad ab = ba^3, \quad ca = ac^{-1}, \quad cb = bc.$$

Le Tableau des opérations de $\{a, b\}$ est

4	a	b	ab	
2	α	β	β	$\alpha\beta$

$\{a, b\}$ contient :

		12	opérations d'ordre	4,
		3	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
ac^λ, a^3c^λ	donnent	$2(p-1)$	»	4,
bc^λ, b^3c^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^2c^λ, b^2c^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$2p$,
abc^λ, ab^3c^λ, a^3bc^λ, $a^2b^3c^\lambda$, ab^2c^λ, $a^3b^2c^\lambda$	donnent	$6(p-1)$	»	4,
a^2bc^λ, $a^2b^3c^\lambda$	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
$a^2b^2c^\lambda$	donne	$p-1$	»	$2p$.

Bref G_{16p}^{13} a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1)$	»	p,
$8p+4$	»	4,
3	»	2.

Remarque : $4p$ opérations, savoir : a, a^3, ab^2, a^3b^2, ac^λ, a^3c^λ, ab^2c^λ, $a^3b^2c^\lambda$ ont pour carré α.

$4p+4$ opérations, savoir : b, b^3, ab, ab^3, a^2b, a^3b, a^2b^3, a^3b^3, abc^λ, ab^3c^λ, a^3bc^λ, $a^3b^3c^\lambda$ ont pour carré β.

29. G_{16p}^{14} est défini par les équations

$$a^4=b^4=c^p=1,\qquad ab=ba^3,\qquad ca=ac,\qquad cb=bc^{-1}.$$

$\{a, b\}$ contient

		12	opérations d'ordre	4,
		3	»	2,
c^λ	donne	$(p-1)$	»	p,
ac^λ, a^3c^λ, ab^2c^λ, $a^3b^2c^\lambda$	donnent	$4(p-1)$	»	$4p$,
bc^λ, b^3c^λ, $a^\mu bc^\lambda$, $a^\mu b^3c^\lambda$	donnent	$8(p-1)$	»	4 (carré β),
a^2c^λ, b^2c^λ, $a^2b^2c^\lambda$	donnent	$3(p-1)$	»	$2p$.

On remarquera qu'il y a $8p$ opérations d'ordre 4 ayant pour carré β et 4 seulement ayant pour carré α.

Donc G_{16p}^{14} diffère de G_{16p}^{13}, bien qu'ayant le même nombre d'opérations d'ordre donné que ce dernier groupe, savoir :

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p+4$	»	4,
3	»	2.

30. G_{16p}^{15} est défini par les équations

$$a^4=b^4=c^p=1,\qquad ab=ba^3,\qquad ca=ac,\qquad cb=bc^\beta,$$

où β appartient à l'exposant 4 (mod p).

$\{a, b\}$ contient

		12	opérations d'ordre	4,
		3	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
ac^λ, a^3c^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,

$$(cb)^2 = cb^2c^\beta = c^{1-\beta}b^2 = b^2c^{\beta-1} \quad \text{donc} \quad (cb)^4 = 1,$$

bc^λ, b^3c^λ	donnent	$2(p-1)$	opérations d'ordre	4,
a^2c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
b^2c^λ	donne	$p-1$	»	2,
a^2bc^λ, $a^2b^3c^\lambda$, abc^λ, a^3bc^λ, ab^3c^λ, $a^3b^3c^\lambda$, ab^2c^λ, $a^3b^2c^\lambda$	donnent	$8(p-1)$	»	4,
$a^2b^2c^\lambda$	donne	$p-1$	»	2.

Donc G_{16p}^{15} a

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$10p+2$	»	4,
$2p+1$	»	2.

31. G_{16p}^{16} a pour équations de définition

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac,$$
$$da = ad^{-1}, \quad db = bd, \quad dc = cd.$$

Le Tableau des opérations de $\{a, b, c\}$ est

4	a		ab	
2	$a^2 = \alpha$	b	$\alpha c = \alpha\beta$	$c = \beta$

D'où

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^λ	donne	$(p-1)$	»	p,
ad^λ, a^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	4,
a^2d^λ, bd^λ, cd^λ	donnent	$3(p-1)$	»	$2p$,
$a^{2\mu+1}bd^\lambda$, $a^{2\mu+1}cd^\lambda$, $a^{2\mu+1}bcd^\lambda$	donnent	$6(p-1)$	»	4,
a^2bd^λ, a^2cd^λ, a^2bcd^λ, bcd^λ	donnent	$4(p-1)$	»	$2p$.

G_{16p}^{16} possède

$7(p-1)$	opérations d'ordre	$2p$,
$p-1$	»	p,
$8p$	»	4,
7	»	2.

32. G_{16p}^{17} est défini par les équations

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad cb = cb, \quad ab = abc,$$
$$da = ad^x, \quad db = bd, \quad dc = cd,$$

où x appartient à l'exposant 4 (mod p).

Le groupe $\{a, b, c\}$ donne

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^λ	donne	$(p-1)$	»	p,
ad^λ, a^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	4,
a^2d^λ	donne	$(p-1)$	»	2,
bd^λ, cd^λ, bcd^λ	donnent	$3(p-1)$	»	$2p$,
abd^λ, a^3bd^λ, $abcd^\lambda$, acd^λ, a^3cd^λ, a^3bcd^λ	donnent	$6(p-1)$	»	4,
a^2bd^λ, a^2cd^λ, a^2bcd^λ	donnent	$3(p-1)$	»	2.

G_{16p}^{17} a

$3(p-1)$	opérations d'ordre	$2p$,
$8p$	»	4,
$p-1$	»	p,
$4p+3$	»	2.

33. G_{16p}^{18} a pour équation de définition

$$a^4 = b^2 = c^2 = d^p = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad ab = bac,$$
$$da = ad, \quad db = bd^{-1}, \quad dc = cd,$$

$\{a, b, c\}$ donne

		8	opérations d'ordre	4,
		7	»	2,
d^λ	donne	$p-1$	»	p,
ad^λ, a^3d^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^2d^λ, cd^λ, a^2cd^λ	donnent	$3(p-1)$	»	$2p$,
bd^λ, bcd^λ, a^2bd^λ, a^2bcd^λ	donnent	$4(p-1)$	»	2,
abd^λ, a^3bd^λ, $abcd^\lambda$, a^3bcd^λ	donnent	$4(p-1)$	»	4,
acd^λ, a^3cd^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$4p$.

G_{16p}^{18} possède

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$3(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p+4$	»	4,
$4p+3$	»	2.

34. G_{16p}^{19} est défini par les équations

$$a^8 = b^4 = c^p = 1,\quad a^4 = b^2,\quad ab = ba^7,\quad ca = ac,\quad cb = bc^{-1},$$

$\{a, b\}$ a pour Tableau d'opérations

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$	b	ab	a^2b	a^3b
2	α	α	α	α	α	α

donc $\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		10	»	4,
		1	opération d'ordre	2,
c^λ	donne	$p-1$	opérations d'ordre	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	$8p$,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
$a^\mu bc^\lambda$	donne	$8(p-1)$	»	4.

Donc G_{16p}^{19} a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$.
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
4	»	8,
$8p+2$	»	4,
1	opération d'ordre	2.

35. G_{16p}^{20} est défini par les équations

$$a^8 = b^4 = c^p = 1,\quad a^4 = b^2,\quad ab = ba^7,\quad ca = ac^{-1},\quad cb = bc,$$

$\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		10	»	2,
		1	opération d'ordre	2,
c^λ	donne	$(p-1)$	opérations d'ordre	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$, $a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda$, a^4bc^λ	donnent	$5(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ, bc^λ	donnent	$2(p-1)$	»	$2p$,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	4.

Donc G^{20}_{16p} a

$5(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$2(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p$	»	8,
$4p+6$	»	4,
1	opération d'ordre	2.

36. Le groupe G^{21}_{16p} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ac = ca, \qquad cb = bc^{-1}.$$

Le Tableau des opérations de $\{a, b\}$ est

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$		ab		a^3b
2	α	α	b	α	a^2b	α

Par suite, $\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		6	»	4,
		5	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	$8p$,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
bc^λ, $a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda$, a^4bc^λ	donnent	$4(p-1)$	»	2,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	4.

Bref G_{16p}^{21} a

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
4	»	8,
$4p+2$	»	4,
$4p+1$	»	2.

37. Le groupe G_{16p}^{22} a pour équations de définitions

$$a^8=b^2=c^p=1, \quad ab=ba^3, \quad ca=ac^{-1}, \quad cb=bc.$$

$\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		6	»	4,
		5	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ, bc^λ, $a^{2(\mu+1)}bc^\lambda$, a^4bc^λ	donnent	$5(p-1)$	»	$2p$,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	4.

Bref, on a, pour le groupe G_{16p}^{22},

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$5(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p$	»	8,
$4p+2$	»	4,
5	»	2.

38. G_{16p}^{23} est défini par les équations

$$a^8=b^2=c^p=1, \quad ab=ba^3, \quad ca=ac^{-1}, \quad cb=bc^{-1},$$

$\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		6	»	4,
		5	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$, $a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donnent	$6(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
bc^λ, $a^{2(2\mu+1)}bc^\lambda$, a^4bc^λ	donnent	$4(p-1)$	»	2.

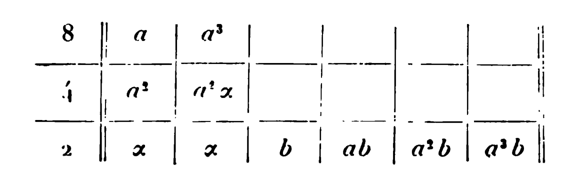
Donc G_{16p}^{23} a

$6(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p$	»	8,
6	»	4,
$4p+1$	»	2.

39. G_{16p}^{24} a pour équations de définition

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^7, \qquad ca = ac, \qquad cb = bc^{-1}.$$

Le Tableau des opérations de $\{a, b\}$ est



8	a	a^3				
4	a^2	a^2x				
2	x	x	b	ab	a^2b	a^3b

Donc $\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		2	»	4,
		9	»	2,
c^λ	donne	$p-1$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	$8p$,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ	donne	$p-1$	»	$2p$,
$a^\mu bc^\lambda$	donne	$8(p-1)$	»	2.

G_{16p}^{24} possède

$4(p-1)$	opérations d'ordre	$8p$,
$2(p-1)$	»	$4p$,
$p-1$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
4	»	8,
2	»	4,
$8p+1$	»	2.

40. Enfin G_{16p}^{25} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^p = 1, \qquad ab = ba^7, \qquad ca = ac^{-1}, \qquad bc = cb.$$

Le groupe $\{a, b\}$ donne

		4	opérations d'ordre	8,
		2	»	4,
		9	»	2,
c^λ	donne	$(p-1)$	»	p,
$a^{2\mu+1}c^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	8,
$a^{2(2\mu+1)}c^\lambda$	donne	$2(p-1)$	»	$4p$,
a^4c^λ, $a^{2\mu}bc^\lambda$	donnent	$5(p-1)$	»	$2p$,
$a^{2\mu+1}bc^\lambda$	donne	$4(p-1)$	»	2.

G_{16p}^{25} a

$2(p-1)$	opérations d'ordre	$4p$,
$5(p-1)$	»	$2p$,
$p-1$	»	p,
$4p$	»	8,
2	»	4,
$4p+5$	»	2.

41. B. J'arrive au cas où il n'y a pas dans le groupe cherché de sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même; alors supposons qu'il y ait un sous-groupe d'ordre 16, conjugué de lui-même.

Supposons que le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}.

Soit a une opération d'ordre 16. Elle engendre G_{16}.

Pour engendrer G_{16}, on peut remplacer a par

$$a, \text{ ou } a^3, \text{ ou } a^5, a^7, a^9, a^{11}, a^{13}, a^{15}.$$

Le groupe des isomorphismes de G_{16} est d'ordre 8.

Ces isomorphismes sont, l'isomorphisme identique, 1, puis

$$\begin{aligned}
s &= (a, a^3, a^9, a^{11})(a^2, a^6)(a^4, a^{12})(a^5, a^{15}, a^{13}, a^7)(a^{10}, a^{14}),\\
s^2 &= (a, a^9)(a^3, a^{11})(a^5, a^{13})(a^7, a^{15}),\\
s^3 &= (a, a^{11}, a^9, a^3)(a^2, a^6)(a^4, a^{12})(a^5, a^7, a^{13}, a^{15})(a^{10}, a^{14}),\\
t &= (a, a^5, a^9, a^{13})(a^2, a^{10})(a^3, a^{15}, a^{11}, a^7)(a^6, a^{14}),\\
st &= (a, a^{15})(a^2, a^{14})(a^3, a^{13})(a^4, a^{12})(a^5, a^{11})(a^6, a^{10})(a^7, a^9),\\
s^2 t &= (a, a^{13}, a^9, a^5)(a^2, a^{10})(a^3, a^7, a^{11}, a^{15})(a^6, a^{14}),\\
s^3 t &= (a, a^7)(a^2, a^{14})(a^3, a^5)(a^4, a^{12})(a^6, a^{10})(a^9, a^{15})(a^{11}, a^{13}).
\end{aligned}$$

On a

$$s^4 = t^4 = 1, \qquad s^2 = t^2, \qquad st = ts.$$

De là résulte que si b est une opération d'ordre p, permutable avec le groupe G_{16}, elle est nécessairement permutable avec toutes les opérations de G_{16}.

On retombe sur le groupe $G_{16} G_p$.

12. Soit $G_8 G_2$ le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même

$$\alpha^8 = \beta^2 = 1.$$

On pourra remplacer (pour engendrer le sous-groupe)

$$\begin{array}{lll}
\alpha & \text{par} & \alpha,\ \alpha^3,\ \alpha^5,\ \alpha^7,\ \alpha\beta,\ \alpha^3\beta,\ \alpha^5\beta,\ \alpha^7\beta,\\
\beta & \text{par} & \beta,\ \alpha^4\beta.
\end{array}$$

Le groupe des isomorphismes de $G_8 G_2$ est donc d'ordre 16.

Il n'y a donc aucun isomorphisme d'ordre impair.

Donc, si une opération d'ordre p est permutable avec $G_8 G_2$, elle sera permutable avec toutes les opérations de ce groupe.

On retrouve $G_8 G_2 G_p$.

13. Soit $(G_4)^2$ le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même.

Soient $a^4 = b^4 = 1$, $ab = ba$.

Voici le Tableau des opérations :

4	a	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$	ab^2	$a^3 b^2$	b^3	ab^3	$a^2 b^3$	$a^3 b^3$
2	a^2	a^2	b^2	$a^2 b^2$	b^2	$a^2 b^2$	a^2	a^2	b^2	$a^2 b^2$	b^2	$a^2 b^2$

Il y a 12 opérations d'ordre 4 :

$$
\begin{array}{lll}
4 & \text{ont pour carré} & a^2, \\
4 & \text{»} & b^2, \\
4 & \text{»} & a^2 b^2,
\end{array}
$$

On pourra prendre pour opération génératrice a' l'une des 12 opérations d'ordre 4, puis ensuite, pour b', l'une des 8 opérations d'ordre 4 n'ayant pas même carré que a'.

En tout, cela donne

$$12.8 = 96 \text{ isomorphes.}$$

Or,

$$96 = 3.32.$$

Puisque 3^1 est la plus grande puissance de 3 qui divise 96, les isomorphismes d'ordre 3 se partagent en groupes cycliques d'ordre 3 formant une suite complète de sous-groupes conjugués dans le groupe total des isomorphismes.

Soient $c^3 = 1$.

Posons

$$ac = cb, \qquad bc = ca^\alpha b^\beta;$$

d'où

$$a^\alpha b^\beta c = a^\alpha c a^{\alpha\beta} b^{\beta^2} = c a^{\alpha\beta} b^{\alpha+\beta^2}.$$

On devra donc avoir

$$\beta^2 + \alpha \equiv 0, \qquad \alpha\beta \equiv 1 \qquad (\text{mod} 4).$$

Donc

$$\beta^3 \equiv -1 \qquad (\text{mod} 4),$$

d'où

$$\beta = 3, \qquad \alpha \equiv 3.$$

Le groupe G_{48}^{26} sera défini par les équations

$$a^4 = b^4 = c^3 = 1, \qquad ab = ba,$$

$$\bar{c} = (a, b, a^3 b^3).$$

44. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est $G_4(G_2)^2$. On a

$$a^4 = b^2 = c^2 = 1, \qquad ab = ba, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb.$$

4	a	a^3		ab		a^3b		ac		a^3c		abc		a^3bc
2	a^2	a^2	b	a^2	a^2b	a^2	c	a^2	a^2c	a^2	bc	a^2	a^2bc	a^2

Pour avoir le groupe des isomorphismes, on peut remplacer a par l'une des

8 opérations d'ordre 4, soit a'; puis b par l'une des 6 opérations b, a^2b, c, a^2c, bc, a^2bc, soit b'; ensuite c par l'une des 4 opérations d'ordre 2 qui restent après que l'on a exclu b' et a'^2b'.

Le groupe des isomorphismes est donc d'ordre

$$8.6.4 = 3.64 = 192.$$

Les isomorphismes d'ordre 3 se partagent en groupes d'ordre 3 formant une suite complète unique de sous-groupes conjugués.

Si l'on se reporte aux considérations faites dans un Mémoire antérieur ([1]), on a ici, $m_4 = 1$, $ad = da$, par exemple (en supposant $d^3 = 1$),

$$\bar{d} = (a^2b, a^2c, a^2bc).$$

On trouve ainsi le groupe décomposable $G_{12}^3 G_4$ ([2]).

15. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est $(G_2)^4$. L'ordre du groupe des isomorphismes est

$$(16-1)(16-2)(16-4)(16-8) = 15.14.12.8 = 2^6.3^2.5.7 = 20160.$$

On a

$$m_2 \equiv 15 \pmod p \quad ([3]).$$

Si $p = 7$, peut-on avoir $m_2 = 8$?

Soit

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^7 = 1,$$

a, b, c, d étant deux à deux permutables.

Les opérations avec lesquelles e est permutable forment un groupe, car si l'on a

$$ae = ea, \qquad be = eb,$$

on aura

$$abe = aeb = eab.$$

Or il faudrait, en prenant les 8 opérations d'ordre 2 et en y ajoutant l'opération identique, ce qui fait 9 opérations, que ces 9 opérations constituent un sous-groupe de $(G_2)^4$.

Mais 9 ne divise pas 2^4. Donc c'est impossible.

On peut avoir $m_2 = 1$,

$$ae = ea;$$

([1]) *Loc. cit.* au commencement du Chapitre VIII.

([2]) *Loc. cit.*, Chap. V.

([3]) *Loc. cit.* au commencement du Chapitre VIII.

puis

$$\bar{e} = (b, c, d, bc, cd, bcd, bd)(ab, ac, ad, abc, acd, abcd, abd).$$

On trouve ainsi $G_{56}^{8} G_2$ [1].

D'ailleurs, dans le groupe des isomorphismes de $(G_2)^4$, il y a une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 7.

46. Faisons $p = 5$.

On peut supposer $m_2 = 10$, ou $m_2 = 5$, ou $m_2 = 0$.

Mais les opérations de $(G_2)^4$ permutables avec e forment un groupe. On en déduit qu'on a nécessairement $m_2 = 0$; autrement l'ordre du groupe des opérations de $(G_2)^4$ permutables avec e serait 6, ou 11, ce qui est impossible puisque ces nombres ne divisent pas 2^4.

On peut supposer, par exemple, qu'on a

$$\bar{e} = (a, b, c, d, abcd)(ab, bc, cd, abc, bcd)(ac, bd, abd, ad, acd).$$

Introduisons les exposants imaginaires de Galois.

Prenons comme congruence fondamentale

$$x^4 \equiv x^3 + x^2 + x + 1 \qquad (\text{mod } 2).$$

Voyons à quel exposant appartient x :

$$x^1 = x, \qquad x^2 = x^2, \qquad x^3 = x^3, \qquad x^4 \equiv x^3 + x^2 + x + 1,$$
$$x^5 \equiv x^4 + x^3 + x^2 + x \equiv 1.$$

Donc x appartient à l'exposant 5 et G_{80}^{27} est défini par les équations

$$a^{(2,\, x^4+x^3+x^2+x+1)} = b^5 = 1, \qquad ab = ba^x.$$

On remarquera d'ailleurs que les sous-groupes d'ordre 5 du groupe des isomorphismes de $(G_2)^4$ font partie d'une suite complète unique de sous-groupes conjugués.

47. Soit $p = 3$. On aura

$$m_2 = 15,\ 12,\ 9,\ 6,\ 3,\ 0.$$

Pour $m_2 = 15$, on aurait un sous-groupe d'ordre 3 conjugué de lui-même.

Les opérations de $(G_2)^4$ permutables avec e devant former un groupe, les hypothèses $m_2 = 12,\ 9,\ 6$ sont exclues.

---

(1) *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

Soit $m_2 = 3$.

On aurait, par exemple,

$$e^3 = 1, \qquad ce = ec, \qquad de = ed,$$
$$\bar{c} = (a, b, ab).$$

On trouve ainsi $G^3_{12}(G_2)^2$.

Soit enfin $m_2 = 0$.

Appelons b la transformée de a par l'opération e :

$$ae = eb.$$

Soit ensuite $be = ec'$, et par suite $c'e = ea$.

On a

$$abc'e = eabc'; \qquad \text{donc} \qquad abc' = 1, \qquad c' = ab.$$

Bref, on pourra prendre pour $\bar{e}$ l'isomorphisme suivant :

$$\bar{e} = (a, b, ab)(c, d, cd)(ac, bd, abcd)(ad, bcd, abc)(bc, abd, acd).$$

Introduisons les exposants imaginaires de Galois.

Prenons la congruence fondamentale

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2).$$

On a vu que x, x^2, x^3, $x^3 + x^2 + x + 1$ appartiennent à l'exposant 5, $1 + x$ appartient à l'exposant 15.

Il en est de même de $1 + x^2 \equiv (1 + x)^2$, de $x + x^2 + x^3 \equiv (1 + x)^4$, de $(1 + x + x^2) \equiv (1 + x)^7$, de $1 + x^3 \equiv (1 + x)^8$, de $1 + x + x^3 \equiv (1 + x)^{11}$, de $x + x^2 \equiv (1 + x)^{13}$ et de $x + x^3 \equiv (1 + x)^{14}$.

Les deux seuls nombres appartenant à l'exposant 3 sont

$$1 + x^2 + x^3 \quad \text{et} \quad x^2 + x^3 \qquad [1 + x^2 + x^3 \equiv (1 + x)^5; \quad x^2 + x^3 \equiv (1 + x)^{10}].$$

Si l'on envisage le groupe des isomorphismes de $(G_2)^4$, ou plutôt le groupe des substitutions linéaires simplement isomorphe, j'observe que, puisqu'on a $m_2 = 0$, les substitutions d'ordre 3 correspondront à des congruences caractéristiques ayant toutes leurs racines imaginaires.

Cette congruence caractéristique sera donc

$$\sigma^4 + \sigma^3 + \sigma^2 + \sigma + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2)$$

ou

$$\sigma^4 + \sigma^3 + 1 \equiv 0$$

ou

$$\sigma^4 + \sigma^2 + 1 \equiv 0$$

ou

$$\sigma^4 + \sigma + 1 \equiv 0.$$

Cette congruence caractéristique est d'ailleurs donnée par la formule

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\sigma & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}+\sigma & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\sigma & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}+\sigma \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (^1).$$

G_{48}^{28} sera défini par les équations

$$a^{(2,\, x^4+x^3+x^2+x+1)} = b^3 = 1, \qquad ab = ba^{x^3+x^2}.$$

48. Le groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est $G_8^1 G_2$

$$a^4 = b^2 = c^2 = 1, \qquad ab = ba^3, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb.$$

4	a	a^3						ac	a^3c						
2	a^2	a^2	b	ab	a^2b	a^3b	c	a^2	a^2	a^2c	bc	abc	a^2bc	a^3bc

L'ordre du groupe des isomorphismes est 64.

En effet, on peut remplacer a par l'une des 4 opérations a, a^3, ac, a^3c; puis b par l'une des 8 opérations b, ab, a^2b, a^3b, bc, abc, a^2bc, a^3bc; enfin c par l'une des 2 opérations c, a^2c.

Cela fait en tout 64 isomorphismes.

Donc, il n'y a pas d'isomorphisme d'ordre premier impair.

Autrement : on a

$$m_4 \equiv 2 \pmod{p}, \qquad \text{donc} \qquad m_4 = 2;$$

donc l'opération d, d'ordre p, est permutable avec a et c.

Ensuite il y a 11 opérations d'ordre 2.

Si $p = 7$, m_2 est au moins égal à 4 (puisque d est permutable avec a^2, c, a^2c).

D'ailleurs m_2 ne peut pas être égal à 4 : il n'y a pas dans le groupe $G_8^1 G_2$ de sous-groupe d'ordre 5.

Si $p = 5$, l'hypothèse $m_2 = 6$ est inacceptable : il n'y a pas dans le groupe $G_8^1 G_2$ de sous-groupe d'ordre 7.

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. VII. — *Voir* aussi Chap. VIII.

Si $p = 3$, $m_2 = 8$, 5. C'est impossible : il n'y a pas dans $G_8^1 G_2$ de sous-groupe d'ordre 6, ou 9.

49. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est $G_8^2 G_2$:

$$a^2 = b^2 = \alpha, \qquad \alpha^2 = c^2 = 1, \qquad ab = ba\alpha, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb,$$

1	a	b	ab	$a\alpha$	$b\alpha$	$ab\alpha$		ac	bc	abc		$ac\alpha$	$bc\alpha$	a
1	α	α	α	α	α	α	c	α	α	α	$c\alpha$	α	α	

On peut remplacer a par l'une des douze opérations a, b, ab, $a\alpha$, $b\alpha$, $ab\alpha$, ac, bc, abc, $ac\alpha$, $bc\alpha$, $abc\alpha$; soit a' ; puis b par l'une des 8 opérations d'ordre 4 qui restent, après qu'on a effacé a', $a'c$, $a'\alpha$, $a'c\alpha$; enfin c peut être remplacé par l'une des deux opérations c, $c\alpha$.

Le groupe des isomorphismes est donc d'ordre

$$12.16 = 192.$$

D'après cela, il y a, dans le groupe des isomorphismes, une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 3.

Soit d une opération d'ordre 3. Je dis que d est nécessairement permutable avec α.

En effet, si d n'est pas permutable avec α, il n'est permutable avec aucune des opérations d'ordre 4, qui toutes ont pour carré α. On aurait, par exemple, $ad = da'$, a' étant d'ordre 4.

Mais on en déduit $a^2 d = da'^2$, donc $\alpha d = d\alpha$. Il y a contradiction. Donc d est permutable avec α, et, par suite, avec c et $c\alpha$.

Il y a six groupes d'ordre 4, donc on a

$$m_4 \equiv 6 \pmod 3 \quad (^1).$$

L'hypothèse $m_4 = 6$ doit être écartée (7 ne divise pas 16).

Donc $m_4 = 3$ ou $m_4 = 0$.

Soit $m_4 = 3$; si d est permutable avec a, b, ab, il est aussi permutable avec ac, bc, abc, donc on aurait $m_4 = 6$.

Mais, s'il est permutable avec ac, il est permutable avec a, puisqu'il est déjà permutable avec c.

Donc l'hypothèse $m_4 = 3$ doit être écartée.

(1) Loc. cit., le commencement du Chapitre VIII.

Reste $m_1 = 0$, qui donne $G_{21}^7 G_2$ (1),

$$a^2 = b^2 = x, \quad x^2 = c^2 = d^3 = 1,$$
$$ab = bax, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad dc = cd, \quad \bar{d} = (a, ab, b).$$

50. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^1 :

$$(a^8 = b^2 = 1, \ ab = ba^5).$$

Le Tableau des opérations est le suivant :

8	a	a^3	a^5	a^7		ab		a^3b		a^5b		a^7b
4	a^2	a^6	a^2	a^6		a^6	a^2b	a^2		a^6	a^6b	a^2
2	a^4	a^4	α^4	a^4	b	a^4	a^4	a^4	a^4b	a^4	a^4	a^4

On peut remplacer a par l'une des 8 opérations a, a^3, a^5, a^7, ab, a^3b, a^5b, a^7b, et b par l'une des 2 opérations b, a^4b, ce qui donne 16 pour l'ordre du groupe des isomorphismes; donc, il n'y a pas d'isomorphisme de degré impair.

51. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^4 (2) :

$$a^2 = b^2 = c^4 = 1, \quad ab = bac^2, \quad ac = ca, \quad bc = cb;$$

il a, pour Tableau de ses opérations,

4			ab			abc^2	c	c^3	ac	bc		ac^3	bc^3	
2	a	b	c^2	ac^2	bc^2	c^2	e^2	c^2	c^2	c^2	abc	c^2	c^2	abc^3

On peut remplacer a par l'une des 6 opérations a, b, ac^2, bc^2, abc, abc^2.

a étant ainsi remplacé par a', on peut choisir pour b l'une des 4 opérations qui restent quand on a supprimé a' et $a'c^2$. On peut enfin remplacer l'opération c par c ou c^3.

Cela fait en tout $48 = 3.2^4$ isomorphismes.

Il y aura donc, en particulier, une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 3.

On pourra, par exemple, prendre

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & abc & c \end{pmatrix}$$

(1) *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.
(2) *Loc. cit*, Chap. VI.

ou

$$\overline{d} = (a, b, abc)(ab, ac^2, bc^2)(ac^2, bc^2, abc^2)(ac, bc, abc^2).$$

Le groupe G_{48}^{29} est alors défini par les équations

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, \quad ab = bac^2, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad cd = dc,$$
$$\overline{d} = (a, b, abc).$$

52. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^2 :

$$a^4 = b^4 = 1, \quad ab = ba^3.$$

Le Tableau des opérations est ici, en posant $a^2 = \alpha$, $b^2 = \beta$, $ab = ba\alpha$:

4	a	$a\alpha$	b	ab	$b\alpha$	$ab\alpha$	$a\beta$		$a\alpha\beta$	$b\beta$	$ab\beta$	$b\alpha\beta$	$ab\alpha\beta$
2	α	α	β	β	β	β	α	$\alpha\beta$	α	β	β	β	β

a pourra être remplacé par l'une des 4 opérations a, $a\alpha$, $a\beta$, $a\alpha\beta$.
b » 8 b, ab, $b\alpha$, $ab\alpha$, $b\beta$, $ab\beta$, $b\alpha\beta$, $ab\alpha\beta$.

L'ordre du groupe des isomorphismes est 32.
Il n'y a pas d'isomorphisme d'ordre impair.

53. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^3 :

$$a^2 = \alpha, \quad b^2 = \alpha^2 = \beta^2 = 1, \quad ab = ba\beta,$$

4	a	$a\alpha$		ab		$ab\alpha$		$a\beta$	$a\alpha\beta$		$ab\beta$		$ab\alpha\beta$	
2	α	α	b	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	β	α	α	$b\beta$	$\alpha\beta$	$b\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$b\alpha$

a pourra être remplacé par l'une des 8 opérations a, $a\alpha$, ab, $ab\alpha$, $a\beta$, $a\alpha\beta$, $ab\beta$, $ab\alpha\beta$; b, par l'une des 4 opérations b, $b\beta$, $b\alpha$, $b\alpha\beta$.

Cela donne 32 pour l'ordre du groupe des isomorphismes.
Il n'y a pas d'isomorphisme d'ordre impair.

54. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^4 :

$$a^4 = b^2 = \alpha, \quad \alpha^2 = 1, \quad ab = ba^3\alpha.$$

8	a	a^3	$a\alpha$	$a^3\alpha$								
4	a^2	$a^2\alpha$	a^2	$a^2\alpha$	b	ab	a^2b	a^3b	$b\alpha$	$ab\alpha$	$a^2b\alpha$	$a^3b\alpha$
2	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α

a peut être remplacé par l'une des 4 opérations a, a^3, $a\alpha$, $a^3\alpha$, et b par l'une des 8 opérations $a^\lambda b$, $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

On a donc un groupe d'isomorphismes d'ordre 32.

Donc, pas d'isomorphisme d'ordre premier impair.

55. Le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^6 :

$$a^4 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba^3.$$

8	a	a^3	$a\alpha$	$a^3\alpha$								
4	a^2	$a^2\alpha$	a^2	$a^2\alpha$		ab		a^3b		$ab\alpha$		$a^3b\alpha$
2	α	α	α	α	b	α	a^2b	α	$b\alpha$	α	$a^2b\alpha$	α

On pourra remplacer a par l'une des 4 opérations $a^{2\lambda+1}$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$, et b, par l'une des 4 opérations $a^{2\lambda}b$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$.

Le groupe des isomorphismes est donc d'ordre 16.

Il n'y a pas d'isomorphismes d'ordre premier impair.

56. Enfin, le sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même est G_{16}^7 :

$$a^4 = \alpha, \qquad b^2 = \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba^3\alpha.$$

8	a	a^3	$a\alpha$	$a^3\alpha$								
4	a^2	$a^2\alpha$	a^2	$a^2\alpha$								
2	α	α	α	α	b	ab	a^2b	a^3b	$b\alpha$	$ab\alpha$	$a^2b\alpha$	$a^3b\alpha$

On pourra remplacer a par l'une des 4 opérations $a^{2\lambda+1}$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$, et b par l'une des 8 opérations $a^\lambda b$, $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Le groupe des isomorphismes est d'ordre 32.

Il n'y a donc pas d'isomorphisme d'ordre premier impair.

57. (C). Soit maintenant à considérer le cas où le groupe cherché d'ordre $16p$ n'admet ni sous-groupe d'ordre p conjugué de lui-même, ni sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même.

Alors $p = 7, 5$, ou 3 (*voir* n° 1).

Si $p = 5$, on a

$$16 = m(5h+1); \qquad \text{d'où} \qquad h = 3, \qquad m = 1,$$

il y a alors 16 sous-groupes conjugués d'ordre 5, d'où 64 opérations d'ordre 5.

Reste $80 - 64 = 16$ opérations; il y a donc nécessairement un sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même.

Le cas $p = 5$ peut donc être écarté.

58. Envisageons le cas $p = 7$.

L'ordre du groupe est

$$7.16 = 112.$$

Il y a 8 groupes conjugués d'ordre 7 (n° 1), donc 48 opérations d'ordre 7. Ensuite on a

$$16.7 = 16m(2h+1) \quad (^1).$$

Donc

$$7 = m(2h+1) \quad \text{avec} \quad h \neq 0.$$

Donc

$$h = 3.$$

Cela donne 7 groupes conjugués d'ordre 16.

Appelons n le nombre des opérations communes à tous ces groupes transformés d'ordre 16. On a

$$48 + 7(16 - n) + n \leqq 112$$

ou

$$48 - 6n \leqq 0,$$

$$n \geqq 8.$$

Or, d'autre part, n ne peut être supérieur à 8.

Donc

$$n = 8.$$

Ainsi, il y a un sous-groupe d'ordre 8, conjugué de lui-même.

Le sous-groupe conjugué de lui-même, d'ordre maximum, aura donc pour son ordre un multiple de 8.

Ce sera un groupe d'ordre 56.

Ce sous-groupe d'ordre 56 doit contenir un sous-groupe d'ordre 8 conjugué de lui-même, mais ne doit contenir aucun sous-groupe d'ordre 7 conjugué de lui-même.

Seul le groupe G_{56}^{8} (²) répond aux conditions imposées.

Remarquons, à cause de l'égalité

$$48 + 7.8 + 8 = 112,$$

que le groupe pourra contenir des opérations d'ordre 7, ou 16, ou 8, ou 4, ou 2, mais aucune opération d'un autre ordre (sauf l'opération identique).

(¹) *Loc. cit.*, n° 21, p. 18.

(²) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

On a

$$a^{(2,x^3+x+1)} = b^7 = 1, \qquad ab = ba^x,$$

$$a^x = b, \qquad a^{x^2} = c, \qquad a^{x^3} = a^{x+1} = ab, \qquad a^{x^4} = a^{x^2+x} = bc,$$

$$a^{x^5} \equiv a^{x^3+x^2} = a^{x^2+x+1} = abc,$$

$$a^{x^6} = a^{x^3+x^2+x} = a^{x^2+1} = ac, \qquad a^{x^7} = a^{x^3+x} = a,$$

donc

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^7 = 1, \qquad ab = ba, \qquad ac = ca, \qquad bc = cb,$$

$$\overline{d} = (a, b, c, ab, bc, abc, ac).$$

A ce groupe d'ordre 56, il faut adjoindre une opération e, d'ordre 2 ou 4 (puisque e^2 doit faire partie du groupe d'ordre 56).

De plus, e ne sera permutable avec aucune des opérations d'ordre 7, puisque autrement on aurait une opération d'ordre 14. D'après la remarque faite plus haut, cela est impossible.

Soit

$$de = ea^\lambda b^\mu c^\nu d^\rho,$$

$$(de)^2 = de^2 a^\lambda b^\mu c^\nu d^\rho.$$

Mais

$$e^2 = a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

donc

$$(de)^2 = d\alpha^{\lambda+\alpha} b^{\mu+\beta} c^{\nu+\gamma} d^\rho = d^{1+\rho} a^{\lambda'} b^{\mu'} c^{\nu'}.$$

Comme de doit être d'ordre 2 ou 4 (car on a vu que le groupe d'ordre 112 envisagé contient, comme opérations d'ordre 7, les 48 opérations d'ordre 7 du groupe G_{56}^8)

$$1 + \rho = 0, \qquad \rho = -1.$$

Donc

$$de = ea^\lambda b^\mu c^\nu d^{-1}.$$

Je dis que e ne peut être permutable à deux opérations d'ordre 2 que d transforme l'une dans l'autre.

En effet, soient m et m_1 deux opérations d'ordre 2, telles que l'on ait

$$me = em, \qquad m_1 e = em_1, \qquad md = dm_1.$$

On a, d'une part,

$$m\,de = ema^\lambda b^\mu c^\nu d^{-1},$$

et d'autre part

$$dm_1 e = ea^\lambda b^\mu c^\nu d^{-1} m_1.$$

Donc

$$m\,d^{-1} = d^{-1} m_1$$

ou

$$dm = m_1 d,$$

d'où

$$m d^2 = d m_1 d = d^2 m_1,$$

ce qui est inexact.

Considérons les 21 isomorphismes d'ordre 2 du groupe $\{a, b, c\}$ (1).

Ces 21 isomorphismes forment une suite complète unique de sous-groupes conjugués d'ordre 2.

Ils sont de la forme $(a, b)(c, abc)$.

Les 3 opérations d'ordre 2 qu'ils transforment chacune en elle-même forment un groupe avec l'opération identique.

Soit $[1, a_1, a_2, a_3]$ ce groupe.

On a

$$[1, a_1, a_2, a_3]\, d = d\,[1, a'_1, a'_2, a'_3],$$

d n'étant permutable à aucune opération d'ordre 2.

Donc a'_1 n'est pas égale à a_1, ni a'_2 à a_2, ni a'_3 à a_3.

D'ailleurs, il est impossible que a'_1, a'_2, a'_3 soient les opérations a_1, a_2, a_3 rangées dans un autre ordre, car, si l'on avait, par exemple, $a_1 d = d a_2$, e, d'après la remarque faite plus haut, ne serait permutable ni à a_1, ni à a_2.

Donc, il faut que les trois opérations a'_1, a'_2, a'_3 soient distinctes de a_1, a_2, a_3. Or ceci est impossible, car si l'on prend deux sous-groupes d'ordre 4 quelconques du groupe $\{a, b, c\}$, ils auront toujours deux opérations communes.

Bref, le groupe cherché n'existe pas.

59. Soit maintenant $p = 3$.

Il peut y avoir 16 ou 4 groupes transformés d'ordre 3 (n° 1). D'autre part

$$3 = m(2h + 1).$$

Comme on a $h \neq 0$, il y aura 3 groupes transformés d'ordre 16.

16 groupes transformés d'ordre 3 donnent 32 opérations d'ordre 3; il y aurait donc un sous-groupe d'ordre 16 conjugué de lui-même. L'hypothèse est à rejeter.

Ainsi, prenons le cas de 4 groupes transformés d'ordre 3.

Appelons d le nombre des opérations communes aux groupes transformés d'ordre 16.

On a

$$8 + 3(16 - d) + d \leqq 48$$

ou

$$8 - 2d \leqq 0, \qquad d \geqq 4.$$

Il y aura donc un sous-groupe d'ordre 4, ou d'ordre 8, conjugué de lui-même,

---

(1) *Loc. cit.*, Chap. VIII.

ce qui entraîne pour le groupe cherché un sous-groupe conjugué de lui-même maximum d'ordre 24.

Ce sous-groupe d'ordre 24 ne doit pas avoir de sous-groupe d'ordre 3 conjugué de lui-même.

Tels sont les groupes G_{24}^7, G_{24}^9, $G_{12}^3 G_2$ [1].

Prenons d'abord G_{24}^7 :

$$a^2 = b^2 = \alpha, \qquad c^3 = \alpha^2 = 1, \qquad ab = ba\alpha, \qquad \bar{c} = (a, ab, b).$$

Voici le Tableau des opérations :

4	a	$a\alpha$	b	$b\alpha$	ab	$ab\alpha$
2	α	α	α	α	α	α

6	ac	$c\alpha$	bc	abc
3	abc^2	c^2	ac^2	bc^2
2	α	α	α	α
3	$ac\alpha$	c	$bc\alpha$	$abc\alpha$
6	$abc^2\alpha$	$c^2\alpha$	$ac^2\alpha$	$bc^2\alpha$

Le groupe des isomorphismes cogrédients sera ici d'ordre 12; cela tient à la présence de l'opération α, qui est conjuguée d'elle-même dans le groupe considéré.

D'une façon générale, si G est un groupe, Γ le sous-groupe formé des opérations de G conjuguées d'elles-mêmes, le groupe des isomorphismes cogrédients sera simplement isomorphe à $\frac{G}{\Gamma}$.

Pour trouver le groupe total des isomorphismes, nous pourrons procéder comme il suit :

1° On choisit pour a l'une des six opérations a, $a\alpha$, b, $b\alpha$, ab, $ab\alpha$.

2° Soit a' l'opération choisie, on prendra pour b l'une des 6 opérations précédentes, à l'exception de a' et de $a'\alpha$; soit b'.

3° Parmi les 6 opérations d'ordre 3, c, c^2, ac^2, bc^2, abc^2, $ac\alpha$, $bc\alpha$, $abc\alpha$, il faudra choisir une opération c' telle que

$$c' = (a', a'b', b').$$

---

[1] *Loc. cit.*, fin du Chapitre VIII.

Or, écrivons d'abord le groupe des isomorphismes cogrédients :

$$\overline{a} = (c,\ abc\alpha)(b,\ b\alpha)(c\alpha,\ abc)(c^2,\ bc^2)(c^2\alpha,\ bc^2\alpha)(ac,\ bc)(ac\alpha,\ bc\alpha)(ac^2,\ abc^2)(ac^2\alpha,\ abc^2\alpha)(ab,\ ab\alpha),$$

$$\overline{b} = (c,\ ac\alpha)(a,\ a\alpha)(c\alpha,\ ac)(c^2,\ abc^2)(c^2\alpha,\ abc^2\alpha)(bc,\ abc)(bc\alpha,\ abc\alpha)(bc^2,\ ac^2)(bc^2\alpha,\ ac^2\alpha)(ab,\ ab\alpha),$$

$$\overline{ab} = (c,\ bc\alpha)(b,\ b\alpha)(a,\ a\alpha)(c\alpha,\ bc)(abc,\ ac)(c^2,\ ac^2)(bc^2,\ abc^2)(c^2\alpha,\ ac^2\alpha)(bc^2\alpha,\ abc^2\alpha)(abc\alpha,\ ac\alpha),$$

$$\overline{c} = (a,\ ab,\ b)(a\alpha,\ ab\alpha,\ b\alpha)(ac,\ abc,\ bc)(ac\alpha,\ abc\alpha,\ bc\alpha)(ac^2,\ abc^2,\ bc^2)(ac^2\alpha,\ abc^2\alpha,\ bc^2\alpha),$$

$$\overline{ac} = (a,\ ab,\ b\alpha)(a\alpha,\ ab\alpha,\ b)(c,\ bc\alpha,\ abc\alpha)(c\alpha,\ bc,\ abc)(c^2,\ ac^2,\ bc^2)(c^2\alpha,\ ac^2\alpha,\ bc^2\alpha),$$

$$\overline{bc} = (a,\ ab\alpha,\ b)(a\alpha,\ ab,\ b\alpha)(c,\ abc\alpha,\ ac\alpha)(c\alpha,\ abc,\ ac)(c^2,\ bc^2,\ abc^2)(c^2\alpha,\ bc^2\alpha,\ abc^2\alpha),$$

$$\overline{abc} = (a,\ ab\alpha,\ b\alpha)(a\alpha,\ ab,\ b)(c,\ ac\alpha,\ bc\alpha)(c\alpha,\ ac,\ bc),(c^2,\ abc^2,\ ac^2)(c^2\alpha,\ abc^2\alpha,\ ac^2\alpha),$$

$$\overline{c^2} = (a,\ b,\ ab)(a\alpha,\ b\alpha,\ ab\alpha)(ac,\ bc,\ abc)(ac\alpha,\ bc\alpha,\ abc\alpha)(ac^2,\ bc^2,\ abc^2)(ac^2\alpha,\ bc^2\alpha,\ abc^2\alpha),$$

$$\overline{ac^2} = (a,\ b,\ ab\alpha)(a\alpha,\ b\alpha,\ ab)(c,\ ac\alpha,\ abc\alpha)(c\alpha,\ ac,\ abc)(c^2,\ abc^2,\ bc^2)(c^2\alpha,\ abc^2\alpha,\ bc^2\alpha).$$

$$\overline{bc^2} = (a,\ b\alpha,\ ab\alpha)(a\alpha,\ b,\ ab)(c,\ bc\alpha,\ ac\alpha)(c\alpha,\ bc,\ ac)(c^2,\ ac^2,\ abc^2)(c^2\alpha,\ ac^2\alpha,\ abc^2\alpha),$$

$$\overline{abc^2} = (a,\ b\alpha,\ ab)(a\alpha,\ b,\ ab\alpha)(c,\ abc\alpha,\ bc\alpha)(c\alpha,\ abc,\ bc)(c^2,\ bc^2,\ ac^2)(c^2\alpha,\ bc^2\alpha,\ ac^2\alpha).$$

D'après la manière indiquée plus haut pour former les isomorphismes, si l'on fait $a' = a$, $b' = b$, on a

$$c' = c.$$

Si $a' = a$, $b' = b\alpha$, alors

$$c' = (a,\ ab\alpha,\ b\alpha), \qquad \text{donc} \qquad c' = abc\alpha.$$

On retrouve ainsi l'isomorphisme cogrédient $\overline{a}$.

Soit $a' = a$, $b' = ab$, alors

$$c' = (a,\ b\alpha,\ ab),$$

donc

$$c' = abc^2.$$

On a alors

$$\bar{d} = (b, ab, b\alpha, ab\alpha)(c, abc^2, abc\alpha, ac^2)$$
$$(ac, bc^2\alpha, bc, c^2\alpha)(c\alpha, abc^2\alpha, abc, ac^2\alpha)(ac\alpha, bc^2, bc\alpha, c^2).$$

$\left[\text{En effet, } \bar{d} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & ab & abc^2 \end{pmatrix}.\right]$

On voit maintenant que l'on a

$$\bar{d}^2 = \bar{a}.$$

Vient ensuite

$$\overline{ad} = \bar{d}^3 = (b, ab\alpha, b\alpha, ab)(c, ac^2, abc\alpha, abc^2)(ac, c^2\alpha, bc, bc^2\alpha)$$
$$(c\alpha, ac^2\alpha, abc, abc^2\alpha)(ac\alpha, c^2, bc\alpha, bc^2)\ldots,$$

Le groupe des isomorphismes est d'ordre $24 = 3.2^3$.

Il en résulte que les sous-groupes d'ordre 3 formeront une suite complète unique de sous-groupes conjugués.

Cela posé, il s'agit d'obtenir un groupe d'ordre 48, dans lequel le sous-groupe G_{24}^7 envisagé soit un sous-groupe conjugué de lui-même.

On a d'abord le groupe $G_{24}^7 G_2$ déjà trouvé.

Si l'on veut prendre une opération d, d'ordre 4, permutable avec toutes les opérations de G_{24}^7, il faudra que l'on ait

$$d^2 = \alpha.$$

Mais alors, on aura

$$ad = da, \qquad a^2 = d^2 = \alpha.$$

Donc $ad = d'$ sera d'ordre 2.

On retrouve $G_{24}^7 G_2$.

Si l'opération d donne le même isomorphisme que a, par exemple, alors on aurait $ad = da$.

Ensuite ad serait permutable avec toutes les opérations de G_{24}^7, et serait d'ordre 2 ou 4.

C'est un cas déjà examiné.

L'isomorphisme fourni par d sera donc un isomorphisme contragrédient.

60. Étudions de plus près le groupe des isomorphismes de G_{24}^7.

C'est un groupe d'ordre 24 qui ne contient pas de sous-groupe d'ordre 3 conjugué de lui-même.

Il y a donc une suite complète de 4 sous-groupes conjugués d'ordre 3.

Or continuons l'énumération des isomorphismes; on a encore

$$\overline{bd} = (a, a\alpha)(b, ab)(ac, abc^2\alpha)(c\alpha, bc^2\alpha)(c^2\alpha, abc)(bc, ac^2\alpha)$$
$$(ac\alpha, abc^2)(c, bc^2)(c^2, abc\alpha)(ac^2, bc\alpha)(ab\alpha, b\alpha),$$

$$\overline{abd} = (a, a\alpha)(b, ab\alpha)(b\alpha, ab)(c\alpha, c^2\alpha)(bc, abc^2\alpha)(abc, bc^2\alpha)$$
$$(ac, ac^2\alpha)(c, c^2)(bc\alpha, abc^2)(abc\alpha, bc^2)(ac\alpha, ac^2),$$

$$\overline{cd} = (a, b\alpha, a\alpha, b)(c, abc^2, bc\alpha, bc^2)(c\alpha, abc^2\alpha, bc, bc^2\alpha)$$
$$(c^2, ac\alpha, ac^2, abc\alpha)(c^2\alpha, ac, ac^2\alpha, abc),$$

$$\overline{acd} = (a, b\alpha)(ab, ab\alpha)(a\alpha, b)(c, c^2)(c\alpha, c^2\alpha)(bc\alpha, ac^2)(bc, ac^2\alpha)$$
$$(abc\alpha, abc^2)(abc, abc^2\alpha)(bc^2ac\alpha)(bc^2\alpha, ac),$$

$$\overline{bcd} = (a, b)(a\alpha, b\alpha)(ab, ab\alpha)(c, ac^2)(c\alpha, ac^2\alpha)(abc, bc^2\alpha)(abc\alpha, bc^2)$$
$$(ac, abc^2\alpha)(ac\alpha, abc^2)(c^2, bc\alpha)(c^2\alpha, bc),$$

$$\overline{abcd} = (a, b, a\alpha, ba)(c, bc^2, bc\alpha, abc^2)(c\alpha, bc^2\alpha, bc, abc^2\alpha)$$
$$(c^2, abc\alpha, ac^2, ac^2\alpha)(c^2\alpha, abc, ac^2\alpha, ac),$$

$$\overline{c^2d} = (a, ab)(a\alpha, ab\alpha)(b, b\alpha)(c, abc^2)(c\alpha, abc^2\alpha)(ac, c^2\alpha)(ac\alpha, c^2)$$
$$(bc, ac^2\alpha)(bc\alpha, ac^2)(abc, bc^2\alpha)(abc\alpha, bc^2),$$

$$\overline{ac^2d} = (a, ab, a\alpha, ab\alpha)(c, bc^2, ac\alpha, ac^2)(c\alpha, bc^2\alpha, ac, ac^2\alpha)$$
$$(abc, abc^2\alpha, bc, c^2\alpha)(abc\alpha, abc^2, bc\alpha, c^2),$$

$$\overline{bc^2d} = (a, ab\alpha)(a\alpha, ab)(b, b\alpha)(c, c^2)(c\alpha^2, c^2\alpha)(bc, bc^2\alpha)$$
$$(ac, abc^2\alpha)(ac\alpha, abc^2)(ac^2, abc\alpha)(ac^2\alpha, abc),$$

$$\overline{abc^2d} = (a, ab\alpha, a\alpha, ab)(c, ac^2, ac\alpha, bc^2)(c\alpha, ac^2\alpha, ac, bc^2\alpha)$$
$$(abc, c^2\alpha, bc, abc^2\alpha)(abc\alpha, c^2, bc\alpha, abc^2).$$

Soit

$$\overline{bd} = a', \qquad \bar{c} = b'.$$

On a

$$a'^2 = 1, \qquad b'^3 = 1,$$

$$a'b' = (a, ab\alpha, a\alpha, ab)(c, ac^2, ac\alpha, bc^2)(ac, bc^2\alpha, c\alpha, ac^2\alpha)$$
$$(abc^2\alpha, abc, c^2\alpha, bc)(abc^2, abc\alpha, c^2, bc\alpha).$$

Donc

$$a'^2 = b'^3 = 1, \qquad (a'b')^4 = 1.$$

Donc, le groupe des isomorphismes de G_{24}^7 est isomorphe avec le groupe G_{24}^9, ou le groupe symétrique de 4 lettres.

61. Le groupe G_{24}^9 est bien connu : on voit donc, par cette remarque qui termine le n° 60, que les isomorphismes contragrédients d'ordre 4 du groupe G_{24}^7 forment une suite complète de 3 groupes conjugués d'ordre 4.

Les isomorphismes contragrédients d'ordre 2 forment une suite complète de 6 groupes conjugués d'ordre 2.

Prenons d'abord un isomorphisme contragrédient d'ordre 4.

(Puisque $\overline{d^2} = \bar{a}$, on aura $d^2 = a$, $d^4 = a^2 = \alpha$.)

Posons

$$a^4 = b^2 = \alpha, \quad c^3 = \alpha^2 = 1.$$

$$\bar{a} = (b,\ a^2 b,\ b\alpha,\ a^2 b\alpha)(c,\ a^2 bc^2,\ a^2 bc\alpha,\ a^2 c^2)(a^2 c,\ bc^2\alpha,\ bc,\ c^2\alpha),$$
$$(c\alpha,\ a^2 bc^2\alpha,\ a^2 bc,\ a^2 c^2\alpha,)(a^2 c\alpha,\ bc^2,\ bc\alpha,\ c^2);$$

$$\bar{c} = (a^2,\ a^2 b,\ b)(a^2\alpha,\ a^2 b\alpha,\ b\alpha)(a^2 c,\ a^2 bc,\ bc)(a^2 c\alpha,\ a^2 bc\alpha,\ bc\alpha),$$
$$(a^2 c^2,\ a^2 bc^2,\ bc^2)(a^2 c^2\alpha,\ a^2 bc^2\alpha,\ bc^2\alpha).$$

D'ailleurs on a

$$ac = a^2 c^2 a = a^2 c.ca = ca^2 bca = ca^3 c^2\alpha,$$

$$a^3 c^2\alpha.c = a^3\alpha = c.c^2 a^3\alpha = c.a^3 bc,$$

$$a^3 bc.c = a^3 bc^2 = a^2 ca^2 c = aca^2 ba^2 c = acbc = ca^3 c^2\alpha bc = ca^3 c^2\alpha ca^2 = ca.$$

On a donc

$$\bar{c} = (a,\ a^3 c^2\alpha,\ a^3 bc).$$

Posons $ab = b'$, d'où

$$a^8 = 1, \quad b'^2 = 1,$$

car

$$ab = a^2 ba\alpha, \quad b = aba^5, \quad ab = ba^3,$$
$$(ab)^2 = ab^2 a^3 = a^4 b^2 = \alpha^2 = 1.$$

On a donc

$$a^8 = b'^2 = 1, \quad ab' = b'a^3,$$

puis

$$\bar{c} = (a,\ a^7 c^2,\ a^2 b'c)(b',\ b'c^2,\ b'c),$$

car

$$abc = aca^2 = ca^7 c^2 a^2 = ca^7.a^2 bc^2 = c.abc^2 = cb'c^2,$$

$$b'c^2.c = b' = c.c^2 b' = c.c^2 ab = c.a^7 c^2.c^2 b = c.a^7 cb = c.a^7 a^2 bc = c.abc = cb'c,$$

enfin

$$b'c.c = b'c^2 = abc^2 = abc.c = aca^2 c = ca^7 c^2 a^2 c = ca^7.a^2 bc^3 = cb'.$$

Le groupe G_{48}^{30} sera donc défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^3 = 1, \quad ab = ba^3,$$

$$\bar{c} = (a,\ a^7 c^2,\ a^2 bc)(b,\ bc^2,\ bc).$$

62. Prenons maintenant un isomorphisme contragrédient, d'ordre 2.

Soient $a^2 = b^2 = \alpha$, $c^3 = \alpha^2 = 1$, $ab = ba\alpha$, $\bar{c} = (a, ab, b)$. $d^2 = \alpha^m$,

$$\begin{aligned}\bar{d} = {} & (a, a\alpha)(b, ab)(ac, abc^2\alpha)(c\alpha, abc^2\alpha)(c\alpha, bc^2\alpha)(c^2\alpha, abc)\\ & (bc, ac^2\alpha)(ac\alpha, abc^2)(c, bc^2)(c^2, abc\alpha)(ac^2, bc\alpha)(ab\alpha, b\alpha).\end{aligned}$$

Considérons l'opération $bd = d'$.

On a

$$bd = dab,$$
$$(bd)^2 = bd^2 ab = bab\alpha^m = ab^2\alpha^{m+1} = a\alpha^m.$$

Donc

$$d'^2 = a\alpha^m, \qquad a = d'^2\alpha^m,$$
$$d'^4 = a^2 = \alpha.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\bar{d'} = {} & (b, ab, b\alpha, ab\alpha)(c, abc^2, abc\alpha, ac^2)\\ & (c\alpha, abc^2\alpha, abc, ac^2\alpha)(c^2, ac\alpha, bc^2, bc\alpha)\\ & (c^2\alpha, ac, bc^2\alpha, bc).\end{aligned}$$

On retrouve, par conséquent, le groupe G_{48}^{30}.

63. Je me propose, avant de terminer la discussion, d'énumérer les opérations de ce groupe G_{48}^{30} (¹).

G_{48}^{30} est défini par les équations

$$a^8 = b^2 = c^3 = 1, \qquad ab = ba^3,$$
$$\bar{c} = (a, a^7c^2, a^2bc)(b, bc^2, bc).$$

On a d'abord le Tableau I :

8	a	a^3				
4	a^2	$a^2\alpha$		ab		a^3b
2	α	α	b	α	a^2b	α

ce qui donne

4	opérations d'ordre	8,
6	»	4,
5	»	2.

Maintenant $(ac)^2 = acac$, mais

$$a^2bc.c = ca, \qquad ca = a^2bc^2;$$

(¹) Le lecteur désireux de suivre simplement la discussion pourra passer ce numéro.

donc

$$(ac)^2 = a\,.\,a^2bc^2\,.\,c = a^3b,$$

$$(ac)^3 = a^3bac = a^6bc = a^2bc\alpha,$$

$$(ac)^4 = \alpha, \qquad (ac)^5 = ac\alpha, \qquad (ac)^6 = a^3b\alpha.$$

On a

$$\begin{aligned}\bar{c} = {} & (a^2, ab, a^3b\alpha)(a^2c, abc, a^3bc\alpha)(a^2c^2, abc^2, a^3bc^2\alpha)(a, a^3c^2\alpha, a^2bc)\\ & (a^2\alpha, ab\alpha, a^3b)(a^2c\alpha, abc\alpha, a^3bc)(a^2c^2\alpha, abc^2\alpha, a^3bc^2)(a\alpha, a^3c^2, a^2bc\alpha)\\ & (b, bc^2, bc)(a^3, a^2bc^2\alpha, ac\alpha)(ac^2, a^3c\alpha, a^2b)\\ & (b\alpha, bc^2\alpha, bc\alpha)(a^3\alpha, a^2bc^2, ac)(ac^2\alpha, a^3c, a^2b\alpha).\end{aligned}$$

En effet, puisque

$$ac = ca^3c^2\alpha, \qquad a^2c = cab,$$

on a

$$(a^3c^2\alpha)^2 = ab;$$

donc

$$(a^3c^2\alpha)^3 = aba^3c^2\alpha = a^2bc^2\alpha.$$

De même

$$(a^2bc)^2 = a^3b\alpha, \qquad (a^2bc)^3 = a^3ba^2bc\alpha = a^9b^2c\alpha = ac\alpha.$$

On peut écrire le Tableau II :

8	ac	$a^2bc\alpha$	a^3c^2	a^2bc^2
4	a^3b	$a^3b\alpha$	ab	$ab\alpha$
2	α	α	α	α

ce qui donne

8 opérations d'ordre 8.

Maintenant

$$(a^2c)^2 = a^2ca^2c = a^2\,.\,a^3b\alpha\,.\,c^2 = abc^2,$$

$$(a^2c)^3 = a^2cabc^2 = a^2\,.\,a^2c\,.\,c^2 = \alpha.$$

De là le Tableau III :

6	a^2c	abc	$c\alpha$	$a^3bc\alpha$
3	abc^2	$a^3bc^2\alpha$	c^2	a^2c^2
2	α	α	α	α
3	$a^2c\alpha$	$abc\alpha$	c	a^3bc
6	$abc^2\alpha$	a^3bc^2	$c^2\alpha$	$a^2c^2\alpha$

qui donne

$$8 \quad \text{opérations d'ordre} \quad 6$$

et

$$8 \quad \text{opérations d'ordre} \quad 3.$$

Puis enfin le Tableau IV :

$$2 \;\| \; a^3c \mid bc \mid bc^2 \mid ac^2 \;\|$$

qui donne

$$8 \quad \text{opérations d'ordre} \quad 2.$$

Ces deux Tableaux sont justifiés par les égalités suivantes :

$$(a^3c)^2 = a^3ca^3c = a^3.ac\alpha.c^2 = 1.$$
$$(bc)^2 = bcbc = b.bc^2.c = 1,$$

$$\begin{cases} (abc)^2 = abcabc = ab.a^2c^2 = a^7bc^2 = a^3bc^2\alpha, \\ (abc)^3 = abca^3bc^2\alpha = ab.abc\alpha.c^2\alpha = \alpha; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^3bc)^2 = a^3bca^3bc = a^3b.abc\alpha.c = a^2c^2, \\ (a^3bc)^3 = a^3bca^2c^2 = a^3b.a^3b\alpha = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^3c^2)^2 = a^3c^2a^3c^2 = a^3.a^2bc\alpha.c^2 = ab, \\ (a^3c^2)^3 = aba^3c^2 = a^2bc^2; \end{cases}$$

$$(bc^2)^2 = bc^2bc^2 = b.bc.c^2 = 1,$$
$$(ac^2)^2 = ac^2ac^2 = a.a^3c\alpha.c^2 = 1.$$

Le groupe G_{18}^{30} a donc

12	opérations d'ordre	8,
6	»	4,
13	»	2,
8	»	6,
8	»	3.

64. Passons au groupe $G_{12}^{3}G_2$, défini par les équations

$$a^2 \quad b^2 \quad c^3 \quad d^2 = 1, \qquad ab = ba, \qquad ad = da, \qquad bd = db, \qquad cd = cd,$$

$$\bar{\bar{c}} = (a, b, ab), \qquad \overline{c^2} = (a, ab, b).$$

Voici d'abord le Tableau des opérations :

2	a, b, d, ab, ad, bd, abd			
6	cd	acd	bcd	$abcd$
3	c^2	bc^2	abc^2	ac^2
2	d	d	d	d
3	c	ac	bc	abc
6	c^2d	bc^2d	abc^2d	ac^2d

car

$$\begin{cases} (ac)^2 = acac = a.abc^2 = bc^2, \\ acbc^2 = a.ac.c^2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} bc.bc = b.ac.c = abc^2, \\ bc.abc^2 = b.bc.c^2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} abc.abc = ab.bc.c = ac^2, \\ abc.ac^2 = ab.abc^3 = 1. \end{cases}$$

65. Cherchons tous les isomorphismes de $G_{12}^3 G_2$.

Écrivons d'abord les isomorphismes cogrédients.

Soit l'opération a; elle est permutable avec b et d :

$$ca = abc, \qquad bca = babc = ac,$$
$$c^2a = bc^2 = a.abc^2, \qquad abc^2a = ab.bc^2 = ac^2.$$

Donc on a

$$\bar{a} = (c, bc)(c^2, abc^2)(ac, abc)(ac^2, bc^2)(cd, bcd)(c^2d, abc^2d)(acd, abcd)(ac^2d, bc^2d),$$
$$cb = ac = b.abc, \qquad c^2b = abc^2 = b.ac^2.$$

Donc

$$\overline{b} = (c, abc)(c^2, ac^2)(bc, ac)(bc^2, abc^2), (cd, abcd)(c^2d, ac^2d)(bcd, acd)(bc^2d, abc^2d),$$
$$\overline{ab} = (c, ac)(c^2, bc^2)(abc, bc)(abc^2, ac^2)(cd, acd)(c^2d, bc^2d)(abcd, bcd)(abc^2d, ac^2d),$$
$$\overline{c} = (a, b, ab)(ac, bc, abc)(ac^2, bc^2, abc^2)(ad, bd, abd)(acd, bcd, abcd)(ac^2d, bc^2d, abc^2d),$$
$$\overline{c^2} = (a, ab, b)(ac, abc, bc)(ac^2, abc^2, bc^2)(ad, abd, bd)(acd, abcd, bcd)(ac^2d, abc^2d, bc^2d),$$
$$\overline{ac} = (a, b, ab)(c, abc, bc)(c^2, ac^2, abc^2)(ad, bd, abd)(cd, abcd, bcd)(c^2d, ac^2d, abc^2d),$$
$$\overline{bc} = (a, b, ab)(c, ac, abc)(c^2, bc^2, ac^2)(ad, bd, abd)(cd, acd, abcd)(c^2d, bc^2d, ac^2d),$$
$$\overline{abc} = (a, b, ab)(c, bc, ac)(c^2, abc^2, bc^2)(ad, bd, abd)(cd, bcd, acd)(c^2d, abc^2d, bc^2d),$$
$$\overline{ac^2} = (a, ab, b)(c, ac, bc)(c^2, bc^2, abc^2)(ad, abd, bd)(cd, acd, bcd)(c^2d, bc^2d, abc^2d),$$
$$\overline{bc^2} = (a, ab, b)(c, bc, abc)(c^2, abc^2, ac^2)(ad, abd, bd)(cd, bcd, abcd)(c^2d, abc^2d, ac^2d),$$
$$\overline{abc^2} = (a, ab, b)(c, abc, ac)(c^2, ac^2, bc^2)(ad, abd, bd)(cd, abcd, acd)(c^2d, ac^2d, bc^2d).$$

Nous pouvons maintenant énumérer les suites complètes d'opérations conjuguées du groupe.

(1). L'opération identique. (2). L'opération d.
(3). a, b, ab. (4). ad, bd, abd.
(5). c, bc, abc, ac. (6). c^2, abc^2, ac^2, bc^2.
(7). cd, bcd, $abcd$, acd. (8). c^2d, abc^2d, ac^2d, bc^2d.

Dans chaque isomorphisme l'opération d joue un rôle à part et ne pourra être remplacée que par elle-même.

a pourra être remplacé par a, b, ab (3 combinaisons possibles).

Soit a' l'opération choisie pour a.

b pourra être prise parmi les 3 opérations a, b, ab, à l'exclusion de l'opération a' (2 combinaisons possibles).

Appelons b' l'opération choisie pour b.

Reste à choisir c' par la condition

$$\overline{c'} = (a', b', a'b') \qquad \text{(4 combinaisons possibles).}$$

En tout, il y a 24 isomorphismes.

Nous venons de dire que a ne peut être remplacé que par a, b, ou ab.

On peut se demander pourquoi il est impossible de remplacer a par ad, par exemple.

Soit, je suppose, $a' = ad$, $b' = bd$, alors

$$a'b' = ab.$$

Mais il n'existe pas d'opération c' telle que

$$\overline{c'} = (ad, bd, ab),$$

et il est clair que, sur trois opérations d'ordre 2 telles que l'une soit le produit des deux autres, il y en aura deux (ou il n'y en aura aucune) contenant d, jamais trois.

Cela posé, on a

$$\overline{f} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & ab & c^2 \end{pmatrix} = (b, ab)(c, c^2)(bd, abd)(cd, c^2d)(ac, ac^2)$$
$$(acd, ac^2d)(bc^2, abc)(bc^2d, abcd)(bc, abc^2)(bcd, abc^2d).$$

Puis

$$\overline{acf} = (a, ab)(c, bc^2, abc, abc^2)(c^2, ac, ac^2, bc)$$
$$(ad, abd)(cd, bc^2d, abcd, abc^2d)(c^2d, acd, ac^2d, bcd).$$

Voici, d'après cela, les suites complètes d'opérations conjuguées :

(1). L'opération identique,

(2). a, b, ab,

(3). c, bc, ac, abc, c^2, bc^2, ac^2, abc^2,

(4). d, ad, cd, c^2d, bcd, abc^2d,

(5). bd, abd; acd, $abcd$; ac^2d, bc^2d.

Y a-t-il des isomorphismes contragrédients?

Cherchons l'ordre total du groupe des isomorphismes.

On pourra prendre pour a l'une des trois opérations a, b, ab (3 combinaisons possibles).

Soit a' l'opération choisie pour a.

On pourra prendre ensuite pour b l'une des deux opérations qui restent, après qu'on a supprimé a' (2 combinaisons possibles).

Soit b' l'opération choisie pour b.

Il faudra ensuite choisir c parmi les 8 opérations

$$c,\quad bc,\quad ac,\quad abc,\quad c^2,\quad bc^2,\quad ac^2,\quad abc^2,$$

de façon que, en appelant c' l'opération choisie pour c, on ait

$$c' = (a', b', a'b') \qquad \text{(4 combinaisons possibles).}$$

Enfin d devra être choisi parmi les 6 opérations

$$d,\quad ad,\quad cd,\quad c^2d,\quad bcd,\quad abc^2d,$$

de façon que, en appelant d' l'opération choisie, on ait

$$d' = (a', a'b')(c', c'^2),$$

d' sera ainsi complètement déterminé.

L'ordre du groupe des isomorphismes est donc 24.

Autrement : partons des équations de définition

$$a'^2 = b'^3 = 1, \qquad (a'b')^4 = 1.$$

Prenons pour b' l'une des huit opérations d'ordre 3.

Parmi les opérations de la suite (4) il y en a trois qui, avec l'une des opérations de la suite (3), donnent comme produit une opération d'ordre 4.

Par exemple, avec c, il faut prendre ad, ou bcd, ou abc^2d, car

$$cad = abcd, \qquad cbcd = ac^2d, \qquad cabc^2d = bd.$$

Donc l'ordre du groupe des isomorphismes est bien 24.

Il n'y a pas d'isomorphismes contragrédients.

On appelle *groupe complet* un groupe qui n'admet pas d'opération conjuguée d'elle-même, à l'exception de l'opération identique, et qui n'a pas d'isomorphismes contragrédients.

Le groupe G_{24}^{9} est donc un groupe complet ([1]).

Le théorème suivant a d'ailleurs été démontré ([2]) :

Un groupe qui contient un groupe complet comme sous-groupe conjugué de lui-même est le produit direct du groupe complet et d'un autre groupe.

Il en résulte que le seul groupe possible d'ordre 48 admettant G_{24}^{9} comme sous-groupe conjugué de lui-même est $G_{24}^{9}G_2$.

Résumé des groupes d'ordre 16p (p premier impair).

$$G_{16p} = G_{16}G_p, \qquad G_8G_2G_p = G_{8p}G_2 = G_{2p}G_8,$$

$$G_{8p}^{1}G_2, \quad G_{8p}^{2}G_2, \quad G_{8p}^{3}G_2, \quad G_{2p}^{1}G_8,$$

$$(G_4)^2G_p = G_{4p}G_4, \qquad G_{4p}^{1}G_4, \qquad G_{4p}^{2}G_4,$$

$$G_4(G_2)^2G_p = G_{4p}(G_2)^2 = G_{2p}G_4G_2,$$

$$G_{4p}^{1}(G_2)^2, \quad G_{4p}^{2}(G_2)^2, \quad G_{2p}^{1}G_4G_2,$$

$$G_p(G_2)^4 = G_{2p}(G_2)^3, \qquad G_{2p}^{1}(G_2)^3,$$

$$G_8^{1}G_2G_p = G_8^{1}G_{2p}, \qquad G_{8p}^{4}G_2, \qquad G_{8p}^{5}G_2, \qquad G_8^{1}G_{2p}^{1},$$

$$G_8^{2}G_2G_p = G_8^{2}G_{2p}, \qquad G_{8p}^{6}G_2, \qquad G_8^{2}G_{2p}^{1},$$

$$G_{16}^{1}G_p, \quad G_{16}^{2}G_p, \quad G_{16}^{3}G_p, \quad G_{16}^{4}G_p, \quad G_{16}^{5}G_p, \quad G_{16}^{6}G_p, \quad G_{16}^{7}G_p,$$

$$G_{12}^{3}G_4, \quad G_{12}^{3}(G_2)^2, \quad G_{36}^{8}G_2, \quad G_{24}^{7}G_2, \quad G_{24}^{9}G_2.$$

G_{16p}^{1} $[a^{16} = b^p = 1,\ ba = ab^{\alpha},\ \alpha$ appartient à l'exposant 2 (mod p)],

G_{16p}^{2} $[a^{16} = b^p = 1,\ ba = ab^{\alpha},\ \alpha$ appartient à l'exposant 4 (mod p)],

G_{16p}^{3} $[a^{16} = b^p = 1,\ ba = ab^{\alpha},\ \alpha$ appartient à l'exposant 8 (mod p)],

G_{16p}^{4} $[a^{16} = b^p = 1,\ ba = ab^{\alpha},\ \alpha$ appartient à l'exposant 16 (mod p)],

G_{16p}^{5} $[a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba,\ ca = ac^{\alpha},\ cb = bc^{-1},$
α appartient à l'exposant 4 (mod p)],

([1]) *Voir* O. HÖLDER, *Bildung zusammengesetzter Gruppen* (*Math. Ann.*, Vol. XLVI, 1895, p. 325).

([2]) *Voir* BURNSIDE, *Theory of Groups of finite order*, théorème V, § 163.

G^{6}_{16p} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^5,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G^{7}_{16p} $[a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^5,\ ca = ac^{\alpha},\ cb = bc$,
α appartient à l'exposant $4 \pmod{p}]$,

G^{8}_{16p} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^5,\ ca = ac,\ cb = bc^{-1})$,

G^{9}_{16p} $[a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^5,\ ca = ac^{\alpha},\ cb = bc^{-1}$
α appartient à l'exposant $4 \pmod{p}]$,

G^{10}_{16p} $(a^2=b^2=c^4=d^p=1,\ ac=ca,\ bc=cb,\ ab=bac^2,\ da=ad,\ db=bd,\ dc=cd^{-1})$,

G^{11}_{16p} $(a^2=b^2=c^4=d^p=1,\ ac=ca,\ bc=cb,\ ab=bac^2,\ da=ad,\ db=bd^{-1},\ dc=cd)$,

G^{12}_{16p} $(a^2=b^2=c^4=d^p=1,\ ac=ca,\ bc=cb,\ ab=bac^2,\ da=ad^{-1},\ db=bd^{-1},\ dc=cd)$,

G^{13}_{16p} $(a^4 = b^4 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G^{14}_{16p} $(a^4 = b^4 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac,\ cb = bc^{-1})$,

G^{15}_{16p} $[a^4 = b^4 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac,\ cb = bc^{\alpha}$,
α appartient à l'exposant $4 \pmod{p}]$,

G^{16}_{16p} $(a^4= b^2=c^2=d^p=1,\ ac=ca,\ bc=cb,\ ab=bac,\ da=ad^{-1},\ db=bd,\ dc=cd)$,

G^{17}_{16p} $[a^4= b^2=c^2=d^p=1,\ ac=ca,\ bc=cb,\ ab=bac,\ da=ad^{\alpha},\ db=bd,\ dc=cd$,
α appartient à l'exposant $4 \pmod{p}]$,

G^{18}_{16p} $(a^4= b^2=c^2=d^p=1,\ ac=ca,\ bc=cb,\ ad=bac,\ da=ad,\ db=bd^{-1},\ dc=cd)$,

G^{19}_{16p} $(a^8 = b^4 = c^p = 1,\ a^4 = b^2,\ ab = ba^7,\ ca = ac,\ cb = bc^{-1})$,

G^{20}_{16p} $(a^8 = b^4 = c^p = 1,\ a^4 = b^2,\ ab = ba^7,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G^{21}_{16p} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ac = ca,\ cb = bc^{-1})$,

G^{22}_{16p} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G^{23}_{16p} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^3,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc^{-1})$,

G^{24}_{16p} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^7,\ ca = ac,\ cb = bc^{-1})$,

G^{25}_{16p} $(a^8 = b^2 = c^p = 1,\ ab = ba^7,\ ca = ac^{-1},\ cb = bc)$,

G^{26}_{48} $[a^4 = b^4 = c^3 = 1,\ ab = ba,\ \bar{c} = (a,\ b,\ a^3 b^3)]$,

G^{27}_{80} $(a^{(2,x^4+x^3+x^2+x+1)} = b^5 = 1,\ ab = ba^x)$,

G^{28}_{48} $(a^{(2,x^4+x^3+x^2+x+1)} = b^3 = 1,\ ab = ba^{x^3+x^2})$,

G^{29}_{48} $[a^2 = b^2 = c^4 = d^3 = 1,\ ab = bac^2,\ ac = ca,\ bc = cb,\ cd = dc,\ \bar{d} = (a, b, abc)]$,

G^{30}_{48} $[a^8 = b^2 = c^3 = 1,\ ab = ba^3,\ \bar{c} = (a,\ a^7 c^2,\ a^2 bc)(b,\ bc^2,\ bc)]$.

RÉPONSE A M. BOUASSE

(*Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse,* 4e fasc., p. 443; 1907).

NOTE DE MM. A. LEDUC ET P. SACERDOTE.

Le dernier Mémoire de M. Bouasse comprend un violent réquisitoire contre un certain nombre de Savants qui ont osé aborder des questions ayant quelque rapport avec *son sujet,* sans compter les « Traités classiques », en bloc, qui « font de toutes ces notions la plus incroyable bouillie ».

Comme M. Bouasse nous comprend parmi ceux auxquels il distribue ses *aménités,* nous serions en droit de lui répondre sur le même ton de pamphlet. Nous ne le ferons pas; car nous nous félicitons de la courtoisie générale des discussions scientifiques.

Il nous serait facile, assurément, de montrer que si, comme le prétend M. Bouasse, nous « ignorons jusqu'au premier mot d'une question archiclassique », lui-même ferait bien d'étudier un peu certaines questions de Physique élémentaire, et notamment l'ébullition. Mais nous ne nous arrêterons pas à ce genre de plaisanteries trop faciles.

Ce qui est beaucoup plus grave, c'est qu'en dehors des termes blessants dont il est coutumier, et qu'il ne nous plaît pas de relever, M. Bouasse commet un acte que nous laisserons à chacun le soin de qualifier, en FALSIFIANT une citation de manière à en altérer complètement le sens, ainsi qu'on va le voir.

Voici d'abord le texte du passage emprunté par lui à l'Ouvrage de M. Violle (t. I, p. 657) :

..., la goutte se gonfle ensuite aisément, comme dans un petit sac élastique dont la tension diminue à mesure que le sac grossit. Puis, lorsque la goutte est devenue assez volumineuse, elle s'étrangle TRÈS LÉGÈREMENT à sa partie supérieure, et SE ROMPT suivant une circonférence d'un diamètre peu différent de celui de l'orifice. LA GOUTTE SE DÉTACHE donc LORSQUE SON POIDS EST INFINIMENT PEU SUPÉRIEUR A LA TENSION SUPERFICIELLE LE LONG DU CERCLE DE GORGE, et comme le diamètre de ce cercle de gorge peut être supposé proportionnel au diamètre de l'orifice, on voit que, toutes choses égales d'ailleurs, le poids des gouttes sera proportionnel au diamètre de l'orifice, et non pas au carré de ce diamètre, ainsi que cela devrait être si chaque goutte était supportée par une force agissant sur toute la surface du cercle de gorge.

C'est bien là l'explication classique (1) que nous avons combattue. On y admet, bien à tort, que le sac élastique formé par la membrane superficielle, après s'être *étranglé légèrement, se déchire* suivant le cercle de gorge lorsque sa résistance à la rupture ($2\pi r$F) est surpassée par le poids du liquide contenu dans le sac.

Nous avons montré que les choses se passent tout autrement, et *que la goutte se sépare, non par rupture, mais par étranglement complet,* comme si l'on tirait sur les deux bouts d'un fil enroulé sur la gorge.

Eh bien! pour établir que nous redressons des *erreurs imaginaires,* M. Bouasse n'hésite pas à *tronquer le texte* de M. Violle, et à en supprimer (sans même l'indiquer par des points suspensifs) tous les mots dont la présence le gênerait vraiment trop. Entre ses mains habiles, le texte devient ceci (reproduction intégrale) :

La goutte se gonfle... comme dans un sac élastique...; elle *s'étrangle* à sa partie supérieure; le poids n'est pas proportionnel au carré du diamètre, comme cela devrait être si chaque goutte était supportée par une force agissant sur toute la surface du cercle de gorge.

Ainsi les mots TRÈS LÉGÈREMENT et SE ROMPT sont omis, comme par hasard, et le (;) remplace tout ce qui est contraire à ce que l'on veut prouver.

Le tour est simple; mais il n'abusera personne.

En présence d'un pareil procédé, nous tenons à déclarer ici que, quelles que soient les nouvelles invectives dont il plaira à M. Bouasse de nous assaillir, nous n'y répondrons pas.

---

(1) On retrouve cette explication dans tous les classiques, ainsi que dans le Mémoire de M. Duclaux (*Ann. de Chim. et de Phys.*, 4e série, t. XXI, 1870, au bas de la page 388) :

« Puis, lorsque la goutte est assez volumineuse, ce sac *se creuse très faiblement* en gorge à sa partie supérieure, au voisinage du tube, et il semble qu'à ce moment la chute de la goutte ne s'effectue que parce que *l'enveloppe élastique se brise* suivant une circonférence... ».

REMARQUE SUR LA RÉPONSE DE MM. LEDUC ET SACERDOTE,

Par M. H. BOUASSE,

Professeur à l'Université de Toulouse.

MM. Leduc et Sacerdote m'accusent d'avoir faussé le texte de M. Violle pour prouver que M. Violle connaissait les phénomènes. Je soutiens que la citation complète a exactement le même sens que ma citation tronquée. Il faut distinguer en effet deux stades dans le phénomène, un stade où l'équilibre existe encore; la goutte s'étrangle très légèrement. Puis l'équilibre ne peut plus subsister, elle se rompt *par étranglement* à partir d'une circonférence d'un diamètre peu différent de celui de l'orifice, c'est-à-dire que l'étranglement se propage brusquement. La preuve que telle est bien la pensée de l'auteur est au renvoi qui suit immédiatement le mot « orifice ». Voici cette Note :

C'est par suite de la formation et de l'étranglement *complet* d'un pareil sac qu'un grain de plomb peut traverser une membrane de liquide glycérique sans la crever.

Si je n'ai pas jugé à propos de citer tout le passage, c'est qu'il me semblait que quand un auteur dit explicitement que les forces de cohésion n'interviennent pas, on ne peut pas supposer qu'il veut dire que la rupture se fait contre ces forces de cohésion. C'est lui prêter une absurdité gratuite. D'ailleurs MM. Leduc et Sacerdote ne songent pas à répondre à ce que dit Plateau sur le sectionnement des cylindres pleins et creux.

Quant à la distinction de l'équilibre et du non-équilibre que je fais ci-dessus, rien n'est plus facile que de répéter l'expérience pour se convaincre de sa nécessité.

Enfin MM. Leduc et Sacerdote ne trouvent rien à objecter à tout ce que je dis sur l'historique de la cohésion et sur le degré de nouveauté de leurs expériences. Je maintiens donc mes conclusions.



TABLE DES MATIÈRES (Fascicule N° 1, 1905).

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME V. — ANNÉE 1903.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS,
[illegible]

TOULOUSE
ÉD. PRIVAT,
[illegible]

1903

[illegible]

Deuxième fascicule.



THÉORIE DES FORMES A COEFFICIENTS ENTIERS

DÉCOMPOSABLES EN FACTEURS LINÉAIRES,

PAR M. X. STOUFF,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

Théorie des formes à coefficients entiers où le degré est égal au nombre des variables et qui peuvent être décomposées en facteurs linéaires (1).

I.

Soit d'abord une forme de degré n, à m variables, dont les coefficients ne sont pas tous nuls. On peut trouver un système de valeurs entières des variables, premières entre elles, pour lequel cette forme a une valeur différente de zéro. En effet, attribuons à chaque variable, indépendamment des autres, $n+1$ valeurs entières distinctes, ce qui donne en tout $(n+1)^m$ systèmes de valeurs des variables. Parmi les $(n+1)^m$ valeurs correspondantes de la forme, l'une au moins n'est pas nulle. Supposons, en effet, pour un instant que le contraire ait lieu, et envisageons les valeurs de la forme relatives aux différents systèmes qui ne se distinguent entre eux que par la valeur de l'une des indéterminées; la forme ordonnée par rapport à cette variable est un polynome d'ordre n, qui a $n+1$ racines, et dont, par conséquent, tous les coefficients sont nuls. Les coefficients de la forme ainsi ordonnée, qui sont des formes d'ordre n au plus par rapport aux $m-1$ variables restantes, sont nuls pour les $(n+1)^{m-1}$ systèmes de valeurs que l'on peut attribuer à ces variables. On ordonnera chacun d'eux par rapport à l'une des variables qu'il contient, et l'on répétera le même raisonnement. Finalement, on prouve ainsi de proche en proche que tous les coefficients de la forme

---

(1) L'objet de cet article est de faciliter la lecture des Mémoires de M. Hermite (t. 47 du *Journal de Crelle*). M. Minkowski a souvent complété les travaux de M. Hermite avec des méthodes qui lui sont propres. Je me suis proposé ici d'interpréter autant que possible la pensée de M. Hermite.

proposée sont nuls, ce qui est contre l'hypothèse. Ayant obtenu un système de valeurs entières des variables qui n'annulent pas la forme, en les divisant par leur plus grand commun diviseur, nous obtiendrons un système de valeurs entières des variables premières entre elles qui n'annulent pas cette forme.

Nous nommons *équivalentes* deux formes lorsque la seconde s'obtient en soumettant la première à une substitution linéaire de déterminant *un*

$$x_i = \sum_{j=1}^{j=m} \alpha_{ij} x'_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

où les coefficients α_{ij} sont entiers.

On sait, d'après M. Hermite, que l'on peut toujours former un déterminant à éléments entiers et de valeur *un*, dont une colonne soit constituée par des nombres entiers donnés, premiers entre eux; on sait également que, si une forme est soumise à la substitution (1), le coefficient de x'^n_j est le résultat obtenu en substituant respectivement à $x_1, x_2, \ldots, x_m$ dans la forme primitive $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}$. De ces deux propositions et de celle que nous avons démontrée en commençant il résulte que toute forme dont les coefficients ne sont pas tous nuls a une équivalente dans laquelle le coefficient de x^n_j n'est pas nul, j étant l'un des m indices à volonté.

Le problème que nous nous proposons maintenant d'étudier est le suivant :

On donne une forme à coefficients entiers de degré n, à m variables, et l'on sait a priori *que cette forme peut être décomposée en n facteurs linéaires; on demande d'obtenir ces facteurs.*

Le problème sera résolu pour la forme donnée s'il l'est pour l'une quelconque des formes équivalentes. Parmi celles-ci, soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ une forme où le coefficient de x^n_1, qui est un nombre entier A, est différent de zéro, et

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \prod_{j=1}^{j=n} U_j,$$

$$U_j = \sum_{h=1}^{h=m} a_{jh} x_h,$$

on aura

$$A = \prod_{j=1}^{j=n} a_{j1},$$

et, par hypothèse, A n'étant pas nul, aucun des coefficients a_{j1} n'est nul.

Le problème devra être considéré comme résolu si l'on connaît dans chaque

facteur linéaire les rapports des coefficients de $x_2, x_3, \ldots, x_m$ au coefficient de x_1. En effet, les données ne permettent pas de déterminer davantage ces facteurs. Prenons

$$x_2 = 1;$$

posons

$$x_1 = z,$$

$$\frac{a_{j2}}{a_{j1}} = -z_j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

$$v_j = \sum_{h=3}^{h=m} \frac{a_{jh} x_h}{a_{j1}} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

et

$$\frac{F(z, 1, x_3, \ldots, x_m)}{A} = f(z, x_3, \ldots, x_m),$$

nous aurons

$$(2) \qquad f(z, x_3, \ldots, x_m) = \prod_{j=1}^{j=n} (z - z_j + v_j),$$

le polynome f a ses coefficients rationnels. Il doit être considéré comme connu. Le problème sera résolu si l'on connaît les quantités z_j et les expressions linéaires v_j qui ne contiennent que les $m-2$ dernières variables $x_3, \ldots, x_m$.

Soit $\varphi(z)$ la somme des termes de $f(z, x_3, \ldots, x_m)$ où ne figurent pas les $m-2$ dernières variables, et $\varphi_k(z, x_3, \ldots, x_m)$ la somme des termes de f dont le degré total par rapport aux $m-2$ variables $x_3, \ldots, x_m$ est égal à k. On aura donc

$$f(z, x_3, \ldots, x_m) = \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

En faisant

$$x_3 = \ldots = x_m = 0,$$

l'identité (2) donne

$$\varphi(z) = \prod_{j=1}^{j=n} (z - z_j);$$

les quantités z_j sont donc les n racines de l'équation à coefficients rationnels

$$(3) \qquad \varphi(z) = 0,$$

à chacune des racines de cette équation correspond un facteur linéaire de f. Soit z_1 une racine simple de l'équation (3), je dis que les coefficients de la fonction linéaire v_1 s'expriment rationnellement en fonction de z_1. En effet, si l'on développe le produit qui figure dans le second membre de (2), on voit que l'on a

$$(4) \qquad \varphi_1 = \sum_{j=1}^{j=n} \left[v_j \prod{}' (z - z_h) \right],$$

où le signe $\prod$ indique le produit des facteurs binomes $z - z_h$ en exceptant la valeur $h = j$. Si, dans les deux membres de l'identité (4), on fait $z = z_1$, il vient

$$\varphi_1(z_1, x_3, \ldots, x_m) = v_1 \prod_{h=2}^{h=n} (z_1 - z_h) = v_1 \varphi'(z_1).$$

Ainsi *le facteur linéaire qui correspond à une racine simple* z_1 est

$$\frac{\varphi_1(z_1, x_3, \ldots, x_m) + (z - z_1)\varphi'(z_1)}{\varphi'(z_1)},$$

on voit qu'il est connu rationnellement dès que z_1 est connu.

Je dis encore que, si z_1 est une racine multiple d'ordre k de l'équation (3), le produit des facteurs linéaires de f qui correspondent à z_1 est connu rationnellement quand z_1 est connu. Soit, en effet,

$$P_1 = (z - z_1 + v_1)(z - z_1 + v_2)\ldots(z - z_1 + v_k)$$

ce produit. On a

$$\varphi_k(z, x_3, \ldots, x_m) = \sum \left(\prod_{h=1}^{h=k} v_{j_h} \right) \left[\prod{}' (z - z_l) \right];$$

dans chaque terme de la somme $\sum$, l'ensemble des indices j_h forme une combinaison des indices 1, 2, ..., n, k à k. Le signe $\prod'$ indique que l prend les valeurs qui ne sont pas comprises parmi celles des indices j_h. Si nous faisons $z = z_1$, tous les termes de la somme $\sum$ s'annulent, sauf un seul, et l'on a

$$\begin{aligned} &\varphi_k(z_1, x_3, \ldots, x_m) \\ &\quad = v_1 v_2 \ldots v_k (z_1 - z_{k+1})(z_1 - z_{k+2})\ldots(z_1 - z_n) = v_1 v_2 \ldots v_k \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(z_1). \end{aligned}$$

Plus généralement, on a

$$(5) \qquad \varphi_{k-l}(z, x_3, \ldots, x_m) = \sum \left(\prod_{h=1}^{h=k-l} v_{j_h} \right) \left[\prod{}' (z - z_r) \right].$$

Dans le second membre, $z - z_1$ figure avec l'exposant l dans les termes qui contiennent les produits $k - l$ à $k - l$ des expressions $v_1, v_2, \ldots, v_k$; $z - z_1$ figure avec un exposant supérieur à l dans tous les autres termes du second membre. Prenons les dérivées d'ordre l des deux membres de l'identité (5), puis

faisons $z = z_1$, il viendra

$$\varphi_{k-l}^{(l)}(z_1, x_3, \ldots, x_m) = \frac{l!}{k!}\varphi^{(k)}(z_1)\sum\left(\prod_{h=1}^{h=k-l} v_{j_h}\right),$$

où, cette fois, les indices j_h sont pris parmi les nombres $1, 2, \ldots, k$.

On aura, par suite,

$$(6)\quad P_1 = \frac{\varphi_k(z_1, x_3, \ldots, x_m) + \frac{z - z_1}{1}\varphi'_{k-1}(z_1, x_3, \ldots, x_m) + \frac{(z-z_1)^2}{2!}\varphi''_{k-2}(z_1, x_3, \ldots, x_m) + \ldots + \frac{(z-z_1)^k}{k!}\varphi^{(k)}(z_1)}{\frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(z_1)},$$

P_1 est donc connu rationnellement par z_1.

Supposons que l'équation ait s racines de l'ordre de multiplicité k, $z_1, z_2, \ldots, z_s$, et soit

$$\psi(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_s),$$

on sait que le polynome $\psi(z)$ est connu rationnellement; aux racines $z_1, z_2, \ldots, z_s$ correspondent des facteurs $P_1, P_2, \ldots, P_s$ de f tous de degré k donnés par la formule (6), et le produit effectué $P_1 P_2 \ldots P_s$ est un polynome de degré sk dont les coefficients sont des fonctions symétriques de $z_1, z_2, \ldots, z_s$. Ce polynome est donc connu rationnellement.

Supposons maintenant que la forme à coefficients entiers $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ soit irréductible. Nous entendons par là qu'elle n'est le produit d'aucune autre forme à coefficients entiers par une forme aussi à coefficients entiers. D'après la théorie de la division des polynomes, F ne pourra être non plus le produit de deux formes de degré moindre que n à coefficients rationnels, et f n'admettra pas non plus de diviseur de degré moindre à coefficients rationnels. Or, si l'équation (3) admet s racines du degré k de multiplicité, et, en outre, d'autres racines d'un degré de multiplicité différent de k, f admet le facteur $P_1 P_2 \ldots P_s$ qui est connu rationnellement, et, par conséquent, F ne peut être irréductible. Donc, si F est irréductible, toutes les racines de (3) sont nécessairement du même ordre de multiplicité.

Quand $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *est irréductible, on peut, d'ailleurs, en tout cas, faire dépendre la décomposition complète de cette forme en facteurs linéaires d'une équation d'ordre* n *qui n'a que des racines simples.*

U_j désignant, comme il a été dit plus haut, l'un des facteurs linéaires de F, on peut écrire

$$U_j = a_{j1}x_1 + \sum_{h=2}^{h=m} a_{jh}x_h;$$

comme aucun des coefficients a_{j1} n'est nul, nous pouvons poser

$$L_j = \frac{1}{a_{j1}} \sum_{h=2}^{h=m} a_{jh} x_h.$$

Les n fonctions linéaires homogènes L_j contiennent seulement les $m-1$ dernières variables $x_2, x_3, \ldots, x_m$. Attribuons à chacune de ces variables indépendamment des autres $\frac{n(n-1)}{2}+1$ valeurs entières distinctes, ce qui donnera en tout $\left[\frac{n(n-1)}{2}+1\right]^{m-1}$ systèmes de valeurs de ces variables. Je dis que l'un au moins de ces systèmes fait acquérir aux n fonctions linéaires L_j des valeurs toutes différentes entre elles. Supposons, en effet, que le contraire ait lieu, c'est-à-dire que, pour chaque système, deux au moins des fonctions L_j prennent la même valeur. Il y a $\left[\frac{n(n-1)}{2}+1\right]^{m-2}$ groupes chacun de $\frac{n(n-1)}{2}+1$ systèmes, tels que les systèmes de chaque groupe ne diffèrent que par la valeur attribuée à x_2. Envisageons les systèmes d'un même groupe, pour chacun d'eux il existe une combinaison L_j, $L_{j'}$, pour laquelle les valeurs de L_j et de $L_{j'}$ sont égales, et, comme le nombre des systèmes de ce groupe surpasse d'une unité le nombre des combinaisons de n objets deux à deux, l'une au moins des combinaisons L_j, $L_{j'}$ doit se présenter deux fois. On a donc, pour les mêmes valeurs de $x_3, x_4, \ldots, x_m$ et pour deux valeurs différentes de x_2,

$$L_j = L_{j'};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{a_{j2}}{a_{j1}} = \frac{a_{j'2}}{a_{j'1}}, \qquad \frac{a_{j3}x_3 + \ldots + a_{jm}x_m}{a_{j1}} = \frac{a_{j'3}x_3 + \ldots + a_{j'm}x_m}{a_{j'1}}.$$

Posons

$$L'_j = \frac{1}{a_{j1}} \sum_{h=3}^{h=m} a_{jh} x_h,$$

nous avons donc $\left[\frac{n(n-1)}{2}+1\right]^{m-2}$ systèmes de valeurs de $x_3, \ldots, x_m$ tels que dans chaque système une des combinaisons L'_j, $L'_{j'}$, présente des valeurs égales et que de plus $\frac{a_{j2}}{a_{j1}} = \frac{a_{j'2}}{a_{j'1}}$. Ces systèmes peuvent être répartis en $\left[\frac{n(n-1)}{2}+1\right]^{m-3}$ groupes où les systèmes d'un même groupe ne diffèrent que par la valeur de x_3; le nombre des systèmes d'un même groupe étant $\frac{n(n-1)}{2}+1$, l'une des combinaisons L'_j, $L'_{j'}$ présentant des valeurs égales doit se présenter au moins deux fois,

et l'on en déduit

$$\frac{a_{j2}}{a_{j1}} = \frac{a_{j'2}}{a_{j'1}}, \qquad \frac{a_{j3}}{a_{j1}} = \frac{a_{j'3}}{a_{j'1}}, \qquad \frac{a_{j4}x_4 + \ldots + a_{jm}x_m}{a_{j1}} = \frac{a_{j'4}x_4 + \ldots + a_{j'm}x_m}{a_{j'1}}$$

et ainsi de suite. De proche en proche on prouverait ainsi qu'il existerait dans F deux facteurs linéaires U_j, $U_{j'}$ dont les coefficients seraient proportionnels. F aurait donc des facteurs multiples, et le produit des facteurs d'un même degré de multiplicité donnerait un diviseur de F qui pourrait être trouvé rationnellement. F ne serait donc pas irréductible.

Envisageons maintenant un système de valeurs de $x_2, x_3, \ldots, x_m$ pour lesquelles les fonctions L_j sont toutes différentes. Divisons ces valeurs par leur plus grand commun diviseur, nous aurons des valeurs entières premières entre elles de x_2, $x_3, \ldots, x_m$ pour lesquelles les valeurs des L_j sont toutes différentes; ces valeurs peuvent être prises pour éléments de la première colonne d'un déterminant à éléments entiers et de valeur *un*. Dans F, sans changer la variable x_1, soumettons les $m-1$ dernières variables à la substitution dont les coefficients sont les éléments de ce déterminant; les différents quotients $\frac{a_{j2}}{a_{j1}}$ relatifs aux facteurs linéaires de la nouvelle forme seront précisément les valeurs des fonctions L_j toutes différentes entre elles. Par suite l'équation $\varphi(z) = 0$, relative à la nouvelle forme, n'aura que des racines simples; et chacune de ces racines étant connue, on connaît par cela même le facteur linéaire correspondant.

Soit $n = sk$, et supposons que l'équation $\varphi(z) = 0$ relative à la forme primitive ait s racines de degré k de multiplicité. Par la résolution d'une équation de degré s, la forme se trouvera décomposée en s autres formes de degré k; si l'on fait ensuite dans chacune de ces formes la substitution linéaire à coefficients entiers qui vient d'être indiquée, on voit que chaque forme d'ordre k pourra être décomposée en facteurs linéaires à l'aide d'une équation de degré k.

On peut encore remarquer que *si la fonction* F *est irréductible et si l'équation* $\varphi(z) = 0$ *n'a que des racines simples, cette dernière équation est nécessairement irréductible*. Car si $\varphi(z)$ avait un facteur rationnel, le produit des facteurs correspondants de F serait aussi connu rationnellement.

II.

Considérons plus particulièrement les formes irréductibles décomposables en facteurs linéaires et où le nombre des variables égale l'ordre n de la forme

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \; & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) \\ & \times (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) \ldots (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n). \end{aligned}$$

M. Hermite nomme *invariant de* F le carré du déterminant des coefficients a_{jh} $(j, h = 1, 2, \ldots, n)$. L'invariant est une quantité rationnelle.

En effet, d'après ce qui précède, dans chaque facteur linéaire de F, les rapports des $n-1$ derniers coefficients au premier peuvent toujours s'exprimer comme nous l'avons vu par des fonctions rationnelles des diverses racines d'une équation d'ordre n à coefficients rationnels. L'invariant est, par suite, égal à une fonction symétrique des racines de cette équation, multipliée par le carré du produit

$$a_{11}a_{21}\ldots a_{n1}$$

qui est lui-même égal au coefficient de x_1^n dans la forme; donc, c'est une quantité rationnelle.

Si l'invariant n'est pas nul, aucun des coefficients a_{jh} n'est nul, ni dans la forme F, ni dans aucune forme équivalente.

En effet, d'après ce qui précède, il existe une équation à coefficients rationnels qui n'a que des racines simples $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et telle que l'on ait

$$a_{1h} = \pi(z_1), \qquad a_{2h} = \pi(z_2), \qquad \ldots, \qquad a_{jh} = \pi(z_j), \qquad \ldots, \qquad a_{nh} = \pi(z_n),$$

$\pi(z)$ étant une fonction rationnelle. De plus, cette équation est irréductible, sans quoi F ne pourrait être irréductible. Si donc on avait

$$\pi(z_j) = 0,$$

l'équation $\pi(z) = 0$, à coefficients rationnels, admettant la racine z_j, devrait admettre toutes les racines $z_1, z_2, \ldots, z_n$; on aurait alors

$$a_{1h} = a_{2h} = \ldots = a_{jh} = \ldots = a_{nh} = 0,$$

et le déterminant dont le carré donne l'invariant ayant une colonne de zéros serait nul.

Le coefficient de x_h^n dans la forme F est égal à $\prod_{j=1}^{j=n} a_{jh}$. Ainsi dans F et dans toutes ses équivalentes les coefficients des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des variables sont des entiers qui ne sont jamais nuls.

D'après ce qui précède, deux des rapports $\frac{a_{lh}}{a_{l1}}$, $\frac{a_{rh}}{a_{r1}}$, ne peuvent devenir égaux que si les n rapports $\frac{a_{jh}}{a_{j1}}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ se partagent en un certain nombre s de groupes différents contenant chacun le même nombre k de rapports tous égaux entre eux. La décomposition de F en facteurs linéaires peut encore être consi-

dérée comme dépendant d'une équation E d'ordre n, à coefficients rationnels, et qui n'a que des racines simples. Mais comme cette décomposition peut aussi être effectuée par la résolution d'une équation d'ordre s suivie de celle d'une équation d'ordre k, *le groupe de Galois de l'équation* E *est alors nécessairement imprimitif.*

Si les facteurs de F ne sont pas tous réels, on peut supposer les facteurs imaginaires deux à deux conjugués. Soit μ le nombre des facteurs réels, ν le nombre de couples de facteurs imaginaires conjugués, de sorte que $\mu + 2\nu = n$. Représentons par U_j $(j = 1, 2, \ldots, \mu)$ les facteurs réels, et par U_j pour $j = \mu + 1, \mu + 2, \ldots, n$ les facteurs imaginaires conjugués. Supposons de plus que $U_{\mu+2}$ soit conjugué de $U_{\mu+1}$, $U_{\mu+4}$ conjugué de $U_{\mu+3}$, et ainsi de suite. Considérons le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu+1,1} & a_{\mu+1,2} & \cdots & a_{\mu+1,n} \\ a_{\mu+2,1} & a_{\mu+2,2} & \cdots & a_{\mu+2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

en combinant les lignes on reconnaît aisément que ce déterminant est égal à

$$D = \frac{1}{2^\nu} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu+1,1} + a_{\mu+2,1} & a_{\mu+1,2} + a_{\mu+2,2} & \cdots & a_{\mu+1,n} + a_{\mu+2,n} \\ a_{\mu+2,1} - a_{\mu+1,1} & a_{\mu+2,2} - a_{\mu+1,2} & \cdots & a_{\mu+2,n} - a_{\mu+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} + a_{n,1} & a_{n-1,2} + a_{n2} & \cdots & a_{n-1,n} + a_{n,n} \\ a_{n,1} - a_{n-1,1} & a_{n,2} - a_{n-1,2} & \cdots & a_{nn} - a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Tous les éléments de ce déterminant autres que ceux des lignes de rangs $\mu + 2$, $\mu + 4, \ldots, n$ sont réels; les éléments de ces lignes sont des imaginaires pures. Donc D est égal à $(\sqrt{-1})^\nu$ multiplié par une quantité réelle. L'invariant étant égal à D^2, on en conclut que l'invariant a le signe de $(-1)^\nu$.

III.

Soit

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{j=n} U_j,$$

$$U_j = \sum_{h=1}^{h=n} a_{jh} x_h,$$

une forme à coefficients entiers, irréductible, décomposable en n facteurs linéaires et dont l'invariant n'est pas nul. On se propose de déterminer les substitutions linéaires à coefficients entiers

$$(S) \qquad x_i = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ij} x'_j,$$

qui changent cette forme en elle-même.

Par la substitution S, chaque forme linéaire U_j se change en une autre forme linéaire que l'on peut représenter par $U_j S$, et comme on doit avoir identiquement

$$\prod_{j=1}^{j=n} U_j = \prod_{j=1}^{j=n} U_j S,$$

et que d'après la théorie de la division des polynomes chaque facteur linéaire du premier membre doit se retrouver dans le second, à chaque indice j doit correspondre un indice h_j tel que l'on ait identiquement

$$(7) \qquad U_j S = \varepsilon_j U h_j,$$

lorsque j parcourt les valeurs $1, 2, \ldots, n$, l'indice correspondant h_j prend successivement une fois et une seule chacune de ces mêmes valeurs, de plus il faut évidemment que

$$(8) \qquad \prod_{j=1}^{j=n} \varepsilon_j = 1.$$

Nous distinguons maintenant deux cas.

Premier cas. — L'un des facteurs U_j se reproduit par la substitution S à une constante multiplicative près, ce qui s'exprime par les équations

$$(9) \qquad \frac{a_{j1}}{\sum_{i=1}^{i=n} a_{ji}\alpha_{i1}} = \frac{a_{j2}}{\sum_{i=1}^{i=n} a_{ji}\alpha_{i2}} = \ldots = \frac{a_{jn}}{\sum_{i=1}^{i=n} a_{ji}\alpha_{in}}.$$

Or, à chacun des facteurs de F correspond, d'après ce qui précède, une racine z_j d'une équation irréductible par laquelle les rapports $\frac{a_{jh}}{a_{j1}}$ ($h = 2, 3, \ldots, n$) s'expriment rationnellement. En vertu de l'irréductibilité de cette équation, les relations (9) subsistent quand on y remplace z_j par une autre quelconque des racines de cette équation, ou, ce qui revient au même, les coefficients de U_j par ceux de l'un quelconque des autres facteurs linéaires. Donc, si l'un des facteurs se reproduit à une constante multiplicative près, il en est de même de tous les autres. On a donc, pour $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$U_j S = \varepsilon_j U_j,$$

Le déterminant de la substitution S est toujours égal à $+1$.

En effet, on peut regarder cette substitution comme résultant de trois autres :

1° Substitution des variables $U_1, U_2, \ldots, U_n$ aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

2° Substitution aux variables $U_1, U_2, \ldots, U_n$ des variables $U'_1, U'_2, \ldots, U'_n$ définies par les relations

$$U_j = \varepsilon_j U'_j.$$

3° Substitution aux variables $U'_1, U'_2, \ldots, U'_n$ des variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$.

Le déterminant de la première substitution est l'inverse du déterminant Δ des coefficients des fonctions linéaires U_j. Le déterminant de la seconde est $\prod \varepsilon_j = 1$. Le déterminant de la troisième est Δ. Le déterminant de S est nécessairement égal au produit de ces trois substitutions et, par conséquent, à l'unité.

La valeur commune des rapports (9) est $\frac{1}{\varepsilon_j}$. Donc ε_j s'exprime rationnellement par z_j; elle appartient au corps algébrique déterminé par cette racine.

ε_j est une unité complexe. Soit, en effet,

$$L = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i,$$

une fonction linéaire qui se reproduit multipliée par une constante ω quand on la soumet à la substitution S, de telle sorte que l'on ait identiquement

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{ij} x'_j = \omega \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j x'_j,$$

ce qui donne les relations

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \alpha_{ij} = \omega \lambda_j,$$

et par suite, en éliminant les quantités λ,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\omega & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\omega & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \cdots\cdots & \cdots & \alpha_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0,$$

équation à coefficients entiers où le coefficient de ω^n est égal à *un*. Or ε_j est nécessairement une racine de cette équation. Donc ε_j est un entier complexe, et, d'après l'équation (8), ε_j *est une unité*.

Second cas. — Chacun des facteurs U_j soumis à la substitution S se transforme en un facteur U_{h_j} différent de U_j, multiplié par une constante ε_j.

Comme les rapports des coefficients de U_j s'expriment rationnellement par la racine z_j d'une équation d'ordre n qui n'a que des racines simples, on peut poser

$$(10)\quad \begin{cases} a_{j1} = k_j(b_{10} + b_{11}z_j + b_{12}z_j^2 + \ldots + b_{1,n-1}z_j^{n-1}), \\ a_{j2} = k_j(b_{20} + b_{21}z_j + b_{22}z_j^2 + \ldots + b_{2,n-1}z_j^{n-1}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{jn} = k_j(b_{n0} + b_{n1}z_j + b_{n2}z_j^2 + \ldots + b_{n,n-1}z_j^{n-1}), \end{cases}$$

les quantités $b_{10}, b_{11}, \ldots, b_{1,n-1}, b_{20}, \ldots, b_{n0}, \ldots, b_{n,n-1}$ sont des nombres rationnels, k_j est une quantité différente de zéro; pour avoir les expressions des coefficients d'un autre facteur linéaire U_h, il suffira de remplacer, dans les formules (10), k_j par une autre constante k_h, et z_j par la racine z_h qui correspond au facteur u_h, les nombres b restant les mêmes.

Il est évident que, pour que l'invariant de F ne soit pas nul, il faut que le déterminant des quantités b soit différent de zéro.

Mettons, pour simplifier, h au lieu de h_j. L'identité (7) donne alors

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ji} \sum_{r=1}^{r=n} \alpha_{ir} x'_r = \varepsilon_j \sum_{r=1}^{r=n} a_{hr} x'_r$$

et, en égalant les coefficients de x'_r dans les deux membres

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} a_{ji}\alpha_{ir} = \varepsilon_j a_{hr} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Les équations (11) sont au nombre de n; comme le déterminant des quantités α_{ir} est égal à *un*, on pourra en tirer les coefficients a_{ji} comme fonctions linéaires des coefficients a_{hr}. Enfin en remplaçant $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$ par les valeurs (10) et en

résolvant les équations ainsi obtenues, il vient

$$1 = \frac{\varepsilon_j k_h}{k_j}(c_{00} + c_{01} z_h + \ldots + c_{0,n-1} z_h^{n-1}),$$

$$z_j = \frac{\varepsilon_j k_h}{k_j}(c_{10} + c_{11} z_h + \ldots + c_{1,n-1} z_h^{n-1}),$$

$$z_j^2 = \frac{\varepsilon_j k_h}{k_j}(c_{20} + c_{21} z_h + \ldots + c_{2,n-1} z_h^{n-1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_j^{n-1} = \frac{\varepsilon_j k_h}{k_j}(c_{n-1,0} + c_{n-1,1} z_h + \ldots + c_{n-1,n-1} z_h^{n-1}),$$

où les quantités c sont des coefficients rationnels; en divisant membre à membre la seconde équation par la première, on aura z_j exprimé rationnellement en fonction de z_h. On pourra toujours mettre cette relation sous la forme

$$z_j = \mu_0 + \mu_1 z_h + \mu_2 z_h^2 + \ldots + \mu_{n-1} z_h^{n-1} = \psi(z_h),$$

les coefficients $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ étant rationnels. z_h étant la racine de l'équation irréductible

$$(12) \qquad \varphi(z) = 0,$$

les deux équations à coefficients rationnels

$$\varphi(z) = 0, \qquad \varphi[\psi(z)] = 0,$$

admettent z_h comme racine, et, par suite, toutes les racines de la première vérifient la seconde. Ainsi, en prenant pour z l'une quelconque des racines de (12), $\psi(z)$ est encore une racine de cette équation.

Si l'on considère l'équation

$$z_j = \psi(z),$$

il n'existe d'ailleurs qu'une seule racine de (12), $z = z_h$, qui vérifie cette équation. En effet, si l'on substitue à z, dans $\psi(z)$, les n racines de (12), on obtient n quantités qui, d'après la théorie des fonctions symétriques, sont les racines d'une équation E rationnelle d'ordre n. Si deux racines de (12) substituées dans $\psi(z)$ donnaient toutes deux z_j, z_j serait au moins racine double de l'équation E, et E serait réductible, z_j étant racine d'une équation rationnelle de degré moindre que n, l'équation (12) serait réductible, ce qui est contre l'hypothèse.

IV.

Le développement de la méthode indiquée par M. Hermite dans son Mémoire *Sur la théorie des formes quadratiques* (*Journal de Crelle*, t. 47, IIᵉ Partie, V) permet : 1° *de démontrer que pour un invariant donné il n'existe qu'un nombre fini de classes distinctes de formes* F ; 2° *de déterminer la nature des substitutions qui transforment en elle-même une forme* F *décomposable en facteurs linéaires.*

Soient

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_p$$

les facteurs réels de F,

$$V_1, \quad W_1; \quad V_2, \quad W_2; \quad \ldots; \quad V_q, \quad W_q$$

les couples de facteurs imaginaires conjugués, de sorte que $p + 2q = n$. Nous poserons

$$(13) \quad \begin{cases} U_j = \sum_{h=1}^{h=n} a_{jh} x_h & (j = 1, 2, \ldots, p), \\ V_j = \sum_{h=1}^{h=n} (b_{jh} + ic_{jh}) x_h & (j = 1, 2, \ldots, q) \qquad (i = \sqrt{-1}), \\ W_j = \sum_{h=1}^{h=n} (b_{jh} - ic_{jh}) x_h & (j = 1, 2, \ldots, q), \end{cases}$$

les lettres a, b, c désignant des quantités réelles. On a identiquement

$$(14) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{j=p} U_j \prod_{j=1}^{j=q} V_j W_j.$$

Envisageons, d'après M. Hermite, la forme quadratique

$$(15) \quad \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1^2 U_1^2 + \lambda_2^2 U_2^2 + \ldots + \lambda_p^2 U_p^2 + 2\mu_1^2 V_1 W_1 + \ldots + 2\mu_q^2 V_q W_q,$$

pour toutes les valeurs des paramètres λ et μ. Comme entre plusieurs formes φ qui ne diffèrent que par un facteur constant, il n'y a intérêt qu'à en considérer une seule, nous pouvons, sans porter atteinte à la généralité, supposer

$$(16) \qquad \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p \mu_1^2 \mu_2^2 \ldots \mu_q^2 = 1,$$

D'après cela, en désignant par I l'invariant de F, le déterminant de φ est $(-1)^\nu I$.

Soit

$$(17)\quad (S)\qquad x_j = \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_{jh} x'_h,$$

la substitution à coefficients entiers et de déterminant *un* propre à réduire φ pour des valeurs particulières des quantités λ et μ. Par cette substitution F devient

$$F'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n);$$

$$(18)\qquad F'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \prod_{j=1}^{j=p} U'_j \prod_{j=1}^{j=q} V'_j W'_j,$$

U'_j est ce que devient U_j par la substitution S. D'une manière générale, nous représentons par des lettres accentuées les quantités relatives à la forme F'. Dans la forme φ', réduite de φ, le coefficient de x'^2_h est

$$(19)\quad \begin{aligned}&\lambda_1^2 a'^2_{1h} + \lambda_2^2 a'^2_{2h} + \ldots + \lambda_p^2 a'^2_{ph} + \mu_1^2(b'^2_{1h} + c'^2_{1h}) + \mu_1^2(b'^2_{1h} + c'^2_{1h}) + \mu_2^2(b'^2_{2h} + c'^2_{2h}) \\ &+ \mu_2^2(b'^2_{2h} + c'^2_{2h}) + \ldots + \mu_q^2(b'^2_{qh} + c'^2_{qh}) + \mu_q^2(b'^2_{qh} + c'^2_{qh}),\end{aligned}$$

il résulte de la relation (16) que le produit des termes de l'expression (19) donne précisément le coefficient de x'^n_h dans F'. Or, nous avons démontré que, F étant irréductible, les coefficients de $x'^n_1, x'^n_2, \ldots, x'^n_n$ ne peuvent être nuls, et comme ils sont entiers, leur valeur absolue est au moins égale à *un*. D'après le théorème relatif à une somme de termes positifs dont le produit est constant, la somme (19) est au moins égale à n. Or, d'après le théorème de M. Hermite sur les formes définies réduites, le produit des coefficients des carrés des indéterminées dans φ' est moindre que $\rho(-1)^\nu I$, ρ étant un coefficient numérique qui ne dépend que de n. Le coefficient de x'^2_h dans φ' est donc moindre que $\frac{\rho(-1)^\nu I}{n^{n-1}}$, puisque chacun des autres facteurs est au moins égal à n.

Donc, dans la forme φ' chaque coefficient du carré d'une indéterminée est compris entre une limite inférieure et une limite supérieure, toutes deux positives et qui ne dépendent que de I.

On sait d'ailleurs, d'après M. Hermite, que les formes binaires quadratiques obtenues en annulant dans φ', $n - 2$ quelconques des indéterminées sont toutes réduites; il résulte de cette remarque et de ce qui précède que, dans φ', les coefficients des rectangles des indéterminées ont tous des limites supérieures qui ne dépendent que de I.

De là résulte aussi que tous les coefficients de F' ont des limites supérieures qui ne dépendent que de I. En effet, la somme (19) ne comprenant que des termes positifs et ayant une limite supérieure qui ne dépend que de I, il en est de même

de chacun de ses termes, par conséquent, les quantités

$$\text{val. abs. } \lambda_j a'_{jh} \qquad (j=1, 2, \ldots, p;\ h=1, 2, \ldots, n)$$
$$\mu_j \quad \operatorname{mod}(b'_{jh}+ic'_{jh}), \quad (j=1, 2, \ldots, q;\ h=1, 2, \ldots, n),$$

ont toutes des limites supérieures qui ne dépendent que de I.

Or, en effectuant le produit des quantités U′, V′, W′, on voit que chaque coefficient de F′ est une somme de produits de la forme

$$a'_{1j_1}a'_{2j_2}\ldots a'_{pj_p}(b'_{1j_1}+ic'_{1j_1})\ldots(b'_{qj_q}+ic'_{qj_q})(b'_{1k_1}-ic'_{1k_1})\ldots(b'_{qk_q}-ic'_{qk_q}),$$

on ne changera pas la valeur de cette expression en la multipliant par le produit (16) qui est égal à l'unité, ce qui donne

$$\lambda_1 a'_{1j_1}.\lambda_2 a'_{2j_2}\ldots\lambda_p a'_{pj_p}.\mu_1(b'_{1j_1}+ic'_{1j_1})\ldots\mu_q(b'_{qj_q}+ic'_{qj_q}).\mu_1(b'_{1k_1}-ic'_{1k_1})\ldots\mu_q(b'_{qk_q}-ic'_{qk_q}).$$

Dans ce dernier produit, chaque facteur ayant une limite supérieure, il en est de même du produit.

Les formes F′ ayant des coefficients entiers dont les valeurs absolues sont limitées, sont donc en nombre fini. Nous obtenons donc le théorème de M. Hermite,

Pour un invariant donné, il n'existe qu'un nombre fini de classes distinctes.

La même méthode donne les transformations semblables de F [1].

Soit

$$(20) \qquad \frac{\log\lambda_1^2}{r_1}=\frac{\log\lambda_2^2}{r_2}=\ldots=\frac{\log\lambda_p^2}{r_p}=\frac{\log\mu_1^2}{s_1}=\ldots=\frac{\log\mu_q^2}{s_q}=k,$$

$$(21) \qquad r_1+r_2+\ldots+r_p+2s_1+\ldots+2s_q=0,$$

k est un paramètre que l'on fait croître d'une valeur k_0 à $+\infty$, et ensuite décroître de k_0 à $-\infty$. Les quantités positives ou négatives r et s sont considérées comme fixes; $p+q-1$ d'entre elles peuvent être prises arbitrairement; la dernière est alors déterminée par la relation (21) qui est une conséquence de (16) et de (20). Nous dirons qu'une forme F est *réduite* quand elle correspond à une forme quadratique réduite pour des valeurs convenables des quantités λ et μ. Pour un invariant donné I, le nombre des formes réduites est limité, comme nous l'avons vu, et *a fortiori* il est limité pour une même classe.

En général, les corps algébriques qui correspondent aux divers facteurs de F

[1] *Comparer* Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, p. 137.

sont distincts; nous supposerons que l'on adopte arbitrairement pour ces corps un ordre déterminé. On décomposera les formes réduites F en leurs facteurs linéaires, et l'on rangera ces facteurs dans l'ordre des corps auxquels ils correspondent. On ne considère pas comme distincts deux systèmes de facteurs qui ne différeraient respectivement que par des constantes multiplicatives.

Dans le cas où les corps algébriques correspondant aux divers facteurs de F ne sont pas distincts, on rangera d'abord les corps distincts dans un ordre déterminé, d'où il résultera un certain ordre entre les groupes de facteurs linéaires qui appartiennent aux différents corps. Pour disposer les facteurs linéaires à l'intérieur d'un même groupe, on adoptera d'abord un ordre arbitraire que l'on soumettra ensuite aux permutations du groupe de Galois de l'équation

$$(3) \qquad \varphi(z) = 0.$$

Ainsi, dans ce cas, nous considérons comme distincts certains systèmes de facteurs qui ne diffèrent que par l'ordre des facteurs. Mais nous faisons toujours abstraction des constantes multiplicatives.

Soit dans tous les cas N le nombre des systèmes de formes linéaires ainsi obtenues.

Soit F_0 une certaine forme de la classe considérée. On décomposera F_0 en facteurs, et l'on rangera ces facteurs

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p, \quad v_1, \quad \ldots, \quad v_q, \quad w_1, \quad \ldots, \quad w_q$$

dans l'ordre convenu pour les corps algébriques correspondants, si ces corps sont tous distincts; dans le cas contraire, on choisira un arrangement qui, vis-à-vis des précédents, ne soit pas en opposition avec le groupe de Galois de l'équation (3).

Envisageons la forme quadratique (15), $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui correspond à F_0, les valeurs des paramètres λ et μ étant obtenues d'après les équations (20). Soit P un nombre dont nous nous réservons de disposer. Donnons à k les valeurs

$$P, \quad 2P, \quad 3P, \quad \ldots, \quad (N+1)P,$$

réduisons chaque fois la forme quadratique φ, et faisons subir en même temps aux facteurs de F_0 la substitution propre à réduire φ; nous obtiendrons ainsi $N+1$ systèmes de formes linéaires dont le produit donne une forme réduite. Or, il n'y a que N pareils systèmes qui soient distincts. Donc un système au moins

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_p, \quad V_1, \quad \ldots, \quad V_q, \quad W_1, \quad \ldots, \quad W_q$$

se présentera deux fois, abstraction faite de multiplicateurs constants, pour

$k = l\mathrm{P}$ et pour $k = m\mathrm{P}$, l et m étant deux valeurs différentes prises dans la suite $1, 2, 3, \ldots, \mathrm{N}-1$. Soient

$$(22)\quad \begin{cases} \lambda_1^2\varepsilon_1^2\mathrm{U}_1^2+\lambda_2^2\varepsilon_2^2\mathrm{U}_2^2+\ldots+\lambda_p^2\varepsilon_p^2\mathrm{U}_p^2+2\mu_1^2\eta_1^2\mathrm{V}_1\mathrm{W}_1+\ldots+2\mu_q^2\eta_q^2\mathrm{V}_q\mathrm{W}_q,\\ \lambda_1^2\varepsilon_1'^2\mathrm{U}_1^2+\lambda_2'^2\varepsilon_2'^2\mathrm{U}_2^2+\ldots+\lambda_p^2\varepsilon_p'^2\mathrm{U}_p^2+2\mu_1'^2\eta_1'^2\mathrm{V}_1\mathrm{W}_1+\ldots+2\mu_q'^2\eta_q'^2\mathrm{V}_q\mathrm{W}_q,\end{cases}$$

les deux formes quadratiques réduites correspondantes, S et S' les substitutions qui ont servi respectivement à les réduire.

La substitution S transforme $u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q, w_1, \ldots, w_q$ respectivement en

$$\varepsilon_1\mathrm{U}_1,\quad \varepsilon_2\mathrm{U}_2,\quad \ldots,\quad \varepsilon_p\mathrm{U}_p,$$
$$\eta_1 e^{i\theta_1}\mathrm{V}_1,\quad \ldots,\quad \eta_q e^{i\theta_q}\mathrm{V}_q,\quad \eta_1 e^{-i\theta_1}\mathrm{W}_1,\quad \ldots,\quad \eta_q e^{-i\theta_q}\mathrm{W}_q,$$

où $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ désignent des arguments réels et S' transforme les mêmes formes linéaires respectivement en

$$\varepsilon_1'\mathrm{U}_1,\quad \varepsilon_2'\mathrm{U}_2,\quad \ldots,\quad \varepsilon_p'\mathrm{U}_p,$$
$$\eta_1' e^{i\theta_1'}\mathrm{V}_1,\quad \ldots,\quad \eta_q' e^{i\theta_q'}\mathrm{V}_q,\quad \eta_1' e^{-i\theta_1'}\mathrm{W}_1,\quad \ldots,\quad \eta_q' e^{-i\theta_q'}\mathrm{W}_q.$$

Donc S^{-1} transforme $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_p, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_q, \mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_q$ respectivement en

$$\varepsilon_1^{-1}u_1,\quad \varepsilon_2^{-1}u_2,\quad \ldots,\quad \varepsilon_p^{-1}u_p,$$
$$\eta_1^{-1}e^{-i\theta_1}v_1,\quad \ldots,\quad \eta_q^{-1}e^{-i\theta_q}v_q,\quad \eta_1^{-1}e^{i\theta_1}w_1,\quad \ldots,\quad \eta_q^{-1}e^{i\theta_q}w_q,$$

et par conséquent la substitution $\mathrm{S}'\mathrm{S}^{-1}$ change respectivement $u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q, w_1, \ldots, w_q$ en

$$\varepsilon_1'\varepsilon_1^{-1}u_1,\quad \varepsilon_2'\varepsilon_2^{-1}u_2,\quad \ldots,\quad \varepsilon_p'\varepsilon_p^{-1}u_p,$$
$$\eta_1'\eta_1^{-1}e^{i(\theta_1'-\theta_1)}v_1,\quad \ldots,\quad \eta_q'\eta_q^{-1}e^{i(\theta_q'-\theta_q)}v_q,\quad \eta_1'\eta_1^{-1}e^{-i(\theta_1'-\theta_1)}w_1,\quad \ldots,\quad \eta_q'\eta_q^{-1}e^{i(\theta_q-\theta_q')}w_q.$$

Posons pour abréger

$$\varepsilon_j'\varepsilon_j^{-1} = \mathrm{E}_j,\qquad \eta_j'\eta_j^{-1} = \mathrm{H}_j,\qquad \theta_j' - \theta_j = \Theta_j.$$

Le déterminant de la substitution $\mathrm{S}'\mathrm{S}^{-1}$ est égal à *un*. Si l'on adopte comme variables les n fonctions linéaires indépendantes u_j, v_j, w_j, à $\mathrm{S}'\mathrm{S}^{-1}$ correspond sur ces variables une substitution qui en est la transformée et qui a, par suite, même déterminant. Ce déterminant est égal au produit des multiplicateurs E_j, $\mathrm{H}_j e^{\pm i\Theta_j}$. Donc

$$\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2\ldots\mathrm{E}_p\mathrm{H}_1^2\mathrm{H}_2^2\ldots\mathrm{H}_q^2 = 1,$$

et, par suite, $\mathrm{S}'\mathrm{S}^{-1}$ est une transformation semblable de F_0. Elle change chacun des facteurs de F_0 en lui-même, à un multiplicateur constant près. C'est une sub-

stitution appartenant à la première catégorie considérée au § III. Tous les multiplicateurs sont des unités.

Une pareille substitution peut évidemment être caractérisée par les multiplicateurs correspondants.

Si S et T sont deux substitutions de cette catégorie, les substitutions ST et TS sont évidemment identiques et les multiplicateurs relatifs à ST sont les produits respectifs des multiplicateurs de S et de T. Nous utiliserons maintenant la remarque suivante :

Considérant toujours la même forme F_0, si l'on attribue aux quantités λ et μ des valeurs satisfaisant à la relation (16) et en dehors de cela absolument quelconques, les produits

$$\lambda_1^2\varepsilon_1^2, \quad \lambda_2^2\varepsilon_2^2, \quad \ldots, \quad \lambda_p^2\varepsilon_p^2, \quad \mu_1^2\eta_1^2, \quad \ldots, \quad \mu_q^2\eta_q^2$$

sont chacun compris entre une limite supérieure et une limite inférieure positives (la limite inférieure n'est jamais nulle).

En effet, en représentant les facteurs U_j, V_j, W_j d'après les formules (13), le coefficient de x_1^2 par exemple, dans la forme (22) sera

$$\lambda_1^2\varepsilon_1^2 a_{11}^2 + \lambda_2^2\varepsilon_2^2 a_{21}^2 + \ldots + \lambda_p^2\varepsilon_p^2 a_{p1}^2 + 2\mu_1^2\eta_1^2(b_{11}^2 + c_{11}^2) + \ldots + 2\mu_q^2\eta_q^2(b_{q1}^2 + c_{q1}^2),$$

nous savons que cette somme a une limite supérieure. Donc il en est de même *a fortiori* de $\lambda_1^2\varepsilon_1^2 a_{11}^2$. D'ailleurs, a_{11} n'est pas nul et ne peut prendre qu'un nombre limité de valeurs; car les facteurs U_j, V_j, W_j résultent de la décomposition des formes réduites en nombre limité. Donc $\gamma_1^2\varepsilon_1^2$ a une limite supérieure. Le même raisonnement s'applique à $\lambda_2^2\varepsilon_2^2$, ..., $\mu_1^2(b_{11}^2 + c_{11}^2)$, ...

On voit, en tenant compte de (16), que le produit

$$\lambda_1^2\varepsilon_1^2 a_{11}^2 . \lambda_2^2\varepsilon_2^2 a_{21}^2 \ldots \mu_1^4\eta_1^4(b_{11}^2 + c_{11}^2)^2 \ldots \mu_q^4\eta_q^4(b_{q1}^2 + c_{q1}^2)^2$$

est égal au carré du coefficient de x_1^n dans une forme réduite F_1. Ce coefficient n'est pas nul, et il est entier; donc il est au moins égal à *un*. Donc $\lambda_1^2\varepsilon_1^2 a_{11}^2$ est supérieur à l'unité divisée par les limites inférieures des autres facteurs, et comme a_{11} n'a qu'un nombre limité de valeurs $\lambda_1^2\varepsilon_1^2$ a une limite inférieure, et il en est de même des quantités analogues. On a donc

$$\log(\lambda_j^2\varepsilon_j^2) = Z_j, \qquad \log(\mu_j^2\eta_j^2) = \Lambda_j,$$

Z_j et Λ_j étant des quantités comprises dans des intervalles finis, d'où

$$\log\varepsilon_j^2 = -\log\lambda_j^2 + Z_j, \qquad \log\eta_j^2 = -\log\mu_j^2 + \Lambda_j$$

ou en se reportant aux équations (20) :

$$\log\varepsilon_j^2 = -l\,\mathrm{P}r_j + \mathrm{Z}_j, \qquad \log\eta_j^2 = -l\,\mathrm{P}s_j + \Lambda_j,$$
$$\log\varepsilon_j'^2 = -m\mathrm{P}r_j + \mathrm{Z}_j', \qquad \log\eta_j'^2 = -m\mathrm{P}s_j + \Lambda_j',$$

d'où

$$(23)\qquad \log\mathrm{E}_j^2 = (l-m)\mathrm{P}r_j + \mathrm{Z}_j' - \mathrm{Z}_j, \qquad \log\mathrm{H}_j^2 = (l-m)\mathrm{P}s_j + \Lambda_j' - \Lambda_j,$$

De là résulte que les substitutions de la première catégorie qui transforment F_0 en elle-même ne peuvent dériver de moins de $p+q-1$ substitutions fondamentales. Supposons, en effet, pour un instant qu'il y en ait un nombre ν inférieur à $p+q-1$. Désignons par $\sum'$, $\sum''$, ..., $\sum^{(\alpha)}$, ..., $\sum^{(\nu)}$ ces substitutions fondamentales et par

$$\mathrm{E}_j^{(\alpha)} \quad (j=1, 2, \ldots, p), \qquad \mathrm{H}_j^{(\alpha)} e^{\pm i\Theta_j^{(\alpha)}},$$

les multiplicateurs relatifs à $\sum^{(\alpha)}$.

On aurait

$$\log\mathrm{E}_j^2 = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} p_\alpha \log\mathrm{E}_j^{(\alpha)2} \qquad (j=1, 2, \ldots, p),$$
$$\log\mathrm{H}_j^2 = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} p_\alpha \log\mathrm{H}_j^{(\alpha)2} \qquad (j=1, 2, \ldots, q),$$

où les quantités p_α sont ν entiers positifs ou négatifs, ces équations étant au nombre de $p+q$, tandis que les nombres p_α sont au plus au nombre de $p+q-2$, les $p+q-1$ premières équations suffiront pour que l'on puisse éliminer entre elles les quantités p_α. On obtiendra ainsi une relation de la forme

$$(24)\qquad \sum_{j=1}^{j=p} \mathrm{C}_j \log\mathrm{E}_j^2 + \sum_{=1}^{j=q-1} \mathrm{K}_j \log\mathrm{H}_j^2 = 0,$$

où les quantités C_j et K_j sont des coefficients qui ne sont pas tous nuls. En remplaçant dans la relation (24) les logarithmes par les valeurs (23), il vient en divisant par $(l-m)\mathrm{P}$

$$\sum_{j=1}^{j=p} \mathrm{C}_j r_j + \sum_{j=1}^{=q-1} \mathrm{K}_j s_j + \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{j=p} \mathrm{C}_j(\mathrm{Z}_j' - \mathrm{Z}_j) + \sum_{j=1}^{j=q-1} \mathrm{K}_j(\Lambda_j' - \Lambda_j)}{(l-m)\mathrm{P}} = 0,$$

l et m étant entiers et différents, $(l-m)\mathrm{P}$ est au moins égal à P en valeur

absolue. D'ailleurs le numérateur de la fraction est essentiellement limité, et comme P peut être supposé aussi grand que l'on veut, il faudrait que l'on eût

$$\sum_{j=1}^{j=p} C_j r_j + \sum_{j=1}^{j=q-1} K_j s_j = 0, \tag{25}$$

mais une relation de la forme (25) est impossible puisque $p+q-1$ des quantités r_j, s_j peuvent être prises arbitrairement.

Les substitutions semblables de la première catégorie dérivent donc au moins de $p+q-1$ substitutions fondamentales. Le nombre des substitutions fondamentales qui correspondent à des unités dont le module analytique est différent de *un* n'est d'ailleurs pas plus grand, comme on le reconnaît aisément d'après les considérations développées par M. Hermite dans sa quatrième lettre à Jacobi.

V.

Il s'agit maintenant d'étudier de plus près les transformations semblables des formes décomposables en facteurs linéaires. A ce point de vue, certaines de ces formes se prêtent à une recherche facile. Nous utiliserons ici une notion très employée, celle du *système de modules minimum*.

Nous considérons un corps algébrique K comme l'ensemble des quantités qui s'expriment rationnellement à l'aide d'une racine z_1 d'une équation Γ à coefficients rationnels :

$$\varphi(z) = 0.$$

Soit n le degré de cette équation.

D'après la définition générale des entiers complexes, les entiers du corps K sont des quantités qui s'expriment rationnellement par l'une des racines de Γ et qui, en même temps, satisfont à des équations à coefficients entiers dont le plus haut coefficient est égal à l'unité.

On sait que la somme, le produit de plusieurs entiers complexes, et toute racine d'une équation algébrique entière dont le plus haut coefficient est l'unité et dont tous les autres coefficients sont des entiers complexes, sont aussi des entiers complexes. Ces propositions se démontrent aisément par la théorie des fonctions symétriques.

Soient n entiers complexes du corps K :

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n,$$

il résulte de ce qui précède que

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n$$

est un entier complexe du même corps en désignant par $m_1, m_2, \ldots, m_n$ des entiers non-complexes quelconques.

Soient

$$\omega'_1, \quad \omega'_2, \quad \ldots, \quad \omega'_n; \quad \omega''_1, \quad \ldots, \quad \omega''_n; \quad \ldots; \quad \omega_1^{(n-1)}, \quad \ldots, \quad \omega_n^{(n-1)}$$

les entiers conjugués de $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Le carré du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_n \\ \omega'_1 & \ldots & \ldots & \omega'_n \\ . & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{(n-1)} & \ldots & \ldots & \omega_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

est un entier non-complexe. En effet, ce carré est une quantité rationnelle, car il ne change pas quand on permute d'une manière quelconque les racines de l'équation Γ. Comme il satisfait d'ailleurs à la définition générale des entiers complexes, c'est un entier de l'arithmétique élémentaire. Car une équation à coefficients entiers dont le plus haut coefficient est l'unité, n'a pas d'autres racines rationnelles que des racines entières. D^2 est positif ou négatif suivant que le nombre des couples de racines imaginaires de l'équation Γ est pair ou impair.

Nous appellerons *système de modules minimum* un système d'entiers complexes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ appartenant au corps K et tel que la valeur absolue de D^2 soit la plus petite possible, sans être nulle. Ce minimum existe certainement, puisque D^2 ne peut prendre que des valeurs entières.

Tout entier complexe E du corps K peut se mettre sous la forme

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n,$$

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ étant des entiers non complexes. En effet, soient $E', E'', \ldots, E^{(n-1)}$, les conjugués de E; déterminons les quantités $m_1, m_2, \ldots, m_n$ par les équations

$$\begin{aligned} E &= m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n, \\ E' &= m_1\omega'_1 + \ldots\ldots + m_n\omega'_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E^{(n-1)} &= m_1\omega_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + m_n\omega_n^{(n-1)}; \end{aligned}$$

les quantités $m_1, m_2, \ldots, m_n$ seront rationnelles, car leurs valeurs ne changent évidemment pas quand on permute d'une manière quelconque les racines de Γ. Supposons que l'une au moins de ces quantités soit fractionnaire, par exemple,

$$m_1 = m'_1 + r_1,$$

m'_1 étant un nombre entier et r_1 une fraction moindre que 1. $E_1 - m'_1\omega_1$ est donc

un entier complexe égal à $r_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n$. Or le déterminant

$$\begin{vmatrix} r_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n & \omega_2 & \ldots & \omega_n \\ r_1\omega'_1 + m_2\omega'_2 + \ldots + m_n\omega'_n & \omega'_2 & \ldots & \omega'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1\omega_1^{(n-1)} + m_2\omega_2^{(n-1)} + \ldots + m_n\omega_n^{(n-1)} & \omega_2^{(n-1)} & \ldots & \omega_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

a pour valeur $r_1 D$. Donc $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ne constitueraient pas un système de modules minimum, ce qui est contre l'hypothèse ([1]).

Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une forme d'ordre n irréductible et décomposable en facteurs linéaires. Nous avons vu que la décomposition de cette forme dépend de la résolution d'une équation irréductible

$$\Gamma \qquad \varphi(z) = 0,$$

qui n'a que des racines simples. Ces racines déterminent n corps algébriques conjugués $K, K', \ldots, K^{(n-1)}$. Soit $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ un système de modules minimum, la forme

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \prod_{j=0}^{j=n-1} (\omega_1^{(j)} y_1 + \omega_2^{(j)} y_2 + \ldots + \omega_n^{(j)} y_n)$$

a évidemment ses coefficients entiers. Quant à $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dans la majorité des cas il ne sera pas possible de la décomposer en facteurs linéaires dont les coefficients sont des entiers de K. Mais on peut toujours écrire

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A^{n-1} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{j=n} T_j,$$

en désignant par A le coefficient de x_1^n dans F et par T_j des facteurs linéaires à coefficients complexes entiers. En effet on voit aisément que ces coefficients sont déterminés par des équations où le coefficient du plus haut terme est l'unité.

Les transformations semblables de F et de F_1 sont évidemment les mêmes. Il suffira donc d'étudier celles de F_1.

Considérons d'abord les transformations semblables de la première catégorie. Nous avons déjà démontré que, à une pareille transformation, correspond toujours une unité complexe.

Réciproquement, je dis que, à toute unité complexe de K, correspond une transformation semblable de Φ.

([1]) *Voir* au sujet des théorèmes que je rappelle ici l'*Arithmétique* de DIRICHLET ou MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen.*

En effet, ε étant une unité du corps K, $\varepsilon\omega_1, \varepsilon\omega_2, \ldots, \varepsilon\omega_n$ sont des entiers du même corps; donc on a

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon\omega_1 = \omega_1\alpha_{11} + \omega_2\alpha_{21} + \ldots + \omega_n\alpha_{n1}, \\ \varepsilon\omega_2 = \omega_1\alpha_{12} + \ldots\ldots\ldots + \omega_n\alpha_{n2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varepsilon\omega_n = \omega_1\alpha_{1n} + \ldots\ldots\ldots + \omega_n\alpha_{nn}, \end{array}\right.$$

où nous désignons par α_{jh} des entiers non-complexes. A cause de l'irréductibilité de Γ, les relations précédentes subsistent si l'on y remplace $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \varepsilon$ respectivement par les quantités conjuguées $\omega_1^{(h)}, \omega_2^{(h)}, \ldots, \omega_n^{(h)}, \varepsilon^{(h)}$. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ étant des variables arbitraires, on déduit des relations (26) :

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \ldots + \omega_n y_n) \\ &\quad = \omega_1(\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1n}y_n) + \ldots + \omega_n(\alpha_{n1}y_1 + \ldots + \alpha_{nn}y_n); \end{aligned}$$

donc, en posant

$$(27)\qquad x_j = \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_{jh} y_h,$$

$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots + \omega_n x_n$ devient, par la substitution (27),

$$\varepsilon(\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \ldots + \omega_n y_n).$$

Le déterminant de la substitution (27) est égal à *un*. En effet, considérons les variables $u^{(l)}, z^{(l)}$ définies par les équations

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} u^{(l)} = \sum_{j=1}^{j=n} \omega_j^{(l)} y_j, \qquad z^{(l)} = \sum_{j=1}^{j=n} \omega_j^{(l)} x_j \\ \qquad (l = 0, 1, \ldots, n-1). \end{array}\right.$$

La substitution (27) a pour transformée la substitution définie par les équations suivantes :

$$(29)\qquad z^{(l)} = u^{(l)}\varepsilon^{(l)} \qquad (l = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Or, le déterminant de la substitution (29) est égal au produit des quantités $\varepsilon^{(l)}$, c'est-à-dire à l'unité. D'ailleurs il est égal au déterminant de la substitution (27), donc ce déterminant est égal à *un*.

Revenons à la forme $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Les facteurs T_j sont de la forme

$$T_j = \sum_{h=1}^{h=n} \psi_h^{(j)} x_h,$$

et comme les nombres $\psi_h^{(j)}$ sont des entiers complexes, on pourra poser

$$\psi_h^{(j)} = \sum_{k=1}^{k=n} b_{hk} \omega_k^{(j)},$$

où les quantités b_{hk} sont des entiers non-complexes.

La fonction $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se déduit donc de $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ par la substitution

$$y_j = \sum_{h=1}^{h=h} b_{hj} x_h. \tag{30}$$

La transformée de la substitution (27) par la substitution (30) est en général une substitution à coefficients fractionnaires. Donc, à toute unité ne correspond pas nécessairement une transformation semblable de F à coefficients entiers et à déterminant *un*.

Supposons d'abord que le corps K ne contienne pas d'unité dont le module analytique soit égal à *un*.

Soient $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ les substitutions fondamentales qui transforment Φ en elle-même.

A $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ répondent des multiplicateurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ qui forment un système d'unités fondamentales. D'après la théorie générale exposée précédemment, nous savons aussi que F possède une infinité de transformations semblables de la première catégorie dérivant de ν substitutions fondamentales $S'_1, S'_2, \ldots, S'_\nu$, qui correspondent aussi, comme nous l'avons vu, à des unités $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_\nu$, et l'on a nécessairement

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_1 &= \varepsilon_1^{m_{11}} \varepsilon_2^{m_{12}} \ldots \varepsilon_\nu^{m_{1\nu}}, \\
\varepsilon'_1 &= \varepsilon_1^{m_{21}} \ldots\ldots \varepsilon_\nu^{m_{2\nu}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\varepsilon'_\nu &= \varepsilon_1^{m_{\nu 1}} \ldots\ldots \varepsilon_\nu^{m_{\nu\nu}},
\end{aligned}$$

les exposants m étant des nombres entiers. S'_j est une substitution à coefficients entiers et de déterminant *un*, et elle est la transformée par la substitution (30) de la substitution obtenue en multipliant par ε'_1 le facteur correspondant de Φ. Ainsi, *à toute transformation semblable de* F *correspond une transformation sem-*

blable de Φ. De plus, toute unité étant de la forme

$$E = \varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \dots \varepsilon_\nu^{k_\nu},$$

on peut toujours déterminer des nombres entiers au nombre de $\nu + 1$, λ, $\mu_1, \dots, \mu_\nu$, de manière à satisfaire aux ν relations homogènes :

$$\begin{aligned}
\lambda k_1 &= \mu_1 m_{11} + \mu_2 m_{21} + \dots + \mu_\nu m_{\nu 1},\\
\lambda k_2 &= \mu_1 m_{12} + \mu_2 m_{22} + \dots + \mu_\nu m_{\nu 2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\lambda k_\nu &= \mu_1 m_{1\nu} + \mu_2 m_{2\nu} + \dots + \mu_\nu m_{\nu\nu},
\end{aligned}$$

On aura alors

$$E^\lambda = \varepsilon_1'^{\mu_1} \varepsilon_2'^{\mu_2} \dots \varepsilon_\nu'^{\mu_\nu}.$$

Donc à E^λ correspond une transformation semblable de F de la première catégorie.

La discussion du cas où le corps K présente des unités dont le module analytique est *un* est un peu plus compliquée, sans offrir de difficultés particulières. Nous nous permettrons de l'omettre. Dans tous les cas, on arrive à la conclusion suivante :

Il existe toujours une puissance d'une transformation semblable quelconque de Φ *de la première catégorie dont la transformée par la substitution* (30) *est une transformation semblable de* F.

On sait, d'après M. Hermite, que tout entier complexe dont le module analytique est *un*, est une racine aliquote de l'unité.

Par suite, les transformations semblables de F qui correspondent à de pareils multiplicateurs sont toutes périodiques et sont en nombre limité.

Reste à examiner les transformations semblables de la deuxième catégorie. Un facteur de F ne peut être transformé en un autre, à un multiplicateur constant près, qu'autant que les racines de Γ qui correspondent à ces deux facteurs s'expriment rationnellement l'une par l'autre. Si cette circonstance se présente, d'abord il est certain que la forme Φ se transformera en elle-même par des substitutions périodiques échangeant entre elles les facteurs de Φ.

En effet, les corps conjugués qui correspondent aux diverses racines de Γ ne sont pas tous distincts, et le nombre des corps conjugués distincts est un diviseur de n. Supposons que

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \dots,\ \omega_n;\ \omega_1',\ \omega_2',\ \dots,\ \omega_n';\ \dots;\ \omega_1^{(q-1)},\ \omega_2^{(q-1)},\ \dots,\ \omega_n^{(q-1)}$$

appartiennent au même corps algébrique; comme $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ forment un système de modules minimum et que $\omega_1', \omega_2', \dots, \omega_n'$ sont des entiers complexes,

on aura

$$(31)\qquad \omega'_j = \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_{jh}\omega_h \qquad (j=1, 2, \ldots, n),$$

les quantités α_{jh} étant des coefficients entiers.

En remplaçant les quantités ω_h dans les seconds membres de (31) par un système quelconque de modules conjugués, on obtiendra encore un système de modules conjugués. Dès lors, si l'on opère sur les quantités ω'_j comme on a opéré sur les quantités ω_h et ainsi de suite, on devra finalement retomber sur le système de modules primitif. Il en résulte que les quantités α_{jh} sont les coefficients d'une substitution périodique.

Considérons maintenant la substitution

$$x_h = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{jh} x'_j,$$

cette substitution ne fait que permuter les facteurs de Φ; c'est donc une transformation en elle-même de Φ appartenant à la seconde catégorie. Chacun des $q-1$ systèmes appartenant au même groupe que $\omega_1, \ldots, \omega_n$ donnera de même lieu à une substitution transformant Φ en elle-même.

Réciproquement, on voit sans difficulté que toute transformation de Φ en elle-même résulte d'une transformation de la première catégorie suivie d'une transformation de la seconde catégorie permutant simplement entre eux les facteurs de Φ.

Quant aux transformations semblables de seconde catégorie des formes F, il existe une puissance de l'une quelconque d'entre elles qui appartient à la première catégorie; il existe aussi un nombre limité de transformations semblables de la seconde catégorie qui ramènent une transformation de la seconde catégorie à la première catégorie.

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE DE M. C. GLASENAPP

POUR LA RÉDUCTION DES OBSERVATIONS

DES

ÉCLIPSES DES SATELLITES DE JUPITER (1),

PAR M. NICOLAS STOYANOFF,

Professeur au Lycée de Sofia.

Dans la dernière année de mon séjour à Toulouse, comme étudiant à la Faculté des Sciences et assistant à l'Observatoire, M. H. Bourget, maître de conférences à la Faculté des Sciences et astronome à l'Observatoire, a bien voulu attirer mon attention sur la dissertation de M. Glasenapp intitulée *Comparaison des observations des éclipses des satellites de Jupiter entre elles et avec les Tables d'éclipses,* écrite en langue russe. Après avoir lu ce très intéressant Mémoire j'ai cru bien, avec l'autorisation bienveillante de M. Glasenapp, d'en écrire un exposé succinct en français, d'autant plus qu'il se rattache en partie au Mémoire de Bailly : *Sur les inégalités de la lumière des satellites de Jupiter, sur leurs diamètres, et sur un moyen de rendre les observations comparables.* (*Histoire de l'Académie des Sciences,* Paris, 1771.)

On sait qu'aujourd'hui encore il y a des astronomes qui préfèrent adopter la valeur de la constante d'aberration de Struve et d'autres celle de Delambre. La discordance entre ces valeurs et les tentatives sans succès de l'explication de cette discordance, ont été l'origine du travail de M. Glasenapp, qui a pour objet de vérifier les calculs de Delambre. Ce problème paraît d'autant plus intéressant que Delambre n'a publié aucun travail ni laissé aucun manuscrit, concernant la détermination de la vitesse de propagation de la lumière. Pour atteindre son but, l'auteur étudie, dans son Mémoire, principalement les causes qui peuvent modifier

(1) Le Mémoire de M. Glasenapp est un des plus importants qu'on ait écrits sur la réduction des observations des satellites de Jupiter. M. Downing en a donné autrefois une courte analyse dans le Tome XII (1889) du Recueil *The Observatory*. H. B.

l'éclat apparent du premier satellite de Jupiter et les circonstances que présente l'éclipse du satellite.

Le Mémoire, de 158 pages, est divisé en quatre Chapitres. Nous essayerons d'exposer ici le contenu essentiel de chacun de ces Chapitres.

Le premier Chapitre est consacré à l'étude des causes pouvant modifier l'éclat du premier satellite de Jupiter.

Dans le deuxième Chapitre, on détermine la grandeur du segment qui reste encore éclairé au moment de l'éclipse, dans des circonstances données.

Dans le troisième Chapitre, on examine l'influence sur la durée de l'immersion et de l'émersion du premier satellite due à l'inclinaison de l'orbite du satellite et à la position des nœuds de son orbite par rapport à l'orbite de Jupiter.

Enfin, dans le quatrième Chapitre, on applique les résultats obtenus dans les trois premiers Chapitres aux Problèmes suivants :

1° *Détermination de la vitesse de la lumière et vérification des Tables d'éclipses du premier satellite, construites par De Damoiseau.*

2° *Détermination de la longitude de Leyde au moyen des observations des éclipses du premier satellite, comparées aux Tables d'éclipses des satellites de De Damoiseau.*

3° *Recherche de la constance de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.*

CHAPITRE I.

MESURE DE LA QUANTITÉ DE LUMIÈRE IMPERCEPTIBLE.

Dans ce Chapitre, l'auteur tâche de déterminer, pour chacun des satellites de Jupiter et pour chaque éclipse, la quantité de lumière, réfléchie par le segment invisible (¹), en tenant compte de toutes les circonstances qui se présentent pendant l'observation.

En 1732, Grandjean de Fauchy (²) a fait remarquer aux astronomes que les inégalités subjectives du mouvement des satellites de Jupiter modifient les dimensions du segment invisible. De Fauchy a même montré qu'il était possible d'étu-

(¹) Bailly appelle *segment invisible* la portion du disque du satellite en dehors de l'ombre pure. Il paraît ignorer l'existence de la pénombre. H. B.

(²) *Hist. de l'Acad. d. Sc.*, Paris, 1732.

dier cette modification et de mesurer la quantité de lumière imperceptible, réfléchie par le segment éclairé au moment de l'éclipse apparente. De Fauchy n'a pu parvenir à confirmer son assertion en déterminant les dimensions du segment invisible et en étudiant les inégalités des mouvements des satellites de Jupiter. Ce n'est qu'en 1771 que Bailly (¹) est parvenu à faire les expériences, indiquées seulement par De Fauchy. Ces expériences sont basées sur la loi suivante :

Les quantités de lumière reçues par l'œil dans deux lunettes sont en raison directe des carrés des diamètres des ouvertures des deux lunettes.

La méthode de Bailly, que l'on peut nommer *la méthode des diaphragmes,* lui a permis de calculer la quantité S de lumière imperceptible, réfléchie par le segment éclairé au moment de l'éclipse apparente, en prenant pour unité la quantité de lumière, réfléchie par le disque entier du satellite pour la lunette d'ouverture m (²), dont il a fait usage, et dans les conditions suivantes :

1° La distance zénithale de Jupiter étant égale à zéro;

2° Les distances de Jupiter au Soleil et à la Terre étant respectivement a et $a-1$, en désignant par a le demi-grand axe de l'orbite de Jupiter, exprimé en prenant pour unité la distance moyenne de la Terre au Soleil.

Étant donnée la quantité S de lumière imperceptible du satellite dans les conditions ci-dessus (1° et 2°), l'auteur cherche comment varie S :

1° Quand au lieu d'observer avec une lunette d'ouverture m on a observé avec une lunette d'ouverture n;

2° Quand la distance zénithale de Jupiter, au moment de l'observation, est z;

3° Et quand la distance de Jupiter au Soleil est r, et celle à la Terre Δ.

En tenant compte des trois corrections dues aux trois conditions nouvelles, on aura, pour la quantité de lumière imperceptible, l'expression suivante :

$$(1) \qquad S\,\frac{m^2}{n^2}\,\varphi(z)\,\frac{r^2\Delta^2}{a^2(a-1)^2},$$

où S représente toujours la quantité de lumière imperceptible dans les conditions normales ($z=0$, a, $a-1$), mentionnées plus haut.

La Table de Seidel, annexée à la fin de cet exposé (Table III), donne les logarithmes des rapports de l'éclat de l'astre lorsqu'il se trouve au zénith à son éclat

---

(¹) *Sur les inégalités de la lumière des satellites de Jupiter, sur leurs diamètres et sur un moyen de rendre les observations comparables.* (*Hist. de l'Acad. d. Sciences*, Paris, 1771.)

(²) L'ouverture de la lunette de Bailly mesurait 24 lignes, ou bien 5cm,4.

lorsqu'il est à une distance zénithale z (1). Les logarithmes de ces rapports [de la fonction $\varphi(z)$] sont donnés de degré en degré à partir de 13° jusqu'à 86°.

La valeur de l'expression (1) varie avec la phase du satellite. En effet, le satellite ne nous montre pas toujours toute sa moitié éclairée. Donc, l'expression (1) étant exacte dans le cas où l'on prend pour unité la quantité de lumière réfléchie par le disque entier, sera un peu modifiée dans le cas où nous ne verrons qu'une partie de la surface du satellite.

Si l'on désigne par α la valeur angulaire de la partie non éclairée du disque apparent du satellite, on pourra exprimer le rapport de la surface éclairée à la surface entière du disque par

$$[1 - \tfrac{1}{2}\alpha] : 1, \tag{2}$$

et il s'ensuit que, pour les différentes phases, l'expression (1) doit être multipliée par le facteur $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\alpha}$. Donc, finalement, la quantité de lumière imperceptible sera donnée par l'expression

$$S \frac{m^2}{n^2} \varphi(z) \frac{r^2 \Delta^2}{a^2(a-1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\alpha}. \tag{3}$$

La Table II, annexée à la fin de l'exposé, donne les valeurs de $\log \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\alpha}$ pour les différentes positions de Jupiter et de la Terre. Elle a pour argument l'angle χ, ayant pour sommet le centre de Jupiter et pour côtés les droites qui joignent ce point au centre du Soleil et de la Terre. On a calculé les valeurs pour chaque degré, jusqu'à $\chi = 12°$. Pour le but que l'auteur poursuit, il suffit d'avoir la valeur approximative de cet angle, qui est égale à la valeur absolue de la différence entre la longitude héliocentrique et la longitude géocentrique de Jupiter.

Les causes suivantes peuvent également modifier la valeur de l'expression (3) :

a. La distance plus ou moins grande de la Lune; sa phase et sa distance zénithale;

b. L'état de l'atmosphère;

c. La vue de l'observateur;

d. Toutes les autres causes capables de modifier l'éclat apparent du satellite.

Or, jusqu'à l'apparition du Mémoire de M. Glasenapp, personne n'avait encore fait l'étude intéressante de l'influence de toutes ces causes d'erreurs, et, par conséquent, on n'en pouvait tenir compte.

L'auteur fait ensuite remarquer que les instruments employés peuvent avoir une

---

(1) SEIDEL, *Untersuchungen über die gegenseitige Helligkeit der Fixsterne erster Grösse und über die Extinction des Lichtes, etc.*, München, 1852.

influence considérable sur les observations des éclipses, et quand on compare les observations avec les Tables on ne peut se dispenser de tenir compte de cette influence. La conclusion est que les observations des éclipses, faites avec des réflecteurs, sont moins exactes que celles faites avec des réfracteurs.

L'éclat de Jupiter peut aussi faire varier la quantité S trouvée par Bailly; l'intensité apparente du satellite diminuant à mesure qu'il se rapproche du disque de Jupiter, et croissant au contraire lorsqu'il s'en éloigne. Pour étudier la loi de la variation de l'éclat des satellites avec leurs distances au centre de Jupiter, Bailly a fait des observations avec des diaphragmes pour diverses distances des satellites au centre de Jupiter à des époques différentes. Il a trouvé que la quantité S de lumière imperceptible, en fonction de la distance ρ du satellite au centre de Jupiter, est donnée par la formule

$$(4) \qquad S = A\frac{1}{\rho} + B\frac{1}{\rho^2}.$$

Bailly n'a déterminé les valeurs de ces constantes que pour les trois premiers satellites de Jupiter.

Voici les valeurs correspondantes de S_1, S_2, S_3 :

$$(5) \qquad \begin{cases} \text{☾ I.} & S_1 = 0,0495\,\frac{1}{\rho} + 0,3397\,\frac{1}{\rho^2}, \\ \text{☾ II.} & S_2 = 0,3933\,\frac{1}{\rho} + 0,0375\,\frac{1}{\rho^2}, \\ \text{☾ III.} & S_3 = 0,2157\,\frac{1}{\rho} + 0,0756\,\frac{1}{\rho^2}. \end{cases}$$

Les valeurs des constantes A et B se rapportent à la lunette de Bailly, mesurant 24 lignes d'ouverture et grossissant à peu près 60 fois pour une hauteur de Jupiter égale à 15°, et pour la distance 5,2207 au Soleil et 4,8456 à la Terre.

De Lalande [1] est parvenu à déterminer la valeur des constantes A et B pour le quatrième satellite. Pour sa lunette de $40\frac{1}{2}$ [2] lignes d'ouverture, il a trouvé pour S_4 la formule

$$(6) \qquad \text{☾ IV.} \quad S_4 = 0,0351\,\frac{1}{\rho} + 0,01796\,\frac{1}{\rho^2}.$$

Une autre méthode pour déterminer la loi de la variation de l'éclat des satellites avec leurs distances au centre de Jupiter, due à De Barros, est exposée dans son Mémoire : *Nouvelles équations pour le perfectionnement de la théorie*

---

(1) *Hist. de l'Acad. d. Sc.*, Paris, MDCCLXXXVIII, p. 212.

(2) $9^{cm},1$.

des satellites de Jupiter et pour la correction des longitudes terrestres déterminées par les observations des mêmes satellites (*Histoire de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin,* pour l'année 1755). Pour mesurer l'éclat apparent des satellites, De Barros se servait de lames de verre à faces parallèles d'épaisseurs différentes, dont le pouvoir absorbant avait été préalablement déterminé. En comparant les épaisseurs des lames de verre qui produisent les éclipses artificielles du satellite avant les époques de deux éclipses effectives on trouve directement le rapport entre les éclats du satellite au moment des éclipses, le rapport entre les quantités de lumière imperceptible et entre les segments invisibles.

Mais, en diminuant l'éclat du satellite jusqu'à disparition complète, comme cela se fait dans les méthodes de Bailly et de De Barros, on diminue en même temps l'éclat de Jupiter, et quand un diaphragme ou une certaine épaisseur de verre a fait disparaître le satellite, l'éclat apparent de Jupiter est tellement diminué qu'il n'a presque aucune influence sur l'éclat du satellite. D'où l'auteur conclut qu'aucune de ces deux méthodes n'atteint le but qu'il poursuit, à savoir : *Établir la loi de la diminution de l'éclat apparent du satellite avec la diminution de sa distance au centre de Jupiter.* Tout au moins, la solution qu'elles donnent est très peu satisfaisante. Par suite les expressions (5) et (6) données par Bailly et De Lalande ne peuvent, rigoureusement parlant, servir pour comparer les observations des éclipses des satellites de Jupiter, ni entre elles ni avec les Tables d'éclipses.

L'auteur remarque, en outre, que ces deux méthodes ne donnent aucun moyen de déterminer l'influence de la variation de l'éclat de Jupiter sur l'éclat apparent des satellites et il expose sa propre méthode héliométrique, laquelle, d'après lui, donne un moyen excellent pour déterminer la loi de la variation de l'éclat des satellites en fonction de leurs distances au centre de Jupiter. En voici le principe.

On sait que l'objectif de l'héliomètre est composé de deux moitiés mobiles. En faisant mouvoir les deux parties de l'objectif on peut changer la position relative des deux astres; on peut rapprocher à volonté le satellite du disque de Jupiter. Remarquons en plus que chaque moitié de l'objectif donne une image de Jupiter et de son satellite.

Désignons l'une des moitiés de l'objectif et l'image qu'elle donne par l'indice I et l'autre moitié et son image par l'indice II. En prenant des diaphragmes de diverses dimensions (comme ceux dont s'est servi Bailly) et en ne diaphragmant que l'objectif I on peut diminuer à volonté l'éclat du satellite dans l'image I sans modifier l'éclat de Jupiter et de son satellite dans l'image II. En diminuant successivement l'ouverture de l'objectif I on arrive à faire disparaître l'image du satellite dans l'image correspondante. Des expériences semblables pour différentes distances du satellite au centre de Jupiter donneront la loi de la variation de l'éclat

apparent et permettront de déterminer les valeurs des coefficients A, B, C dans la formule

$$S = A + B\frac{1}{\rho} + C\frac{1}{\rho^2}, \tag{7}$$

qui, d'après M. Glasenapp, doit remplacer la formule (4), donnée par Bailly.

Un climat défavorable et surtout l'hiver de l'Europe septentrionale n'ayant pas permis à l'auteur de commencer ses observations héliométriques, il se sert des observations de Bailly et de De Lalande pour déterminer les valeurs des constantes A, B, C pour les quatre satellites. Bailly avait déterminé les coefficients A et B en employant seulement deux observations, bien qu'il en ait fait plusieurs pour chaque satellite; M. Glasenapp a profité de toutes les observations faites, pour trouver les valeurs les plus probables des coefficients A, B, C; Bailly avait réduit les observations à l'époque à laquelle Jupiter est éloigné du Soleil de 5,2207, et de la Terre de 4,8456, et situé à la distance zénithale de 75°; M. Glasenapp a réduit les observations à l'époque où Jupiter est aux distances moyennes du Soleil et de la Terre : a et $a - 1$, et lorsqu'il se trouve au zénith.

On obtient ainsi les formules suivantes :

$$\text{☾ I.} \qquad S_1 = 0{,}0204 - 0{,}0108\frac{1}{\rho} + 0{,}1437\frac{1}{\rho^2}, \tag{8}$$

$$\text{☾ II.} \qquad S_2 = -0{,}0012 + 0{,}1789\frac{1}{\rho} - 0{,}0450\frac{1}{\rho^2}, \tag{9}$$

$$\text{☾ III.} \qquad S_3 = -0{,}0027 + 0{,}1034\frac{1}{\rho} + 0{,}0097\frac{1}{\rho^2}, \tag{10}$$

$$\text{☾ IV.} \qquad S_4 = 0{,}0012 + 0{,}650\frac{1}{\rho} + 0{,}0513\frac{1}{\rho^2}. \tag{11}$$

Si l'on connaît, en outre, la loi de distribution de la lumière sur le segment invisible, les dimensions du satellite, celles de l'ombre et de la pénombre de Jupiter, on en peut déduire, à l'aide de la valeur de la quantité S, la grandeur du segment invisible et, par conséquent, la position du satellite par rapport à la surface du cône d'ombre de Jupiter.

Après la discussion des valeurs des coefficients A, B, C et après avoir trouvé leurs erreurs probables respectives, l'auteur termine ce Chapitre en observant que l'on ne doit pas regarder comme définitifs les résultats ci-dessus, parce que les expériences de Bailly et de De Lalande, qui ont servi à déterminer les coefficients de la fónction S, ne peuvent nous donner la vraie loi de la variation de l'éclat des satellites de Jupiter.

CHAPITRE II.

Étant donnée la quantité de lumière réfléchie par le segment invisible du satellite, déterminer la grandeur de ce segment.

La solution de ce problème, dit l'auteur, serait tout à fait simple si l'on pouvait admettre avec Bailly qu'il y a une surface de séparation bien déterminée entre l'ombre de Jupiter et l'espace éclairé par le Soleil; c'est-à-dire si l'on pouvait considérer le Soleil comme un point lumineux d'intensité égale à l'éclat du Soleil; autrement dit, si l'on néglige la pénombre. Dans cette hypothèse la quantité de lumière, réfléchie par le segment invisible, exprimerait en même temps le rapport entre la surface du segment invisible et celle du disque entier du satellite. La surface J du segment invisible serait donnée par l'équation

$$(1) \qquad J = \left(\frac{2\varphi}{360^\circ} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\varphi\right) - \frac{R^2}{r^2}\left(\frac{2\psi}{360^\circ} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\psi\right),$$

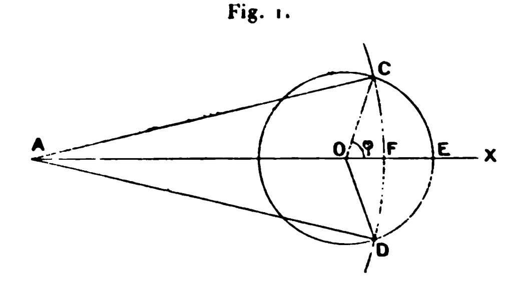
où φ désigne l'angle COE (*fig.* 1), déterminé par la relation

$$(2) \qquad \sin\psi = \frac{r}{R}\sin\varphi;$$

r et R sont les rayons respectifs du disque du satellite et celui du disque de Jupiter.

Mais l'hypothèse faite par Bailly, étant loin d'être vraie, n'est pas admissible,

Fig. 1.



et voici le procédé de M. Glasenapp pour trouver la quantité S de lumière imperceptible, réfléchie par le segment invisible.

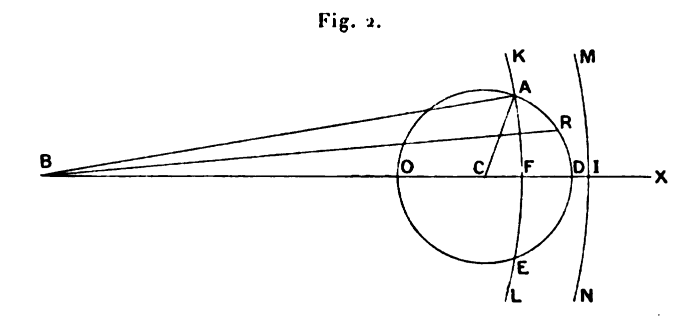
Soient :

ADEO (*fig.* 2), le disque apparent d'un des satellites de Jupiter;
$AC = \Upsilon = 1$, son rayon;
$AB = P$, le rayon de l'ombre;
$BI = P_1$, le rayon de la pénombre;
$FI = q$, la largeur de la pénombre, comptée le long du rayon BJ.

AB, BI, FI sont exprimés en prenant le rayon du satellite pour unité.

L'intensité de la lumière dans la pénombre n'est pas partout la même : à la limite KL de l'ombre il y a une absence complète de lumière; à la limite MN de la pénombre l'intensité de la lumière est la plus grande : c'est cette intensité que l'auteur prend pour unité. Elle croît de KL à MN.

Fig. 2.



Soit $F(\Delta)$ l'intensité lumineuse d'un point quelconque, situé dans la pénombre à une distance Δ de la circonférence de l'ombre, comptée le long de la normale à la circonférence de l'ombre.

Pour $\Delta = 0$, la fonction $F(\Delta)$ devient égale à zéro; pour $\Delta = q$, elle devient égale à l'unité; pour toutes les autres valeurs de Δ comprises entre zéro et q on a $0 < F(\Delta) < 1$.

Δ ne peut être ni négatif, ni plus grand que q.

Soient, en coordonnées polaires,

$$(3) \qquad u = P,$$

l'équation du cercle d'ombre, qui a pour centre B;

$$(4) \qquad u = P_1,$$

l'équation de la pénombre;

$$(5) \qquad (u \cos\Theta - b)^2 + u^2 \sin^2\Theta = \Upsilon^2,$$

l'équation du disque du satellite.

L'angle Θ est compté à partir de l'axe fixe BOX vers le rayon vecteur $u = \mathrm{BR}$ dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre; $b = \mathrm{BC}$ est la distance du centre du cercle d'ombre au centre du satellite.

En supposant que la fonction $F(\Delta)$ exprime la loi de distribution de l'intensité lumineuse dans la pénombre, prenant pour unité l'aire du disque du satellite, et en prenant pour unité la quantité de lumière, réfléchie par le disque, la quantité de lumière S du segment ADEF aura pour valeur

$$(6) \qquad S = \frac{2}{\pi} \int_{\Theta=0}^{\Theta=\Phi(0)} \int_{u=P}^{u=P+\Delta} F(\Delta)\, u\, d\Theta.$$

Introduisant dans cette formule, à la place de u, une nouvelle variable Δ, qui satisfait aux conditions

$$(7) \qquad \begin{cases} u = P + \Delta, \\ du = d\Delta, \end{cases}$$

on aura

$$(8) \qquad S = \int_{\Theta=0}^{\Theta=\Phi(\Delta)} \int_{\Delta=0}^{\Delta=\Delta} F(\Delta)\left(1 + \frac{\Delta}{P}\right) d\Delta\, d\Theta,$$

où la limite supérieure de Θ, $\Theta = \Phi(\Delta)$, est donnée par l'équation du disque du satellite (5)

$$(9) \qquad \Theta = \Phi(\Delta) = \arccos\left[\frac{(P+\Delta)^2 + b^2 - 1}{2b(P+\Delta)}\right].$$

Parfois l'éclipse a lieu lorsqu'une partie du disque du satellite se trouve en dehors de la pénombre et une autre dans la pénombre. La figure 3 nous représente un tel cas.

Voici comment on trouvera, dans ce cas, la quantité de lumière réfléchie par le segment IAMLDF :

a. La quantité de lumière, réfléchie par la surface AMLG, lorsque son intensité de lumière est égale à 1, sera

$$(10) \qquad A = \left(\frac{2\varphi_1}{360} - \frac{1}{\pi}\sin 2\varphi_1\right) - P_1^2\left(\frac{2\Theta_1}{360} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\Theta_1\right),$$

où $\varphi_1 = \widehat{\mathrm{ACM}}$, $\Theta = \widehat{\mathrm{ABM}}$.

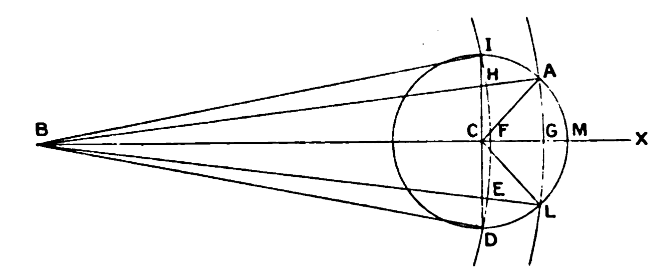
b. La quantité de lumière, réfléchie par la surface AGLEFH, en supposant que la distribution de l'intensité de lumière dans la pénombre soit exprimée par la fonction $F(\Delta)$, sera

$$(11) \qquad B = \frac{2P}{\pi} \int_0^{\Theta_1} \int_0^{q} F(\Delta)\left(1 + \frac{\Delta}{P}\right) d\Delta\, d\Theta;$$

c. Enfin, la quantité de lumière, réfléchie par les deux surfaces IAH et ELD, sera

$$(12)\qquad C = \frac{2P}{\pi}\int_{\Theta=\Theta_1}^{\Theta=\Phi_0(\Delta)}\int_{\Delta=0}^{\Delta=q} F(\Delta)\left(1+\frac{\Delta}{P}\right)d\Delta\, d\Theta,$$

Fig. 3.



où la limite supérieure de Θ, $\Theta = \Phi(\Delta)$ est donnée par l'équation (5) :

$$(13)\qquad \Theta = \Phi_0(\Delta) = \arccos\left[\frac{(P+\Delta)^2 + b^2 - 1}{2b(\rho+\Delta)}\right].$$

Donc la quantité de lumière, réfléchie par le segment entier, sera donnée par la somme de (10), (11) et (12)

$$(14)\qquad S = A + B + C.$$

Lorsque $\Theta_1 > \Theta_0$, il est plus commode, pour les calculs numériques, de faire un changement de limites de la façon suivante : remplaçons dans l'intégrale B (11) la limite Θ_1 par la limite Θ_0, on aura

$$(15)\qquad B_1 = \frac{2P}{\pi}\int_{\Theta}^{\Theta_0}\int_{0}^{q} F(\Delta)\left(1+\frac{\Delta}{P}\right)d\Delta\, d\Theta;$$

faisons dans l'intégrale C (12) les changements correspondants, à savoir : mettons Θ_1 à la place de Θ_0 et remplaçons Δ par $q = \Delta'$, de sorte que

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} F_1(\Delta') &= F(q-\Delta'),\\ u &= P - \Delta',\end{aligned}\right.$$

elle devient

$$(17)\qquad C_1 = \frac{2P_1}{\pi}\int_{\Theta_0}^{\Theta=\Phi_1(\Delta)}\int_{\Delta=0}^{\Delta=q} F_1(\Delta')\left(1-\frac{\Delta'}{P_0}\right)d\Delta'\, d\Theta,$$

dont la limite supérieure Θ est donnée par l'équation

$$(18)\qquad \Theta = \Phi(\Delta') = \arc\cos\left[\frac{(P_1-\Delta')^2+b^2-1)}{2b(P_1-\Delta')}\right],$$

et la quantité de lumière, réfléchie par le segment entier, sera donnée par l'expression

$$(19)\qquad S = A + B_1 + C_1.$$

Il y a encore un cas qui peut se présenter lorsqu'on observe une éclipse : c'est le cas où le satellite tout entier est en dehors de l'ombre pure. Les observations de telles éclipses étant très incertaines, l'auteur ne s'occupe pas de ce cas. Il passe à la recherche de la loi de distribution de l'intensité de la lumière dans la pénombre comme il suit :

En admettant que l'intensité de la lumière en un point quelconque de la pénombre soit en raison directe de l'aire de la portion du Soleil visible de ce point, l'intensité de la lumière en un point de la pénombre situé à une distance Δ de la circonférence de l'ombre sera donnée par l'expression

$$(20)\qquad J = \left(\frac{2\omega}{360}-\frac{1}{2\pi}\sin 2\omega\right)-\frac{R^2}{r^2}\left(\frac{2\psi}{360}-\frac{1}{2\pi}\sin 2\psi\right),$$

où (*fig.* 4) $\omega = \widehat{OSL}$; $\psi = \widehat{OBL}$; $R = BN$ étant le rayon apparent du disque de

Fig. 4.

Jupiter, visible du point considéré ; et $r = QS$ le rayon apparent du Soleil visible du même point.

On a encore les relations suivantes entre les angles ω, ψ et Δ :

$$(21)\qquad \sin\psi = \frac{r}{R}\sin\omega,$$

$$(22)\qquad ML = \Delta = r(1-\cos\omega) - R(1-\cos\psi).$$

Au moyen des équations (21) et (22) on peut exprimer les angles ω et ψ en

fonction de Δ. On arrive aux relations suivantes :

$$(23)\quad \begin{cases} \omega \sin 1'' = A\,\Delta^{\frac{1}{2}} + B\,\Delta^{\frac{3}{2}} + C\,\Delta^{\frac{5}{2}} + \ldots, \\ \sin 2\omega = A_1\Delta^{\frac{1}{2}} + B_1\Delta^{\frac{3}{2}} + C_1\Delta^{\frac{5}{2}} + \ldots, \\ \psi \sin 1'' = \dfrac{r}{R}\Delta^{\frac{1}{2}}(1 + \alpha'\Delta + \beta'\Delta^2 + \gamma'\Delta^3 + \ldots), \\ \sin 2\psi = A_2\Delta^{\frac{1}{2}} + B_2\Delta^{\frac{3}{2}} + C_2\Delta^{\frac{5}{2}} + \ldots, \end{cases}$$

où $A, B, C, \ldots$; $A_1, B_1, C_1, \ldots$; $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$; $A_2, B_2, C_2, \ldots$ sont des coefficients constants pour chaque satellite, que l'on trouvera par des quadratures mécaniques.

En substituant ces valeurs dans l'équation (20) on exprime l'intensité J en fonction de Δ. On a

$$(24)\quad J = F(\Delta) = a\Delta^{\frac{3}{2}} + b\Delta^{\frac{5}{2}} + c\Delta^{\frac{7}{2}} + d\Delta^{\frac{9}{2}} + \ldots,$$

où $a, b, c, d, \ldots$ sont des constantes pour chaque satellite.

Voici les valeurs de la fonction $F(\Delta) = J$, pour les quatre satellites de Jupiter :

$$(25)\quad \begin{cases} J_1 = F'(\Delta) = [0,4217]\Delta^{\frac{3}{2}} + [0,0334_n]\Delta^{\frac{5}{2}} + [\bar{1},3968_n]\Delta^{\frac{7}{2}} + [\bar{1},1471_n]\Delta^{\frac{9}{2}} + [\bar{1},0548_n]\Delta^{\frac{11}{2}} + \ldots, \\ J_2 = F''(\Delta) = [0,0023]\Delta^{\frac{3}{2}} + [\bar{1},3373_n]\Delta^{\frac{5}{2}} + [\bar{2},4617_n]\Delta^{\frac{7}{2}} + [\bar{3},8809_n]\Delta^{\frac{9}{2}} + [\bar{3},4691_n]\Delta^{\frac{11}{2}} + \ldots, \\ J_3 = F'''(\Delta) = [0,0692]\Delta^{\frac{3}{2}} + [\bar{1},4655_n]\Delta^{\frac{5}{2}} + [\bar{2},5415_n]\Delta^{\frac{7}{2}} + [\bar{2},0323_n]\Delta^{\frac{9}{2}} + [\bar{3},6412_n]\Delta^{\frac{11}{2}} + \ldots, \\ J_4 = F^{\text{IV}}(\Delta) = [\bar{1},4659]\Delta^{\frac{3}{2}} + [\bar{2},4599_n]\Delta^{\frac{5}{2}} + [\bar{3},0832_n]\Delta^{\frac{7}{2}} + [\bar{4},2152_n]\Delta^{\frac{9}{2}} + [\bar{5},4054_n]\Delta^{\frac{11}{2}} + \ldots, \end{cases}$$

où Δ doit être exprimée en partie du rayon du satellite correspondant ; les coefficients étant donnés par leurs logarithmes.

Ayant trouvé la forme des fonctions J_1, J_2, J_3, J_4, M. Glasenapp résout le problème proposé comme il suit :

Pour les différentes positions du satellite par rapport à l'ombre de Jupiter, c'est-à-dire pour les différentes valeurs de Δ, il calcule par les formules (14) et (19) la quantité S de lumière réfléchie par le segment. De cette façon il peut construire une Table qui donne les valeurs de S pour un argument donné Δ. A l'aide de cette Table il en construit une autre ayant pour argument S.

Nous reproduisons à la fin de cet exposé les Tables de M. Glasenapp. Dans la première colonne (Table IV) se trouve l'argument S ; dans les autres colonnes, les valeurs correspondantes de Δ.

A la fin de ce Chapitre l'auteur fait remarquer que les valeurs des intégrales (14) et (19) ne correspondent pas toujours aux vraies valeurs de Δ, car elles ne sont

exactes que dans le cas où le disque entier du satellite est éclairé : circonstance qui n'a pas toujours lieu. En effet, la phase du satellite faisant varier la grandeur du segment éclairé, elle peut faire changer la position de Δ sur le satellite et la valeur correspondante de S. Mais il prouve que les variations de Δ dues à la phase sont insignifiantes et que, par suite, on peut les négliger. Il remarque encore que la phase du satellite ne change presque pas la valeur de Δ, mais elle déplace Δ sur le disque d'une distance α, de sorte que le point extrême du segment invisible se déplace vers le centre apparent du disque du satellite.

En admettant que le déplacement de Δ s'effectue de la périphérie du disque vers le centre en suivant le rayon du disque, pour avoir la valeur de Δ, qui est nécessaire pour trouver le moment de l'éclipse du centre du satellite (le moment de *l'éclipse centrale*), il faut ajouter la valeur α à la valeur de Δ, calculée au moyen de la Table II.

L'auteur donne à la fin de son Livre la valeur de α pour les différentes phases des satellites.

Cette Table (II), annexée à la fin de notre travail, a pour argument la différence entre les longitudes héliocentriques et géocentriques de Jupiter.

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DE LA CORRECTION DE L'ÉCLIPSE OBSERVÉE, DÉPENDANT DE LA POSITION DU NŒUD DE L'ORBITE DU SATELLITE PAR RAPPORT A L'AXE DU CONE D'OMBRE DE JUPITER.

Pour faire mieux ressortir les deux méthodes que l'auteur emploie, pour résoudre le problème ci-dessus, nous traduisons textuellement ce Chapitre, en ne faisant seulement que de très légères omissions. Ces deux méthodes diffèrent l'une de l'autre : la première est directe, et la seconde indirecte et plus appropriée au calcul numérique.

« Si le satellite en entrant dans le cône d'ombre de Jupiter suivait une direction normale à la projection de l'ombre, il suffirait, pour trouver la correction que l'on doit ajouter au moment observé pour obtenir le moment de l'éclipse centrale du satellite, d'employer la Table IV. Mais comme le plan de l'orbite du satellite ne coïncide pas avec le plan de l'orbite de Jupiter (nous parlons de ce qui se passe dans la projection) le satellite ne peut entrer normalement dans le cône d'ombre que dans des cas exceptionnels où la longitude jovicentrique du nœud ascendant ou du nœud descendant de l'orbite de Jupiter est à peu près

égale à la longitude héliocentrique de Jupiter. Dans tous les autres cas on doit ajouter à la correction, tirée de la Table IV, une autre correction dépendant de l'inclinaison et des positions des nœuds de l'orbite du satellite par rapport à l'orbite de Jupiter.

» Ainsi il nous faudra résoudre le problème suivant :

» *Étant donnée la grandeur du segment invisible, trouver la correction, exprimée en temps, que l'on doit ajouter au moment observé de l'éclipse du satellite de Jupiter, pour avoir le moment de l'éclipse du centre du satellite* (*moment de l'éclipse centrale*).

» Menons un plan normal à l'axe du cône d'ombre à une distance du centre de Jupiter égale à la moyenne distance du satellite au centre de la planète, on aura comme section l'ellipse ABCD (*fig.* 5) de demi-axes : $OA = a$, $OD = b$ [1].

Fig. 5.

L'équation de cette ellipse rapportée aux axes OX, OY, coïncidant avec les axes de l'ellipse, sera

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

» Soit EH la trajectoire supposée rectiligne du centre du satellite dans le cône d'ombre ; elle aura pour équation

$$(2) \qquad Y = pX + q.$$

» Le cercle MNL représente le satellite au moment de l'éclipse observée, son

(1) Laplace, *Traité de Mécanique céleste*, p. 114.

centre est en S. La droite SK est normale à l'ellipse, et l'on détermine sa longueur d'après ce qui a été dit dans le Chapitre précédent.

» On peut maintenant énoncer le problème posé ci-dessus sous la forme suivante :

» *Étant données la longueur de la droite* SK, *normale à l'ellipse et l'équation de la trajectoire du centre du satellite et par conséquent les coordonnées du point* G(α, β), *déterminer la grandeur de la droite* SG *et l'exprimer en unités de temps.*

» Soient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1)'$$

$$Y = pX + q, \tag{2)'$$

les équations de l'ellipse d'ombre et de la droite EH.

» Posons

$$SK = k, \qquad SG = u;$$

supposons ensuite que

x et y soient les coordonnées du point K,
X et Y » » S;

on aura

$$SK^2 = k^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + \ldots, \tag{3}$$

$$SG^2 = u^2 = (X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + \ldots. \tag{4}$$

» L'équation de la normale au point K(x, y) de l'ellipse passant par le point S (X, Y) sera

$$Y - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(X - x). \tag{5}$$

» Au moyen des quatre équations (1)', (2)', (3), (5) on peut déterminer les quatre coordonnées x, y, X, Y, et cela fait, en se servant de l'équation (4), trouver u.

» Cette solution directe offre beaucoup de difficultés pour le calcul numérique et la construction des Tables.

» Voilà pourquoi, pour construire les Tables V et VI, j'ai fait usage d'une autre méthode que je vais exposer ici.

» Des équations données

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$Y = p X + q,$$

j'ai tiré les coordonnées α et β du point G; puis, les coordonnées x et y du point k étant données, j'ai calculé les différences $X - x$ et $Y - y$ par les formules

$$(6) \qquad X - \alpha = \frac{px + q - y}{\frac{a^2 y}{b^2 x} - p},$$

$$(7) \qquad Y - y = \frac{px + q - y}{\frac{a^2 y}{b^2 x} - p} \frac{a^2 y}{b^2 x},$$

d'où l'on tire

$$(8) \qquad k = \pm\sqrt{(X - x)^2 - (Y - y)^2}.$$

» Ensuite j'ai déterminé les coordonnées X et Y par les équations (6) et (7), et j'ai fait les différences :

$$(9) \qquad X - \alpha = x - \alpha + \frac{px + q - y}{\frac{a^2 y}{b^2 x} - p},$$

$$(10) \qquad Y - \beta = y - \beta + \frac{px + q - y}{\frac{a^2 y}{b^2 x} - p} \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

» Enfin, j'ai calculé la valeur de u par la formule

$$(11) \qquad u = \pm\sqrt{(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2}.$$

» Pour l'immersion, k et u sont positifs sitôt que le centre du satellite est en dehors du cône d'ombre; ils deviennent négatifs, au contraire, dès que le centre du satellite se trouve dans le cône d'ombre. Dans le premier cas, on doit ajouter la valeur de u au moment observé; dans le second cas, l'en retrancher. Pour l'émersion, c'est le contraire.

» En suivant cette méthode, j'ai calculé les valeurs de k et de u pour les positions des nœuds ascendants des satellites, situés à 0°, 10°, . . . , 90° de l'axe du cône d'ombre de Jupiter et j'ai construit la Table qui a pour arguments C et k; où C est la différence entre les longitudes jovicentriques du Soleil et des nœuds ascendants des orbites des satellites, comptée sur l'orbite de Jupiter. Les Tables IV nous donnent la valeur de k.

» Prenons quelques exemples pour expliquer l'application des Tables aux réductions des immersions et des émersions observées du premier satellite au moment de l'éclipse centrale du satellite.

Exemple I.

Le 21 novembre 1871, on a observé à Poulkovo l'immersion du premier satellite. Chaque observateur se servait d'un instrument différent :

Observateurs.	Instruments.	Diamètre de l'objectif.		
1. Block......	Bader.	106^{mm}	14^h.25^m.55^s,1	t. m. de Poulkovo
2. Glasenapp..	Merz I.	97	14.25.53,6	»
3. Bonnsdorf..	Merz III.	97	14.25.51,9	»
4. Kuhlberg...	Salleron.	85	14.25.44,0	»
5. Schwartz...	Plössl.	56	14.25.34,7	»

Calculons d'abord, au moyen du *Berliner Jahrbuch,* la distance du satellite au centre de Jupiter; pour cette éclipse, elle est égale à 1,867 en parties du diamètre équatorial de Jupiter. La Table I nous donne le logarithme du segment correspondant $\bar{2},7468$. Cela fait, on doit :

1° Réduire ce segment à la distance moyenne de Jupiter au Soleil et à la Terre : le calcul donne :

$$\log \frac{r^2 \Delta^2}{a^2 (a-1)^2} = 0{,}0934\,;$$

2° Trouver la correction due à la phase; l'angle χ, la différence des longitudes héliocentrique et géocentrique de Jupiter sera, dans le cas actuel, 9°,5; la correction correspondant à cet angle se trouve dans la Table II; elle est égale à

$$\log \frac{1}{1-\frac{1}{2}x} = 0{,}0030\,;$$

3° Réduire le segment au cas où la distance zénithale de Jupiter serait égale à zéro; dans le cas actuel et au moment de l'immersion, Jupiter avait une distance zénithale de 43°,1; à cet angle correspond

$$\log \varphi(z) = 0{,}0233.$$

En multipliant le segment $\bar{2},7468$, trouvé plus haut, par les nombres trouvés aux n°s 1°, 2°, 3°, on aura la grandeur S_0 du segment invisible, correspondant aux circonstances de l'immersion observée :

Logarithme du segment normal.

Pour la lunette de Bailly	$\bar{2}$,7468
$\log \frac{r^2\Delta^2}{a^2(a-1)^2}$	0,0934
$\log \frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha}$	0,0030
$\log \varphi(z)$	0,0233
$\log S_0$	$\bar{2}$,8665

Le segment ainsi réduit varie pour chaque lunette dans le rapport $\frac{m^2}{n^2}$, où m désigne l'ouverture de la lunette de Bailly, à laquelle correspond le segment trouvé S_0, et n l'ouverture de la lunette, au moyen de laquelle on a fait l'observation. Pour les lunettes en question, $\log \frac{m^2}{n^2}$ a les valeurs correspondantes que voici :

1. Bader.	2. Merz I.	3. Merz III.	4. Sallcron.	5. Plössl.
$\bar{1}$,4166	$\bar{1}$,4970	$\bar{1}$,4970	$\bar{1}$,6065	$\bar{1}$,9717

En ajoutant ces logarithmes à la valeur de $S_0 = [\bar{2},8665]$, nous aurons les valeurs des segments, correspondant à chaque lunette au moment de l'éclipse :

logS	$\bar{2}$,2831	$\bar{2}$,3635	$\bar{2}$,3635	$\bar{2}$,4730	$\bar{2}$,8382
S	0,0192	0,0231	0,0231	0,0297	0,0689

La Table IV donne ensuite les valeurs suivantes de k_0 :

$-73^s,7 \qquad -71^s,8 \qquad -71^s,8 \qquad -68^s,7 \qquad -56^s,2$

qui doivent être corrigées de l'influence de la phase du satellite. La correction que l'on doit y apporter se trouve dans la deuxième colonne de la Table II, ayant pour argument l'angle χ. Cette correction est $\alpha = 1^s,6$ et, par conséquent, les k_0 corrigés ou les k prendront les valeurs suivantes :

$-72^s,1 \qquad -70^s,2 \qquad -70^s,2 \qquad -67^s,1 \qquad -54^s,6$

Pour trouver les valeurs définitives des u, il faut connaître la position du nœud par rapport à l'axe du cône d'ombre de Jupiter au moment de l'immersion.

La Table V, qui a pour arguments l'angle C et k, nous donne les valeurs des u. Dans le cas actuel, $C = 155^\circ$, et les u cherchés seront

$-74^s,8 \qquad -72^s,9 \qquad -72^s,9 \qquad -69^s,6 \qquad -56^s,7$

En ajoutant ces valeurs aux moments observés, nous aurons les résultats suivants pour l'époque de l'éclipse centrale du premier satellite, observée en 1871, le 21 novembre, à Poulkovo :

Observateurs.	Instruments.	Diamètre de l'objectif.	Moment observé.	Éclipse centrale.	
		mm	h m s	h m s	
1. Block	Bader.	106	14.25.55,1	14.24.40,3	t. m. de Poulkovo
2. Glasenapp .	Merz I.	97	14.25.53,6	14.24.40,7	»
3. Bonnsdorff.	Merz III.	97	14.25.51,9	14.24.39,0	»
4. Kuhlberg..	Salleron.	85	14.25.49,0	14.24.34,4	»
5. Schwarz...	Plössl.	56	14.25.34,7	14.24.38,0	»

Exemple II.

En 1873, le 14 avril, fut observé à Poulkovo l'émersion du satellite de Jupiter, au moyen des instruments suivants, par les observateurs suivants :

Observateurs.	Instruments.	Diamètre de l'objectif.		
		mm	h m s	
1. Wagner....	Le grand refr.	379	9.43. 9,8	t. m. de Poulkovo
2. Tatchaloff..	Héliomètre.	188	9.43.35,5	»
3. Lindemann.	Steinheil.	126	9.43.30,9	»
4. Glasenapp..	Merz I.	97	9.43.35,2	»
5. Bruns......	Merz III.	94	9.43.34,3	»

En procédant de la même façon que dans le premier exemple, nous obtiendrons les éléments suivants pour la réduction des moments observés aux moments de l'émersion du centre du satellite :

$\log \frac{r^2\Delta^2}{a^2(a-1)^2}$	0,1558
$\log \frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha}$	0,0032
$\varphi(z)\log$	0,0376
$\log \frac{r^2\Delta^2}{a^2(a-1)^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha}\,\varphi(z)$	0,1966
z	47°,9
χ	9°,6
C	16°,0
ρ	1,873

La distance ρ du satellite au centre de Jupiter étant connue, la Table I nous donne : le logarithme du segment normal est égal à $\bar{2},7449$, il faut lui ajouter

$\log \frac{r^2 \Delta^2}{a^2(a-1)^2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha} \varphi(z) = 0,1966$; ainsi la valeur du segment S_0 sera égale à $[\bar{2},9415]$, qui correspond à la lunette de Bailly et aux circonstances particulières au moment de l'émersion du satellite.

Ensuite, comme dans l'exemple précédent, on doit multiplier S_0 par $\frac{m^2}{n^2}$. Les logarithmes de $\frac{m^2}{n^2}$, pour les instruments dont on a fait usage sont les suivants :

1. Grand refr.	2. Héliomètre.	3. Steinheil.	4. Merz I.	5. Merz III.
$\bar{2},3084$	$\bar{1},2200$	$\bar{1},2264$	$\bar{1},4970$	$\bar{1},7288$

en les multipliant par $S_0 = [8,9415]$, nous aurons

$[\bar{3},2499]$	$[\bar{2},1615]$	$[\bar{2},0279]$	$[\bar{2},4385]$	$[\bar{2},6703]$

c'est-à-dire

0,00178	0,0145	0,0161	0,0274	0,0468

Ces derniers nombres représentent les segments correspondant aux différentes lunettes, dans les circonstances des observations.

Ayant les segments, nous trouverons, à l'aide de la Table IV, les valeurs suivantes pour k_0 :

$-100^s,6$	$-76^s,2$	$-75^s,2$	$-69^s,7$	$-62^s,3$

Ensuite nous trouverons la correction α à l'aide de l'argument χ; la valeur de cette correction est $1^s,6$. En appliquant cette correction on obtient pour k les valeurs suivantes :

$-99^s,0$	$-74^s,6$	$-73^s,6$	$-68^s,1$	$-60^s,7$

D'après ces données et l'angle $C = 16^\circ$, qui détermine la position du nœud de l'orbite du premier satellite par rapport au cône d'ombre de Jupiter, nous obtiendrons, en faisant usage de la Table V, les valeurs suivantes de u :

$-100^s,9$	$-76^s,1$	$-75^s,1$	$-69^s,4$	$-61^s,8$

que l'on doit retrancher des moments observés, pour avoir les moments de l'émersion du centre du premier satellite de Jupiter, on aura donc :

Observateurs.	Instruments.	Diamètre de l'objectif.	Moment observé.	Moment de l'émersion du centre du satellite.	
		mm	h m s	h m s	
1. Wagner...	Le grand refr.	379	9.43. 9,8	9.44.50,7	t. m. de Poulkovo
2. Tatchaloff.	Héliomètre.	188	9.43.35,5	9.44.51,6	»
3. Lindemann.	Steinheil.	126	9.43.30,9	9.44.46,0	»
4. Glasenapp.	Merz I.	97	9.43.35,2	9.44.44,6	»
5. Bruns.....	Merz VIII.	74	9.43.34,3	9.44.36,1	»

CHAPITRE IV.

Les trois premiers Chapitres de l'Ouvrage de M. Glasenapp sont consacrés à l'étude des méthodes de réduction des observations des éclipses des satellites de Jupiter au moment de l'éclipse centrale.

Le quatrième Chapitre, qui renferme à lui seul 102 pages, est consacré à l'application des résultats, obtenus dans les trois premiers Chapitres, à la résolution des problèmes, dont nous avons déjà fait mention au début. Nous nous bornerons à donner ici un court résumé de la solution de ces questions; renvoyant, pour plus de détails, le lecteur au Mémoire même de M. Glasenapp.

1° *Mesure de la vitesse de la lumière.*

Pour déterminer l'équation de la lumière, l'auteur fait usage de toutes les éclipses du premier satellite de Jupiter (immersions et émersions), observées depuis l'année 1848 jusqu'à l'année 1873, dans les observatoires de Greenwich, d'Altona, de Leipzig, de Marburg, de Leyde, d'Oxford, de Windsor, des Galles du Sud, de Poulkovo, de Kieff et de Nicolaeff. Tout d'abord il réduit toutes ces observations au nombre de 387 à l'instant de l'éclipse centrale et aux circonstances normales. Puis il compare les moments des observations réduites avec les moments des éclipses correspondantes du premier satellite de Jupiter donnés par les Tables d'éclipses de Damoiseau.

Voici le procédé employé pour la formation des équations de condition :

« Désignons par x_0 la correction des Tables des éclipses du premier satellite de Jupiter du baron de Damoiseau, par y la correction de l'équation de la lumière, d'après Delambre; c'est-à-dire prenons pour la vraie valeur de l'équation de la lumière $493^s,2 + y_1$, désignons par Δ la distance de Jupiter au centre de la Terre au moment de l'éclipse du satellite, par T_0 le moment réduit de l'observation,

par T_c le moment calculé de l'éclipse (tiré du *Naut. Alm.*). Pour déterminer y_1, on aura les équations de condition suivantes :

$$(1) \qquad \begin{cases} T_c + x_0 + \Delta y_1 = T_0, \\ T'_c + x_0 + \Delta' y_1 = T'_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

» Pour n'avoir à faire qu'à de petits nombres posons $y_1 = 5^s + y$; les équations (1) prendront la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} \tau + x_0 + \Delta y = T_0, \\ \tau' + x_0 + \Delta' y = T'_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

où $\tau = T_c + S\Delta$, $\tau' = T'_c + S\Delta'$, ...

» En comparant τ, τ', ... avec T_0, T'_0, ..., on voit de suite que x_0 est à peu près égal à $\pm 65^s$ en temps moyen, où le signe inférieur correspond à l'immersion, le signe supérieur à l'émersion; en vertu de quoi on peut poser $x_0 = \pm 65^s + x$. La correction et son signe montrent que l'ellipse des Tables se trouve dans l'intérieur de l'ellipse réelle, ou, autrement dit, que la surface d'ombre donnée par les Tables se trouve dans l'intérieur de la surface réelle.

» Ici, nous devons faire une supposition relativement à la courbe adoptée par De Damoiseau comme intersection de la surface d'ombre avec un plan normal à l'axe de cette surface. »

M. Glasenapp, après avoir montré qu'on peut faire à ce sujet deux hypothèses, admet qu'en construisant ses Tables d'éclipses des satellites, Damoiseau avait supposé que la courbe d'intersection de la surface d'ombre avec un plan normal à l'axe de cette surface était une ellipse; il suppose, en outre, que l'ellipse donnée par les Tables et l'ellipse effective sont semblables, et que la différence entre leurs demi-grands axes est égale à $\pm 65^s$ en temps moyen. A l'aide de ces hypothèses, il a construit la Table VII annexée à la fin de ce Mémoire. Elle servira à corriger les instants calculés τ, τ', ... de $\pm 65^s$, en tenant compte de la position des nœuds de l'orbite du satellite par rapport à l'axe de la surface d'ombre de Jupiter. L'argument C de cette Table est le même que celui des Tables V et VI.

« Ainsi, après avoir corrigé les quantités τ, τ', ..., nous obtiendrons les équations (2) sous la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} t + x + \Delta y = T_0, \\ t' + x + \Delta' y = T'_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

dans lesquelles $t = \tau \mp (65^s)$, $t' = \tau' \mp (65^s)$, ..., où (65^s) signifie la correction

des moments calculés $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, ... de 65^s, corrigée de la position du nœud de l'orbite du satellite.

» Les équations (3) peuvent ne pas être tout à fait exactes, parce que les réductions u du moment observé ne sont pas tout à fait complètes, c'est-à-dire que tous les T_0 ne sont pas réduits à être homogènes. En réalité les réductions de nos observations impliquent la fonction S, dont les coefficients ont été donnés par Bailly. Donc, les erreurs des coefficients de cette fonction ne permettent pas d'éliminer tout à fait l'influence des lunettes et d'autres causes, dépendant de l'éclat du satellite pendant l'éclipse. Supposons que nous ne connaissions pas exactement la loi de la variation de l'éclat du satellite, due à la variation de la distance apparente du satellite au centre de Jupiter, introduisons dans les équations (3) un terme de la forme ρz dépendant du coefficient indéterminé z et de la distance apparente ρ du satellite au centre de Jupiter [1]. Dans ce cas, les équations (3) deviendront :

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} x + \Delta y + \rho z + t - T_0 = 0, \\ x + \Delta' y + \rho' z + t' - T'_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

L'auteur prend comme forme définitive d'équations de condition la forme (4). Il forme ces équations pour toutes les observations, leur applique la méthode des moindres carrés et obtient deux systèmes d'équations normales, un pour les immersions et un autre pour les émersions. Leur résolution lui donne les valeurs suivantes de x, y, z :

(5)

a. *Pour l'immersion du premier satellite.*

$$x_0 = -60^s,6 \pm 8^s,0,$$
$$y_0 = +10,52 \pm 1,74,$$
$$z_0 = -1,97 \pm 3,54.$$

L'erreur probable d'une observation de poids *un* $= \pm 9^s,89$.

b. *Pour l'émersion du premier satellite.*

$$x_1 = -9^s,0 \pm 6^s,0,$$
$$y_1 = -1,47 \pm 1,26,$$
$$z_1 = +1,60 \pm 2,56.$$

L'erreur probable d'une observation de poids *un* $= \pm 9^s,09$.

---

[1] z est la correction correspondant à la variation supposée d'éclat.

Les valeurs de y trouvées des observations de l'immersion et de l'émersion du premier satellite diffèrent l'une de l'autre d'un nombre très considérable, de $11^s,99$, qui dépasse beaucoup trop la valeur de l'erreur probable d'une détermination isolée. L'auteur ne donne pas d'explication définitive de cette différence, mais il fait des hypothèses intéressantes pour l'expliquer.

Il remarque que cette discordance peut avoir trois origines :

1° Inexactitudes dans les Tables de Damoiseau.

2° Erreurs dans l'évaluation du segment invisible que les valeurs trop grossières de z ne peuvent éliminer.

3° Du fait que les immersions et les émersions ne sont pas observées de la même manière.

Sans données pour se déterminer sur ces points, M. Glasenapp prend la moyenne pondérée des valeurs de y et trouve

$$y = +2^s,64 \pm 1^s,02.$$

ce qui donne pour l'équation de la lumière :

$$500^s,84 \pm 1^s,02.$$

et, en traitant les valeurs de x d'une manière analogue, il en tire la correction moyenne des Tables

$$-27^s,7 \pm 4^s,8.$$

Pour voir si ces corrections améliorent la valeur de l'erreur probable, il résout à nouveau les équations de condition en gardant les moments des éclipses sans y apporter de corrections. Il trouve

(6)

a. *Pour l'immersion du premier satellite.*

$$x_0 = -\ 8^s,8 \pm 9^s,0,$$
$$y_0 = +\ 1,47 \pm 1,96,$$
$$z_0 = +10,9 \pm 4,0.$$

L'erreur probable d'une observation de poids *un* $= \pm 11^s,12$.

b. *Pour l'émersion du premier satellite.*

$$x_1 = -19^s,3 \pm 7^s,3,$$
$$y_1 = +\ 5,43 \pm 1,51,$$
$$z_1 = -\ 4,1 \pm 3,1.$$

L'erreur probable d'une observation de poids *un* $= \pm 10,95$.

Combinant comme plus haut les valeurs de y, on trouve la valeur suivante de l'équation de la lumière :

$$497^s,15 \pm 1^s,20.$$

On en conclut donc que la méthode de M. Glassenapp n'abaisse pas d'une manière notable l'erreur probable d'une observation, déduite de la comparaison aux Tables de Damoiseau.

On obtient un meilleur résultat, dit M. Glassenapp, en traitant à part les observations faites le même jour de manière à éliminer les erreurs périodiques des Tables. Voici les résultats obtenus ainsi :

a. *Immersions.*

Erreur probable d'une observation réduite...........	$\pm\ 5^s,5$
Erreur probable d'une observation non réduite	$\pm 10^s,0$

b. *Émersions.*

Erreur probable d'une observation réduite............	$\pm 6^s,6$
Erreur probable d'une observation non réduite.......	$\pm 8^s,5$

Nous ne devons pas oublier de mentionner la remarque faite par l'auteur, que les corrections obtenues pour les Tables et pour l'équation de la lumière ne peuvent être admises comme définitives. « Ce n'est qu'un essai, dit-il, de comparaison des observations avec les Tables; on ne pourra obtenir un résultat définitif qu'après avoir vérifié la théorie des satellites de Jupiter, calculé à nouveau leurs perturbations et construit de nouvelles Tables. »

En suivant un procédé semblable, l'auteur fait une discussion très intéressante sur l'écart qui existe entre les deux valeurs de l'équation de la lumière, trouvées par Delambre et W. Struve par deux méthodes différentes. Il détermine l'équation de la lumière d'après toutes les observations dont il a fait usage plus haut, après avoir calculé les différences calcul — observation, et sans avoir réduit les moments des observations aux moments des éclipses centrales, en mettant les équations de condition sous la forme suivante :

$$(7)\qquad \begin{cases} x + \Delta y + \mathrm{D}(\mathrm{C}-\mathrm{O}) = 0, \\ x + \Delta_1 y + \mathrm{D}(\mathrm{C}-\mathrm{O})_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où x signifie la correction des Tables, y la correction de la vitesse de la lumière, d'après Delambre, Δ la distance de Jupiter à la Terre, D(C — O) la différence calcul — observation.

Appliquant la méthode des moindres carrés, il arrive à deux systèmes d'équations normales, l'une pour les immersions et l'autre pour les émersions, dont la résolution lui donne pour la valeur de l'équation de la lumière le mombre

$$497^s,46 \pm 1^s,08.$$

Ce résultat, identique à celui de Struve, lui montre que l'hypothèse du professeur Hoek (¹) sur cette question n'est pas exacte, et que toutes les variations possibles dans l'intensité du premier satellite s'annulent mutuellement et qu'elles n'ont pas d'influence sur le résultat final de la détermination de l'équation de la lumière.

2° *Détermination de la longitude de Leyde au moyen de la comparaison des observations des éclipses du premier satellite de Jupiter avec les Tables de De Damoiseau.*

Nous serons très brefs sur ce point. L'auteur trouve que la différence de longitude entre Leyde et Greenwich, déduite des observations des éclipses des satellites de Jupiter faites simultanément en ces deux stations, ne concorde pas avec la différence adoptée,

$$0^h\,17^m\,56^s,2\ \mathrm{E},$$

pour la longitude de l'observatoire de Leyde.

Les observations simultanées, réduites d'après la méthode de M. Glassenapp, donnent en effet

$$0^h\,18^m\,5^s,4.$$

Les mêmes observations non réduites donnent

$$0^h\,18^m\,3^s,6.$$

Ces divergences nous montrent simplement que le mode d'observation des éclipses des satellites de Jupiter ne satisfait pas aux exigences de l'Astronomie moderne. Peut-être le mode d'observation photométrique proposé par Cornu ou celui suivi depuis plusieurs années par M. Pickering à Harvard College donnent-ils de meilleurs résultats?

3° *Constance de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.*

Ce problème me paraissant très intéressant au point de vue théorique, je ter-

(¹) *Astr. Nachr.*, B. LXX, p. 193.

mine le présent exposé en donnant une traduction des pages de la dissertation de M. Glassenapp qui se rapportent à cette question :

« Le professeur S. Newcomb a publié dans la revue américaine *The American Journal of Sciences and Arts,* conducted by Prof. B.-Silliman and James-D. Dana, vol. L, 1870, p. 183, un article intitulé : *Considerations on the apparent inegalities of long period in the mean motion of the Moon,* dans lequel il se propose d'expliquer les inégalités à longues périodes remarquées dans le moyen mouvement de la Lune, en comparant toutes les observations de la Lune, faites à Greenwich et à Washington depuis 1850 jusqu'à 1869, aux Tables de Hansen, en admettant des variations de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.

» Admettant la possibilité d'une pareille variation, il a déterminé les écarts du midi moyen correspondant au cas de la non uniformité de rotation, par rapport au midi moyen correspondant à la rotation uniforme.

» Voici ces écarts, qui m'ont été communiqués dans une lettre du 24 octobre 1873 :

Époque.	Correction du midi.
1830,5	0^s
1835,5	0
1840,5	+ 1
1845,5	+ 1
1850,5	+ 2
1855,5	— 5
1860,5	+10
1862,5	+11
1864,5	+10
1866,5	+ 6
1868,5	+ 2
1870,5	0
1872,5	— 2

» Ce sont les corrections qu'on doit ajouter au jour moyen, correspondant à la rotation uniforme, pour avoir le jour effectif. En même temps, ce sont les corrections que l'on doit ajouter au moment observé pour avoir le temps moyen en supposant que la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe soit constante.

» L'hypothèse de Newcomb relativement à la variation périodique de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe sera certaine et authentique lorsque sa raison d'être sera prouvée d'une autre manière et par d'autres observations. Les observations des éclipses des satellites de Jupiter peuvent fournir une démonstration de cette hypothèse, démonstration tout à fait indépendante de celle de Newcomb.

» En construisant ses Tables d'éclipses du premier satellite de Jupiter, Damoiseau a admis que la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe était constante; de sorte que si l'on détermine les corrections des Tables d'éclipses du premier satellite de Jupiter pour différentes époques et si l'on trouve des variations périodiques, de telles variations prouvent ou : 1° l'inexactitude des Tables de Damoiseau; ou 2° que le mouvement de rotation de la Terre autour de son axe n'est pas uniforme. Mais en admettant que les Tables soient exactes, c'est-à-dire qu'en calculant les perturbations des satellites : 1° on n'a négligé aucune des inégalités périodiques importantes; 2° que les coefficients de toutes les inégalités diffèrent des coefficients vrais de nombres entièrement négligeables; et 3° que dans la construction des Tables on n'a fait aucune erreur périodique importante, nous sommes conduits à admettre la seconde hypothèse, à savoir : que la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe varie périodiquement.

» Pour examiner cette question nous avons pris toutes les observations des éclipses du premier satellite de Jupiter, dont nous avons fait usage dans la détermination de l'équation de la lumière. Nous avons ajouté aux moments observés les corrections du midi moyen, trouvées par Newcomb, ensuite nous avons procédé comme nous l'avions fait pour les observations sans corrections.

» Voici les résultats obtenus :

a. *Immersions du premier satellite.*	b. *Émersions du premier satellite.*
$x_0 = -42^s,3 \pm 7^s,9$	$x_1 = -8^s,7 \pm 6^s,0$
$y_0 = +6,83 \pm 1,72$	$y_1 = -1,12 \pm 1,24$
$z_0 = -0,64 \pm 3,50$	$z_1 = +1,82 \pm 2,52$
$r_0 = \pm 9,77$	$r'_0 = \pm 8,97$

» En comparant les erreurs probables ainsi trouvées : $\pm 9,77$ et $\pm 8,97$, d'une observation de poids égal à *un*, avec celles trouvées lors de la détermination de l'équation de la lumière, c'est-à-dire avec $\pm 9^s,82$ et $\pm 9^s,09$, on voit que l'application de la correction de Newcomb aux moments observés des éclipses améliore la concordance entre les observations et les Tables d'éclipses du premier satellite de Jupiter.

» Cette amélioration dans les deux cas, des immersions du premier satellite et des émersions, peut ne pas être considérée comme accidentelle, mais être attribuée à la vraisemblance de la correction de Newcomb, et par conséquent à celle de son hypothèse relativement à la variation périodique de la vitesse du mouvement de rotation de la Terre autour de son axe.

» Pour déterminer les valeurs des corrections du jour moyen à des époques

différentes au moyen des observations des éclipses du premier satellite, c'est-à-dire faire ce qu'a fait Newcomb, en comparant les observations de la Lune avec les Tables, j'ai procédé comme il suit : j'ai corrigé les moments des éclipses du premier satellite, donnés par les Tables, des valeurs de x, y, z trouvées précédemment, et après avoir comparé de nouveau toutes les observations avec les valeurs tabulaires corrigées, j'ai trouvé les valeurs suivantes pour C — O (calcul — observation) pour les diverses époques :

a. *Pour les immersions.*

Époque.	C — O.	Poids.
1848,86	+ 6,9	4,7
1849,22	+ 6,7	3,4
1850,00	+22,7	2,4
1851,10	+ 9,2	5,3
1852,70	+22,2	1,6
1855,50	+33,2	2,0
1856,58	+20,9	4,7
1857,72	+16,3	22,7
1858,82	+11,5	7,7
1859,90	+22,9	2,0
1861,22	+14,5	3,3
1862,17	+29,0	2,9
1863,15	+22,0	3,5
1864,28	+ 4,7	7,5
1866,45	+22,6	1,8
1867,63	−33,9	2,6
1868,65	+33,8	2,0
1869,76	−15,2	12,5
1870,84	+ 8,4	6,3
1871,90	− 2,6	9,6
1872,50	+ 5,3	8,2
1873,25	−15,0	10,2

b. *Pour les émersions.*

Époque.	C — O.	Poids.
1848,24	−16,7	7,7
1849,27	− 4,5	8,5
1850,32	−15,4	7,6
1853,50	−30,7	1,9
1855,70	−17,2	2,7
1856,97	−11,5	3,6
1858,10	−12,2	4,5
1859,15	− 5,9	9,7
1860,21	− 6,3	8,1
1861,30	+ 4,4	0,9
1862,32	−12,7	4,4
1863,37	−28,3	3,6
1864,60	−11,5	1,6
1865,70	−27,8	0,7
1866,72	−18,8	3,3
1867,82	−16,9	4,9
1868,83	−16,5	6,7
1869,45	−23,3	2,0
1870,05	−24,2	1,8
1871,14	−20,6	8,0
1872,21	−17,4	21,9
1873,24	−16,5	26,4

qui m'ont servi à former des équations de condition de la forme

$$x + k(t - t_0) + m(t - t_0)^2 + (\mathrm{C} - \mathrm{O}) = 0, \tag{1}$$

où pour t_0 nous avons pris l'année 1861,00 et où x, k, m doivent être déterminés d'après les valeurs de (C — O).

» Les équations de condition nous ont donné des équations normales que voici :

a. *Pour les immersions du premier satellite.*

$$+\ 126.9x + 259.3k + 8227m + 1718.1 = 0,$$
$$+\ 259.3x + 8227\ k - 35467m - 1706 = 0,$$
$$+\ 8227\ x + 35467\ k + 923395m + 85480 = 0.$$

b. *Pour les émersions du premier satellite.*

$$+\ 140.5x + 455.6k + 12239m - 2111.8 = 0,$$
$$+\ 455.6x + 12239\ k + 55150m - 9823 = 0,$$
$$+\ 12239\ x + 55150\ k - 1558741m - 196478 = 0.$$

» La solution de ces équations normales nous a fourni les valeurs suivantes de x, k et m pour :

a. *Immersions.*	b. *Émersions.*
$x_0 = -17^s.76 \pm 1^s.25,$	$x_1 = +12^s.69 \pm 0^s.86.$
$k_0 = +\ 0.0832 \pm 0.1553,$	$k_1 = -\ 0.2512 \pm 0.09172,$
$m_0 = +\ 0.06245 \pm 0.02178,$	$m_1 = -\ 0.01753 \pm 0.01356,$

d'où l'on tire

$$x = -3^s.52 \pm 0^s.71,$$
$$k = -0.2076 \pm 0.0783,$$
$$m = -0.03006 \pm 0.01151.$$

» Au moyen de x, k et m j'ai trouvé les corrections du midi moyen, pour les époques considérées par Newcomb. La Table suivante contient à la fois les corrections de Newcomb et les miennes [1].

---

[1] Les nombres dans la troisième colonne (2) ont été déterminés par la formule (1), de façon que la correction du midi pour 1870.5 soit égale à celle de Newcomb pour la même date.

(2)

Époque.	Correction de Newcomb.	Correction d'après le I ☾ ♃.
1850,5	-2^s	$+3^s$
1855,5	+5	+4
1860,5	+10	+5
1862,5	+11	+4
1864,5	+10	+3
1866,5	+6	+2
1868,5	+2	+1
1870,5	0	0
1872,5	−2	−2

» Les nombres de cette Table montrent :

» 1° Que les signes des corrections du midi moyen, déterminé au moyen des observations des éclipses du premier satellite de Jupiter, ne diffèrent pas de ceux des corrections de Newcomb;

» 2° Que les périodes de la variation des corrections coïncident dans les deux cas.

» Malgré que mes corrections et celles de Newcomb diffèrent beaucoup les unes des autres, ce qui fait que nous ne pouvons tirer aucune conclusion définitive sur la vraisemblance de l'hypothèse de Newcomb, néanmoins le fait que mes corrections ont le même signe et la même période que celles de Newcomb trouvées au moyen des observations de la Lune, nous donne le droit d'affirmer la grande probabilité de l'hypothèse de Newcomb sur la non-uniformité du mouvement de rotation de la Terre. »

APPENDICE.

TABLE I (¹).

p.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1,00	9,1856	9,1848	9,1840	9,1832	9,1824	9,1816	9,1808	9,1801	9,1794	9,1786
1,01	9,1778	9,1770	9,1762	9,1754	9,1747	9,1740	9,1733	9,1785	9,1717	9,1709
1,02	9,1701	9,1693	9,1686	9,1679	9,1672	9,1664	9,1656	9,1648	9,1640	9,1632
1,03	9,1625	9,1618	9,1611	9,1603	9,1595	9,1587	9,1579	9,1572	9,1565	9,1558
1,04	9,1551	9,1543	9,1535	9,1527	9,1519	9,1512	9,1505	9,1498	9,1491	9,1483
1,05	9,1475	9,1467	9,1460	9,1453	9,1446	9,1439	9,1432	9,1424	9,1416	9,1409
1,06	9,1402	9,1395	9,1388	9,1381	9,1374	9,1366	9,1358	9,1351	9,1344	9,1337
1,07	9,1330	9,1323	9,1316	9,1308	9,1301	9,1294	9,1287	9,1280	9,1273	9,1266
1,08	9,1259	9,1251	9,1244	9,1237	9,1230	9,1223	9,1216	9,1209	9,1202	9,1195
1,09	9,1188	9,1181	9,1174	9,1167	9,1160	9,1153	9,1146	9,1139	9,1132	9,1125
1,10	9,1118	9,1111	9,1104	9,1097	9,1090	9,1083	9,1076	9,1069	9,1062	9,1055
1,11	9,1048	9,1041	9,1035	9,1028	9,1021	9,1014	9,1007	9,1000	9,0993	9,0987
1,12	9,0981	9,0974	9,0967	9,0960	9,0953	9,0946	9,0939	9,0933	9,0927	8,0920
1,13	9,0913	9,0906	9,0899	9,0892	9,0886	9,0880	9,0874	9,0867	9,0860	9,0853
1,14	9,0846	9,0839	9,0833	9,0827	9,0821	9,0814	9,0807	9,0800	9,0793	9,0786
1,15	9,0780	9,0774	9,0768	9,0761	9,0751	9,0747	9,0740	9,0734	9,0728	9,0722
1,16	9,0716	9,0709	9,0702	9,0695	9,0688	9,0682	9,0676	9,0670	9,0664	9,0657
1.17	9,0650	9,0643	9,0637	9.0631	9,0625	9,0619	9,0613	9,0606	9,0599	9,0592
1,18	9.0586	9,0580	9,0574	9,0568	9,0562	9,0555	9.0548	9,0542	9,0536	9,0530
1,19	9.0524	9,0518	9,0512	9,0505	9,0498	9.0492	9,0486	9,0480	9,0474	9,0468
1,20	9,0462	9,0455	9,0449	9,0443	9,0437	9,0431	9,0425	9,0419	9.0413	9,0406
1,21	9,0400	9,0394	9,0388	9,0382	9,0376	9,0370	9,0364	9,0358	9,0352	9,0346
1,22	9,0339	9,0333	9,0327	9,0321	9,0315	9,0309	9,0303	9,0297	9,0291	9,0285
1,23	9,0279	9,0273	9,0267	9,0261	9,0255	9,0249	9,0243	9,0237	9,0231	9,0225
1,24	9,0219	9,0213	9,0207	9,0201	9,0195	9,0189	9,0183	9,0177	9,0171	9,0165
1,25	9,0159	9,0153	9,0147	9,0141	9,0135	9,0129	9,0124	9,0118	9,0112	9,0106
1.26	9,0100	9,0094	9,0088	9,0082	9,0077	9,0071	9,0065	9,0059	9,0053	9,0047
1,27	9,0041	9,0036	9,0031	9,0025	9,0019	9,0013	9,0007	9,0001	8.9995	8,9990
1,28	8,9985	8,9979	8,9973	8,9967	8,9961	8,9955	8,9950	8,9945	8,9940	8,9934
1,29	8,9928	8,9922	8,9916	8,9910	8,9905	8,9900	8,9895	8,9889	8,9883	8,9877

(¹) La caractéristique de tous les logarithmes donnés dans la Table I, est augmentée de 10.

TABLE I (suite).

ρ.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1,30	8,9871	8,9866	8,9861	8,9856	8,9851	8,9845	8,9839	8,9833	8,9827	8,9822
1,31	8,9817	8,9812	8,9807	8,9801	8,9795	8,9789	8,9783	8,9778	8,9773	8,9768
1,32	8,9763	8,9757	8,9751	8,9745	8,9740	8,9735	8,9730	8,9725	8,9720	8,9714
1,33	8,9708	8,9702	8,9697	8,9692	8,9687	8,9682	8,9677	8,9671	8,9665	8,9659
1,34	8,9654	8,9649	8,9644	8,9639	8,9634	8,9628	8,9622	8,9617	8,9612	8,9607
1,35	8,9602	8,9597	8,9592	8,9586	8,9580	8,9575	8,9570	8,9565	8,9560	8,9555
1,36	8,9550	8,9544	8,9539	8,9534	8,9529	8,9524	8,9519	8,9514	8,9509	8,9503
1,37	8,9498	8,9493	8,9488	8,9483	8,9478	8,9473	8,9468	8,9462	8,9457	8,9452
1,38	8,9447	8,9442	8,9437	8,9432	8,9427	8,9121	8,9416	8,9411	8,9406	8,9401
1,39	8,9396	8,9391	8,9386	8,9381	8,9376	8,9371	8,9366	8,9361	8,9356	8,9351
1,40	8,9346	8,9341	8,9336	8,9331	8,9326	8,9321	8,9316	8,9311	8,9306	8,9301
1,41	8,9296	8,9291	8,9286	8,9281	8,9276	8,9271	8,9267	8,9262	8,6257	8,9252
1,42	8,9247	8,9242	8,9237	8,9232	8,9228	8,9223	8,9218	8,9213	8,9208	8,9203
1,43	8,9198	8,9193	8,9189	8,9184	8,9179	8,9174	8,9169	8,9164	8,9159	8,9154
1,44	8,9150	8,9145	8,9140	8,9135	8,9130	8,9125	8,9120	8,9116	8,9112	8,9107
1,45	8,9102	8,9097	8,9092	8,9087	8,9082	8,9078	8,9074	8,9069	8,9064	8,9059
1,46	8,9054	8,9049	8,9044	8,9040	8,9036	8,9031	8,9026	8,9021	8,9016	8,9012
1,47	8,9008	8,9004	8,8999	8,8994	8,8989	8,8984	8,8679	8,8974	8,8970	8,8966
1,48	8,8962	8,8957	8,8952	8,8947	8,8942	8,8937	8,8933	8,8929	8,8925	8,8920
1,49	8,8915	8,8910	8,8905	8,8901	8,8897	8,8893	8,8889	8,8884	8,8879	8,8874
1,50	8,8869	8,8864	8,8860	8,8856	8,8852	8,8847	8,8842	8,8837	8,8832	8,8828
1,51	8,8824	8,8820	8,8816	8,8811	8,8806	8,8801	8,8796	8,8792	8,8788	8,8784
1,52	8,8780	8,8775	8,8770	8,8765	8,8761	8,8757	8,8753	8,8749	8,8745	8,8740
1,53	8,8735	8,8730	8,8726	8,8722	8,8718	8,8714	8,8710	8,8705	8,8700	8,8695
1,54	8,8691	8,8687	8,8683	8,8679	8,8675	8,8670	8,8665	8,8660	8,8656	8,8652
1,55	8,8648	8,8644	8,8640	8,8635	8,8630	8,8626	8,8622	8,8618	8,8614	8,8610
1,56	8,8606	8,8601	8,8596	8,8592	8,8588	8,8584	8,8580	8,8576	8,8572	8,8567
1,57	8,8563	8,8559	8,8555	8,8551	8,8547	8,8543	8,8539	8,8534	8,8530	8,8526
1,58	8,8522	8,8518	8,8514	8,8510	8,8506	8,8501	8,8497	8,8493	8,8489	8,8485
1,59	8,8481	8,8477	8,8473	8,8468	8,8464	8,8460	8,8456	8,8452	8,8448	8,8444
1,60	8,8440	8,8435	8,8431	8,8427	8,8423	8,8419	8,8415	8,8411	8,8407	8,8402
1,61	8,8398	8,8394	8,8390	8,8386	8,8382	8,8378	8,8374	8,8370	8,8366	8,8362
1,62	8,8358	8,8354	8,8350	8,8346	8,8342	8,8338	8,8334	8,8330	8,8326	8,8322
1,63	8,8318	8,8314	8,8310	8,8306	8,8302	8,8298	8,8294	8,8290	8,8286	8,8282
1,64	8,8278	8,8274	8,8270	8,8266	8,8262	8,8258	8,8254	8,8250	8,8246	8,8242

TABLE I (SUITE).

ρ.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1,65	8,8238	8,8234	8,8230	8,8226	8,8222	8,8218	8,8215	8,8211	8,8207	8,8203
1,66	8,8199	8,9195	8,8191	8,8187	8,8184	8,8180	8,8176	8,8172	8,8168	8,8164
1,67	8,8160	8,8156	8,8153	8,8149	8,8145	8,8141	8,8137	8,8133	8,8129	8,8125
1,68	8,8122	8,8118	8,8114	8,8110	8,8106	8,8102	8,8098	8,8095	8,8092	8,8088
1,69	8,8084	8,8080	8,8076	8,8072	8,8068	8,8065	8,8062	8,8058	8,8054	8,8050
1,70	8,8046	8,8042	3,8038	8,8035	3,8032	8,8028	8,8024	8,8020	8,8016	8,8012
1,71	8,8008	8,8005	8,8002	8,7998	8,7994	8,7990	8,7986	8,7982	8,7979	8,7976
1,72	8,7973	8,7969	8,7965	8,7961	8,7957	8,7953	8,7950	8,7947	8,7944	8,7940
1,73	8,7936	8,7932	8,7928	8,7924	8,7921	8,7918	8,7915	8,7911	8,7907	8,7903
1,74	8,7899	8,7895	8,7892	8,7889	8,7886	8,7882	8,7878	8,7874	8,7970	8,7867
1,75	8,7864	8,7861	8,7858	8,7854	8,7850	8,7846	8,7842	8,7838	8,7835	8,7832
1,76	8,7829	8,7825	8,7821	8,7817	8,7813	8,7810	8,7807	8,7804	8,7801	8,7797
1,77	8,7793	8,7789	8,7785	8,7782	8,7779	8,7776	8,7773	8,7769	8,7765	8,7761
1,78	8,7757	8,7754	8,7751	8,7748	8,7745	8,7741	8,7737	8,7733	8,7729	8,7726
1,79	8,7723	8,7720	8,7717	8,7713	8,7709	8,7705	8,7702	8,7699	8,7696	8,7693
1,80	8,7690	8,7686	8,7682	8,7678	8,7675	8,7672	8,7669	8,7666	8,7663	8,7659
1,81	8,7655	8,7651	8,7648	8,7645	8,7642	8,7639	8,7636	8,7632	8,7628	8,7624
1,82	8.7621	8,7618	8,7615	8,7612	8,7609	8,7605	8,7601	8,7598	8,7595	8,7592
1,83	8,7589	8,7586	8,7583	8,7579	8,7575	8,7571	8,7568	8,7565	8,7562	8,7559
1,84	8,7556	8,7552	8,7549	8,7546	8,7543	8,7540	8,7537	8,7534	8,7531	8,7527
1,85	8,7523	8,7520	8,7517	8,7514	8,7511	8,7508	8.7505	8,7501	8.7497	8,7494
1,86	8,7491	8,7488	8,7485	8,7482	8,7479	8,7475	8,7471	8,7468	8,7465	8,7462
1,87	8,7459	8,7456	8,7453	8,7449	8,7446	8,7443	8,7440	8,7437	8,7434	8,7431
1,88	8,7428	8,7424	8,7421	8,7418	8,7415	8,7412	8,7409	8,7406	8,7403	8,7399
1,89	8,7396	8,7393	8,7390	8,7387	8.7384	8,7381	8,7378	8,7374	8,7371	8,7368
1,90	8,7365	8,7362	8,7359	8,7356	8,7353	8,7350	8,7347	8.7344	8,7341	8,7338
1,91	8,7335	8,7332	8,7329	8,7325	8,7322	8,7319	8,7316	8,7313	8,7310	8,7307
1,92	8,7304	8,7301	8,7298	8,7295	8,7292	8,7289	8,7286	8,7283	8,7280	8.7277
1,93	8,7274	8,7271	8,7268	8,7265	8.7262	8,7259	8,7256	8,7253	8,7250	8,7247
1,94	8,7244	8,7241	8,7238	8,7235	8,7232	8,7229	8,7226	8,7223	8,7220	8,7217
1,95	8,7214	8,7211	8.7208	8,7205	8,7202	8,7199	8,7196	8,7193	8,7190	8,7187
1,96	8,7185	8,7182	8,7179	8,7176	8,7173	8.7170	8,7167	8,7164	8.7161	8,7158
1,97	8,7155	8,7152	8,7149	8,7146	8,7143	8,7140	8,7138	8,7135	8,7132	8,7129
1,98	8,7126	8,7123	8,7120	8,7117	8,7115	8,7112	8.7109	8,7106	8,7103	8,7100
1,99	8,7096	8,7094	8,7092	8,7089	8.7086	8,7083	8,7080	8,7077	8,7074	8,7071

TABLE I (SUITE).

ρ.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
2,00	8,7069	8,7066	8,7063	8,7060	8,7057	8,7054	8,7051	8,7049	8,7047	8,7044
2,01	8,7041	8,7038	8,7035	8,7032	8,7029	8,7026	8,7024	8,7021	8,7018	8,7015
2,02	8,7012	8,7009	8,7006	8,7004	8,7002	8,6999	8,6996	8,6993	8,6990	8,6987
2,03	8,6984	8,6982	8,6980	8,6977	8,6974	8,6971	8,6968	8,6965	8,6962	8,6960
2,04	8,6958	8,6955	8,6952	8,6949	8,6946	8,6943	8,6940	8,6938	8,6936	8,6933
2,05	8,6930	8,6927	8,6924	8,6921	8,6919	8,6917	8,6915	8,6912	8,6909	8,6906
2,06	8,6903	8,6900	8,6897	8,6895	8,6893	8,6890	8,6887	8,6884	8,6881	8,6878
2,07	8,6876	8,6874	8,6872	8,6869	8,6866	8,6863	8,6860	8,6857	8,6855	8,6853
2,08	8,6851	8,6848	8,6845	8,6842	8,6839	8,6836	8,6834	8,6832	8,6830	8,6827
2,09	8,6824	8,6821	8,6818	8,6815	8,6813	8,6611	8,6809	8,6806	8,6803	8,6800
2,10	8,6797	8,6795	8,6793	8,6791	8,6789	8,6786	8,6783	8,6780	8,6777	8,6775

TABLE II.

χ.	$\log \frac{1}{1-\frac{1}{2}\alpha}$.	α.
0°	0,0000	0,0 c.
1	0,0000	0,0
2	0,0001	0,1
3	0,0003	0,2
4	0,0005	0,3
5	0,0009	0,5
6	0,0012	0,7
7	0,0016	0,9
8	0,0021	1,1
9	0,0027	1,4
10	0,0033	1,8
11	0,0040	2,2
12	0,0047	2,6

TABLE III.

z.	$\log \varphi z$.	z.	$\log \varphi z$.	z.	$\log \varphi z$.	z.	$\log \varphi z$.
		30	0,007	50	0,045	70	0,191
		31	0,008	51	0,049	71	0,204
		32	0,009	52	0,053	72	0,218
13	0,000	33	0,010	53	0,057	73	0,233
14	0,001	34	0,011	54	0,062	74	0,249
15	0,001	35	0,012	55	0,067	75	0,268
16	0,001	36	0,013	56	0,072	76	0,288
17	0,001	37	0,014	57	0,077	77	0,309
18	0,002	38	0,015	58	0,083	78	0,333
19	0,003	39	0,016	59	0,090	79	0,359
20	0,003	40	0,017	60	0,097	80	0,388
21	0,003	41	0,019	61	0,104	81	0,428
22	0,003	42	0,021	62	0,112	82	0,484
23	0,004	43	0,023	63	0,121	83	0,549
24	0,004	44	0,026	64	1,130	84	0,616
25	0,005	45	0,028	65	0,140	85	0,684
26	0,005	46	0,031	66	0,150	86	0,754
27	0,006	47	0,034	67	0,160		
28	0,006	48	0,038	68	0,170		
29	0,007	49	0,041	69	0,180		

TABLE IV.

S.	k_0.	S.	k_0.
0,000000	$-\,118^{s},6$	0,00	
0,000001	— 117,8	0,00001	$-\,115^{s},0$
0,000002	— 117,2	0,00002	— 114,4
0,000003	— 116,6	0,00003	— 114,0
0,000004	— 116,2	0,00004	— 113,6
0,000005	— 115,9	0,00005	— 113,3
0,000006	— 115,6	0,00006	— 113,0
0,000007	— 115,4	0,00007	— 112,8
0,000008	— 115,2	0,00008	— 112,5
0,000009	— 115,1	0,00009	— 112,3
0,000010	— 115,0	0,00010	— 112,0

TABLE IV (SUITE).

S.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
0,000	−118,6	−112,0	−110,8	−109,7	−108,7	−107,8	−107,0	−106,3	−105,7	−105,1
0,001	−104,5	−104,0	−103,5	−103,0	−102,5	−102,0	−101,6	−101,2	−100,7	−100,3
0,002	− 99,9	− 99,5	− 99,2	− 98,8	− 98,4	− 98,0	− 97,8	− 97,5	− 97,2	− 96,9
0,003	− 96,6	− 96,3	− 95,9	− 95,6	− 95,3	− 95,0	− 94,7	− 94,4	− 94,1	− 93,9
0,004	− 93,6	− 93,3	− 93,1	− 92,9	− 92,6	− 92,4	− 92,1	− 91,9	− 91,7	− 91,5
0,005	− 91,2	− 91,0	− 90,8	− 90,5	− 90,3	− 90,1	− 89,8	− 89,6	− 89,4	− 89,2
0,006	− 89,0	− 88,8	− 88,6	− 88,4	− 88,2	− 88,0	− 87,8	− 87,6	− 87,4	− 87,2
0,007	− 87,0	− 86,8	− 86,6	− 86,4	− 86,2	− 86,1	− 85,8	− 85,6	− 85,4	− 85,2
0,008	− 85,0	− 84,8	− 84,5	− 84,5	− 84,3	− 84,1	− 83,9	− 83,7	− 83,5	− 85,2
0,009	− 83,1	− 82,9	− 82,8	− 82,6	− 82,5	− 82,3	− 82,1	− 81,9	− 81,7	− 81,6
0,01	− 81,4	− 79,9	− 78,6	− 77,5	− 76,6	− 75,9	− 75,3	− 74,8	− 74,3	− 73,8
0,02	− 73,3	− 72,8	− 72,3	− 71,8	− 71,4	− 70,9	− 70,4	− 69,9	− 69,4	− 69,0
0,03	− 68,6	− 68,1	− 67,7	− 67,3	− 66,9	− 66,6	− 66,2	− 65,8	− 65,4	− 65,0
0,04	− 64,7	− 64,3	− 63,9	− 63,6	− 63,3	− 62,9	− 62,5	− 62,2	− 61,9	− 61,6
0,05	− 61,3	− 61,0	− 60,7	− 60,4	− 60,0	− 59,7	− 59,3	− 58,9	− 58,6	− 58,3
0,06	− 58,1	− 57,9	− 57,7	− 57,5	− 57,2	− 56,9	− 56,7	− 56,4	− 56,2	− 56,0
0,07	− 55,8	− 55,5	− 55,2	− 54,9	− 54,7	− 54,4	− 54,1	− 53,9	− 53,6	− 53,3
0,08	− 53,0	− 52,7	− 52,5	− 52,3	− 52,1	− 51,8	− 51,6	− 51,4	− 51,1	− 50,8
0,09	− 50,5	− 50,2	− 49,9	− 49,6	− 49,3	− 49,0	− 48,7	− 48,4	− 48,1	− 47,8
0,10	− 47,6	− 47,4	− 47,2	− 47,0	− 46,7	− 46,4	− 46,1	− 45,9	− 45,6	− 45,3
0,11	− 45,1	− 44,9	− 44,7	− 44,4	− 44,1	− 43,9	− 43,7	− 43,5	− 43,2	− 42,9
0,12	− 42,6	− 42,4	− 42,2	− 41,9	− 41,6	− 41,4	− 41,2	− 41,0	− 40,7	− 40,4
0,13	− 40,1	− 39,9	− 39,7	− 39,4	− 39,1	− 38,9	− 38,7	− 38,5	− 38,2	− 38,0
0,14	− 37,8	− 37,5	− 37,3	− 37,0	− 36,8	− 36,6	− 36,4	− 36,2	− 35,9	− 35,7
0,15	− 35,5	− 35,2	− 34,9	− 34,7	− 34,5	− 34,3	− 34,1	− 33,9	− 33,7	− 33,4
0,16	− 33,2	− 33,0	− 32,8	− 32,5	− 32,3	− 32,1	− 31,9	− 31,7	− 31,5	− 31,2
0,17	− 31,0	− 30,8	− 30,6	− 30,3	− 30,1	− 29,9	− 29,7	− 29,5	− 29,2	− 29,0
0,18	− 28,8	− 28,6	− 28,4	− 28,1	− 27,9	− 27,7	− 27,5	− 27,3	− 27,0	− 26,8
0,19	− 26,6	− 26,4	− 26,2	− 25,9	− 25,7	− 25,5	− 25,3	− 25,1	− 24,8	− 24,6
0,20	− 24,4	− 24,2	− 24,0	− 23,7	− 23,5	− 23,3	− 23,1	− 22,9	− 22,6	− 22,4
0,21	− 22,2	− 22,0	− 21,8	− 21,5	− 21,3	− 21,1	− 20,9	− 20,7	− 20,5	− 20,3
0,22	− 20,1	− 19,8	− 19,6	− 19,4	− 19,2	− 19,0	− 18,8	− 18,6	− 18,4	− 18,2
0,23	− 18.0	− 17,7	− 17,5	− 17,3	− 17,1	− 16,9	− 16,7	− 16,5	− 16,3	− 16,1
0,24	− 15,9	− 15,7	− 15,5	− 15,3	− 15,1	− 14,9	− 14,7	− 14,5	− 14,3	− 14,1

TABLE IV (SUITE).

S.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
0,25	− 13,8	− 13,6	− 13,4	− 13,2	− 13,0	− 12,8	− 12,6	− 12,4	− 12,2	− 12,0
0,26	− 11,7	− 11,5	− 11,3	− 11,1	− 10,9	− 10,7	− 10,5	− 10,3	− 10,1	− 9,9
0,27	− 9,7	− 9,5	− 9,3	− 9,1	− 8,9	− 8,7	− 8,5	− 8,3	− 8,1	− 7,9
0,28	− 7,6	− 7,4	− 7,2	− 7,0	− 6,8	− 6,6	− 6,4	− 6,2	− 6,0	− 5,8
0,29	− 5,6	− 5,4	− 5,2	− 5,0	− 4,8	− 4,6	− 4,4	− 4,2	− 4,0	− 3,8
0,30	− 3,5	− 3,3	− 3,1	− 2,9	− 2,7	− 2,5	− 2,3	− 2,1	− 1,9	− 1,7
0,31	− 1,5	− 1,3	− 1,1	− 0,9	− 0,8	− 0,6	− 0,4	− 0,2	0,0	+ 0,2
0,32	+ 0,4	+ 0,6	+ 0,8	+ 1,0	+ 1,2	+ 1,4	+ 1,6	+ 1,8	+ 1,9	+ 2,1
0,33	+ 2,3	+ 2,5	+ 2,7	+ 2,9	+ 3,1	+ 3,3	+ 3,5	+ 3,7	+ 3,9	+ 4,1
0,34	+ 4,3	+ 4,4	+ 4,6	+ 4,8	+ 5,0	+ 5,2	+ 5,4	+ 5,6	+ 5,8	+ 6,0
0,35	+ 6,2	+ 6,3	+ 6,5	+ 6,7	+ 6,9	+ 7,1	+ 7,3	+ 7,5	+ 7,7	+ 7,9
0,36	+ 8,1	+ 8,3	+ 8,5	+ 8,7	+ 8,9	+ 9,0	+ 9,2	+ 9,4	+ 9,6	+ 9,8
0,37	+ 10,0	+ 10,2	+ 10,4	+ 10,6	+ 10,8	+ 10,9	+ 11,1	+ 11,3	+ 11,5	+ 11,7
0,38	+ 11,9	+ 12,1	+ 12,3	+ 12,5	+ 12,6	+ 12,8	+ 13,0	+ 13,2	+ 13,4	+ 13,5
0,39	+ 13,7	+ 13,9	+ 14,1	+ 14,3	+ 14,5	+ 14,7	+ 14,8	+ 15,0	+ 15,2	+ 15,4
0,40	+ 15,7	+ 15,9	+ 16,1	+ 16,3	+ 16,5	+ 16,7	+ 16,9	+ 17,1	+ 17,2	+ 17,4
0,41	+ 17,6	+ 17,8	+ 18,0	+ 18,2	+ 18,4	+ 18,6	+ 18,8	+ 19,0	+ 19,1	+ 19,3
0,42	+ 19,5	+ 19,7	+ 19,9	+ 20,1	+ 20,3	+ 20,5	+ 20,7	+ 20,9	+ 21,0	+ 21,2
0,43	+ 21,4	+ 21,6	+ 21,8	+ 22,0	+ 22,2	+ 22,3	+ 22,5	+ 22,7	+ 22,8	+ 23,0
0,44	+ 23,2	+ 23,4	+ 23,6	+ 23,8	+ 24,0	+ 24,1	+ 24,3	+ 24,5	+ 24,7	+ 24,9
0,45	+ 25,1	+ 25,2	+ 25,4	+ 25,6	+ 25,8	+ 26,0	+ 26,2	+ 26,4	+ 26,6	+ 26,8
0,46	+ 27,0	+ 27,1	+ 27,3	+ 27,5	+ 27,7	+ 27,9	+ 28,1	+ 28,3	+ 28,5	+ 28,7
0,47	+ 28,9	+ 29,0	+ 29,2	+ 29,4	+ 29,6	+ 29,8	+ 30,0	+ 30,2	+ 30,3	+ 30,5
0,48	+ 30,7	+ 30,8	+ 31,0	+ 31,2	+ 31,4	+ 31,6	+ 31,8	+ 32,0	+ 32,1	+ 32,3
0,49	+ 32,5	+ 32,7	+ 32,8	+ 33,0	+ 33,2	+ 33,4	+ 33,6	+ 33,8	+ 34,0	+ 34,2
0,5	+ 34,4	+ 36,3	+ 38,2	+ 40,2	+ 41,9	+ 43,7	+ 45,6	+ 47,5	+ 49,4	+ 51,3
0,6	+ 53,1	+ 54,9	+ 56,8	+ 58,8	+ 60,7	+ 62,6	+ 64,5	+ 66,4	+ 68,4	+ 70,3
0,7	+ 72,3	+ 74,2	+ 76,2	+ 78,2	+ 80,3	+ 82,3	+ 84,4	+ 86,5	+ 88,5	+ 90,6
0,8	+ 92,7	+ 94,9	+ 97,1	+ 99,4	+101,6	+103,8	+106,1	+108,4	+110,7	+113,2
0,9	+115,8	+118,5								

TABLE V (ARGUMENT $-k$).

k.	180°. 0°.	170°. 10°.	160°. 20°.	150°. 30°.	140°. 40°.	130°. 50°.	120°. 60°.	110°. 70°.	100°. 80°.	90°. 90°.
— 0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
— 10	0,0	0,1	0,2	0,4	0,8	1,1	1,4	1,6	1,7	1,7
— 20	0,0	0,2	0,4	0,9	1,6	2,2	2,7	3,1	3,4	3,5
— 30	0,0	0,3	0,[illegible]	1,5	2,4	3,3	4,1	4,7	5,0	5,2
— 40	0,0	0,4	0,9	2,0	3,1	4,4	5,5	6,3	6,6	6,9
— 50	0,0	0,5	1,2	2,5	3,9	5,4	6,8	7,8	8,3	8,6
— 60	0,0	0,6	1,5	3,1	4,7	6,5	8,1	9,4	10,1	10,3
— 70	0,1	0,8	1,8	3,6	5,5	7,5	9,5	11,0	11,9	12,1
— 80	0,1	0,9	2,1	4,2	6,3	8,6	10,9	12,6	13,7	13,9
— 90	0,1	1,1	2,3	4,6	7,0	9,7	12,3	14,2	15,5	15,7
—100	0,1	1,2	2,5	5,1	7,8	10,7	13,7	15,8	17,3	17,5
—110	0,1	1,3	2,8	5,6	8,5	11,8	15,1	17,4	19,1	19,3
—120	0,1	1,4	3,1	6,1	9,3	12,9	16,5	19,1	20,9	21,1

TABLE VI (ARGUMENT $+k$).

k.	180°. 0°.	170°. 10°.	160°. 20°.	150°. 30°.	140°. 40°.	130°. 50°.	120°. 60°.	110°. 70°.	100°. 80°.	90°. 90°.
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
+ 10	0,0	0,1	0,2	0,4	0,8	1,1	1,3	5	1,7	1,7
+ 20	0,0	0,2	0,4	0,9	1,5	2,1	2,7	3,0	3,2	3,3
+ 30	0,0	0,3	0,6	1,4	2,2	3,0	3,9	4,5	4,8	5,0
+ 40	0,0	0,4	0,9	1,9	2,9	4,0	5,2	6,0	6,3	6,7
+ 50	0,0	0,5	1,1	2,3	3,6	5,0	6,4	7,3	7,9	8,4
+ 60	0,0	0,6	1,4	2,8	4,3	6,0	7,6	8,8	9,4	10,0

TABLE VII.

C.	h.	δh.
0°	64,9	10,0
10	65,0	10,1
20	65,5	10,2
30	66,3	10,3
40	67,2	10,4
50	68,4	10,5
60	69,5	10,6
70	70,4	10,7
80	71,1	10,8
90	71,3	10,9

TABLE VIII.

u.	g.	u.	g.
+ 5	0,2	103	1,2
+ 8	0,3	109	1,3
—12	0,4	113	1,4
26	0,5	116	1,5
40	0,6	118	1,6
53	0,7	120	1,7
65	0,8	121	1,8
76	0,9	122	1,9
86	1,0	123	2,0
93	1,1	124	2,1

RECHERCHES SUR L'HYDRODYNAMIQUE,

PAR M. P. DUHEM.

QUATRIÈME PARTIE.

DES CONDITIONS AUX LIMITES.

(SUITE ET FIN.)

CHAPITRE III.

DU RÉGIME PERMANENT AU SEIN D'UN FLUIDE VISQUEUX.

§ 1. — LA CONDITION D'ADHÉRENCE DOIT ÊTRE ASSIMILÉE A L'INTRODUCTION DE NOUVELLES LIAISONS. — ÉNONCÉ ET DÉMONSTRATION D'UN LEMME (¹).

Lorsque deux fluides ne peuvent glisser l'un sur l'autre, lorsqu'un fluide ne peut glisser sur un solide, doit-on traiter le système où deux corps adhèrent entre eux comme on traitait le système où ces corps glissaient l'un sur l'autre, en égalant simplement à o la vitesse relative le long de la surface de contact? Doit-on au contraire regarder le nouveau système comme différant du premier par l'introduction de nouvelles liaisons? Les deux manières de voir sont plausibles, bien que la seconde paraisse plus logique.

Ces deux manières de voir ne sont pas équivalentes; la première exige que le vecteur (p_x, p_y, p_z) aboutisse normalement à la surface de contact, ce que la seconde n'exige pas.

Une ambiguïté analogue s'est présentée dans l'étude du frottement de deux solides l'un sur l'autre; dans ce cas, la première manière de voir a dû être rejetée; elle aurait introduit plus de conditions que le problème ne comportait d'inconnues.

N'en serait-il pas de même dans la question qui nous a occupé au Chapitre précédent? C'est ce que nous nous proposons d'examiner en celui-ci.

Dans ce but, nous allons établir un LEMME QUI EST VALABLE SEULEMENT DANS L'HYPOTHÈSE OU L'ADHÉRENCE D'UN FLUIDE A UN SOLIDE ENTRAINE LA PERPENDICULARITÉ DU VECTEUR (p_x, p_y, p_z) A LA SURFACE DU SOLIDE.

(¹) *Sur certains cas d'adhérence d'un liquide visqueux aux solides qu'il baigne* (*Comptes rendus*, t. CXXXIV, p. 265; 3 février 1902).

Voici l'énoncé de ce lemme :

Si un fluide visqueux et non compressible adhère à un corps solide, les six quantités

$$(89)\quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial x},\quad \dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y},\quad \dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial x}{\partial v} \end{array}\right.$$

s'annulent aux points du fluide qui sont infiniment voisins de la surface du solide.

Soient, en effet, u', v', w', les trois composantes de la vitesse en un point du solide; nous aurons

$$\begin{aligned} u' &= U - \Omega_z y + \Omega_y z, \\ v' &= V - \Omega_x z + \Omega_z x, \\ w' &= W - \Omega_y x + \Omega_x y, \end{aligned}$$

U, V, W, Ω_x, Ω_y, Ω_z étant trois quantités qui dépendent exclusivement de t.

S'il y a adhérence du fluide au solide, nous avons, en tout point de leur commune surface,

$$u - u' = 0, \qquad v - v' = 0, \qquad w - w' = 0.$$

Les trois fonctions

$$\begin{aligned} f &= u - U + \Omega_z y - \Omega_y z, \\ g &= v - V + \Omega_x z - \Omega_z x, \\ h &= w - W + \Omega_y x - \Omega_x y \end{aligned}$$

s'annulent donc en tous les points de la surface; partant, on peut trouver, en chaque point de cette surface, un vecteur F, G, H, tel que l'on ait

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \alpha F, & \dfrac{\partial f}{\partial y} = \beta F, & \dfrac{\partial f}{\partial z} = \gamma F, \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} = \alpha G, & \dfrac{\partial g}{\partial y} = \beta G, & \dfrac{\partial g}{\partial z} = \gamma G, \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} = \alpha H, & \dfrac{\partial h}{\partial y} = \beta H, & \dfrac{\partial h}{\partial z} = \gamma H, \end{array}$$

égalités qui peuvent encore s'écrire

$$(90)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha F, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = \beta F - \Omega_z, & \dfrac{\partial u}{\partial z} = \gamma F + \Omega_y, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \alpha G + \Omega_z, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = \beta G, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = \gamma G - \Omega_x, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = \alpha H - \Omega_y, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = \beta H + \Omega_x, & \dfrac{\partial w}{\partial z} = \gamma H. \end{array}\right.$$

Dans ces égalités, on a posé

$$\cos(n_i, x) = \alpha, \qquad \cos(n_i, y) = \beta \qquad \cos(n_i, z) = \gamma.$$

Ces égalités nous donnent les expressions suivantes des six quantités (89) :

$$(91) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha F, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \beta G, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \gamma H, \\ &\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma G + \beta H, \\ &\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \alpha H + \gamma F, \\ &\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \beta F + \alpha G. \end{aligned} \right.$$

Les trois premières égalités (91) donnent

$$(92) \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} = \alpha F + \beta G + \gamma H.$$

Les égalités (43) et (44) transforment les égalités (51) de la I[e] Partie de ces *Recherches* en

$$(93) \qquad \left\{ \begin{aligned} \nu_x &= -\lambda(\alpha F + \beta G + \gamma H) - 2\mu\alpha F, \\ \nu_y &= -\lambda(\alpha F + \beta G + \gamma H) - 2\mu\beta G, \\ \nu_z &= -\lambda(\alpha F + \beta G + \gamma H) - 2\mu\gamma H, \\ \tau_x &= -\mu(\gamma G + \beta H), \\ \tau_y &= -\mu(\alpha H + \gamma F), \\ \tau_z &= -\mu(\beta F + \alpha G). \end{aligned} \right.$$

Les égalités (48) de la première partie deviennent alors

$$(94) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_x &= (\lambda + \mu)\alpha(\alpha F + \beta G + \gamma H) + \mu F, \\ p_y &= (\lambda + \mu)\beta(\alpha F + \beta G + \gamma H) + \mu G, \\ p_z &= (\lambda + \mu)\gamma(\alpha F + \beta G + \gamma H) + \mu H. \end{aligned} \right.$$

Mais, si le fluide adhère au solide, le vecteur (p_x, p_y, p_z) doit être normal à la surface de contact; on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} \beta p_z - \gamma p_y &= 0, \\ \gamma p_x - \alpha p_z &= 0, \\ \alpha p_y - \beta p_x &= 0; \end{aligned}$$

ou bien

$$\beta H - \gamma G = 0,$$
$$\gamma F - \alpha H = 0,$$
$$\alpha G - \beta F = 0;$$

ou enfin

(95) $$F = K\alpha, \qquad G = K\beta, \qquad H = K\gamma,$$

K étant une quantité variable d'un point à l'autre de la surface.

D'ailleurs, les égalités (92) et (95) donnent

(96) $$\theta = K.$$

Ce que nous avons écrit jusqu'ici s'applique aussi bien aux fluides compressibles qu'aux liquides incompressibles; si nous restreignons dorénavant notre analyse à ces derniers, nous devrons écrire $\theta = 0$, partant, selon l'égalité (96),

(97) $$K = 0.$$

Alors, des égalités (91) et (95), découlera le lemme énoncé.

En outre, les égalités (90), (95) et (96) donneront, en tout point de la surface de contact du solide et du liquide

(98) $$\left\{\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\Omega_x, \\ \omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\Omega_y, \\ \omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\Omega_z. \end{aligned}\right.$$

Supposons, en particulier, le solide immobile ou animé d'un simple mouvement de translation; nous aurons

$$\Omega_x = 0, \qquad \Omega_y = 0, \qquad \Omega_z = 0$$

et, selon les égalités (98),

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ce résultat, joint au lemme précédent, conduit à la proposition suivante :

Si un fluide visqueux et incompressible adhère à un solide, et si ce solide est immobile ou animé d'un simple mouvement de translation, on a, en tout

point de la surface commune aux deux corps,

$$(99)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial u}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial u}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial v}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial v}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial w}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial w}{\partial z}=0. \end{cases}$$

§ 2. — Écoulement permanent d'un liquide, de profondeur et de hauteur infinies, coulant entre des parois verticales.

Nous nous occuperons exclusivement de *liquides,* c'est-à-dire de fluides incompressibles; nous supposerons que la température garde une valeur uniforme et constante dans toute l'étendue du fluide. Nous nous trouverons alors (Ire Partie, Chap. III. § 2) dans un cas où il existe une fonction $\Lambda(x, y, z, t)$ permettant de mettre les équations de l'Hydrodynamique sous la forme [*loc. cit.*, égalités (157)]

$$(100)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x}+\gamma_x-\dfrac{q_x}{\rho}, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial y}+\gamma_y-\dfrac{q_y}{\rho}, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial z}+\gamma_z-\dfrac{q_z}{\rho}, \end{cases}$$

et cette fonction Λ sera donnée par l'égalité [*loc. cit.,* égalité (158)]

$$(101)\quad \Lambda(x, y, z, t)=V_i+V_e+\frac{\Pi}{\rho}.$$

Dans le présent Chapitre, nous nous proposions d'étudier un *écoulement permanent,* c'est-à-dire un écoulement où les composantes u, v, w de la vitesse dépendent de x, y, z, mais point de t; dans un tel écoulement, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}=0,$$

partant,

$$\gamma_x=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\gamma_y=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\gamma_z=u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

D'autre part, en un fluide incompressible où

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

est toujours nul, où ρ a partout la même valeur, où, en outre, d'après les hypothèses faites, T a une valeur uniforme, on a [Ire Partie, égalités (58)]

$$q_x = \mu \Delta u, \qquad q_y = \mu \Delta v, \qquad q_z = \mu \Delta w.$$

Les équations (100) deviennent donc, pour les mouvements que nous avons en vue d'étudier,

(100 *bis*)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho}\Delta u = 0,\\ \frac{\partial \Lambda}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho}\Delta v = 0,\\ \frac{\partial \Lambda}{\partial z} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho}\Delta w = 0. \end{aligned}\right.$$

A ces équations, il faut joindre l'équation de continuité

(101 *bis*)
$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Le fluide dont nous étudierons le régime permanent sera supposé illimité aussi bien dans le sens des z positifs que dans le sens des z négatifs; les parois du canal dans lequel il se meut seront des cylindres dont les génératrices seront parallèles à Oz. La vitesse de chaque point matériel appartenant au fluide sera supposée parallèle au plan des x, y, z, en sorte que l'on aura

$$w = 0.$$

Enfin, u, v seront supposés indépendants de z.

Le canal s'étendra à l'infini, aussi bien en amont qu'en aval. A cet égard nous ferons les hypothèses suivantes :

Si l'on désigne par l la distance d'un point du plan des x, y à l'origine des coordonnées, lorsque l croît au delà de toute limite :

Les parois cylindriques du canal s'écartent infiniment; la largeur du canal croît au delà de toute limite;

Les composantes u, v de la vitesse et toutes leurs dérivées partielles tendent vers 0;

Les produits lu, lv, $l^2\frac{\partial u}{\partial x}$, $l^2\frac{\partial u}{\partial y}$, $l^2\frac{\partial v}{\partial x}$, $l^2\frac{\partial v}{\partial y}$, ne croissent pas au delà de toute

Les équations (100 *bis*) deviennent

$$(102)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Lambda}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\mu}{\rho}\Delta u=0,\\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\mu}{\rho}\Delta v=0,\\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial z}=0,\end{aligned}\right.$$

tandis que l'équation de continuité (101 *bis*) devient

$$(103)\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

En vertu de cette égalité (103), il existe une fonction $\varphi(x, y)$ telle que l'on ait

$$(104)\quad u=\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y},\qquad v=-\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}.$$

Si nous reportons ces valeurs de u et de v dans les deux premières égalités (102), elles deviennent

$$(105)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Lambda}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi=0,\\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi=0.\end{aligned}\right.$$

De ces deux égalités, il est aisé de tirer une troisième relation où ne figure plus que la fonction inconnue φ. En effet, différentions la première égalité (105) par rapport à y, la seconde par rapport à x et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$(106)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi-\frac{\mu}{\rho}\Delta\Delta\varphi=0.$$

Traçons une circonférence de rayon l, ayant pour centre l'origine des coordonnées et située dans le plan des x, y. Soit σ la partie comprise à l'intérieur de cette circonférence, du plan des x, y que recouvre le fluide. Considérons l'intégrale

$$(107)\quad \mathrm{J}=\int_\sigma \Delta\varphi\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi\right]d\sigma$$

que l'on peut encore écrire

$$(107\ bis) \qquad J = \int_\sigma \Delta\varphi \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta\varphi\right)\right] d\sigma.$$

Transformons-la au moyen d'une intégration par parties.

Soient :

L, le contour de l'aire σ,
n_i, la normale au contour L vers l'intérieur de l'aire σ,

$$\alpha = \cos(n_i, x), \qquad \beta = \cos(n_i, y).$$

Nous aurons

$$J = -\int_L (\Delta\varphi)^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right) dL - \int_\sigma \Delta\varphi \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi\right) d\sigma.$$

Mais, selon l'égalité (107), la seconde intégrale n'est autre que J ; nous trouvons donc

$$(108) \qquad 2J = -\int_L (\Delta\varphi)^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right) dL.$$

D'autre part, nous avons

$$(109) \qquad \int_\sigma \Delta\varphi\, \Delta\Delta\varphi\, d\sigma = -\int_L \Delta\varphi \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial n_i} dL - \int_\sigma \left[\left(\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial y}\right)^2\right] d\sigma.$$

Les égalités (106), (107), (108), (109) donnent sans peine

$$(110) \qquad \frac{\mu}{\rho}\int_\sigma \left[\left(\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial y}\right)^2\right] d\sigma = \int_L \Delta\varphi \left[\frac{\Delta\varphi}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right) - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial n_i}\right] dL.$$

Le contour L se compose de trois parties :

1° Une partie λ qui coupe le canal en amont ;

2° Une partie λ' qui coupe le canal en aval ;

3° Une partie qui est la section des parois du canal par le plan des x, y.

Tout le long de cette dernière partie, *si le liquide adhère au solide et si l'on admet l'hypothèse énoncée au* § 1, on a, en vertu des égalités (99),

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

partant

$$\Delta\varphi = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Nous pouvons donc écrire

$$(111)\quad \frac{\mu}{\rho}\int_\sigma\left[\left(\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma = \int_\lambda \Delta\varphi\left[\frac{\Delta\varphi}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\alpha-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right)-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial n_i}\right]d\lambda + \int_{\lambda'} \Delta\varphi\left[\frac{\Delta\varphi}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\alpha-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right)-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial n_i}\right]d\lambda'.$$

Faisons maintenant croître au delà de toute limite le rayon l. D'après les hypothèses faites, chacun des deux termes du second membre tend vers o. Il en est donc de même du premier.

Mais, au premier membre, la quantité sous le signe $\int$ n'est jamais négative; le premier membre n'est donc jamais négatif et il ne peut décroître lorsque l croît; il ne peut donc avoir o pour limite que s'il est constamment nul. Cela exige que l'on ait, en tout point du fluide,

$$\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial y}=0.$$

D'ailleurs, nous avons vu, il y a un instant, que l'on avait, sur les parois,

$$\Delta\varphi = 0.$$

On a donc, dans tout le fluide,

$$(112)\qquad \Delta\varphi = \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Nous voyons alors qu'il existe une fonction $\psi(x,y)$ telle que l'on ait

$$(113)\qquad u=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad v=-\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

La condition de continuité (103) nous montre que cette fonction vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta\psi = 0.$$

Il en est nécessairement de même de ses dérivées partielles u et v, en sorte que, dans toute la partie du plan des x, y recouverte par le fluide, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Le long de l'intersection des parois du canal avec le plan des x, y, on a les

égalités (99), partant les égalités

$$u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\beta = \frac{\partial u}{\partial n_i} = 0,$$

$$v = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\beta = \frac{\partial v}{\partial n_i} = 0.$$

Si l'on observe en outre que

$$lu, \quad lv, \quad l^2\frac{\partial u}{\partial x}, \quad l^2\frac{\partial u}{\partial y}, \quad l^2\frac{\partial v}{\partial x}, \quad l^2\frac{\partial v}{\partial y}$$

tendent vers des limites finies lorsque, dans le plan des x, y, le point (x, y) s'éloigne à une distance infinie l de l'origine, on voit que l'on a nécessairement, dans tout l'espace occupé par le fluide,

(114) $$u = 0, \qquad v = 0.$$

Le fluide ne peut présenter d'autre régime permanent que le repos.

Mais ces égalités (114), reportées dans les égalités (102), exigent que l'on ait

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0,$$

égalités qui sont les conditions d'équilibre de la masse fluide. Si nous supposons que l'on dispose de la pression Π de telle sorte que les deux premières ne soient pas vérifiées, le repos sera impossible et nous nous heurterons à une contradiction.

§ 3. — Un cylindre indéfini, au sein d'un fluide indéfini, éprouve un mouvement uniforme dans une direction perpendiculaire aux génératrices ([1]).

Une analyse très voisine de la précédente va nous permettre de traiter un problème dont un cas particulier a été examiné par Stokes.

Un cylindre indéfini, dont les génératrices sont parallèles à Oz, est animé parallèlement à Ox d'une translation uniforme de vitesse U. Il est plongé dans un fluide visqueux indéfini *qui adhère à sa surface*. Le mouvement dure depuis très longtemps, de sorte que *l'état du fluide, rapporté à un système d'axes coordonnés invariablement lié au cylindre, est un état de régime permanent.* On suppose chaque particule fluide animée d'une vitesse normale à Oz et indépendante de z

(115) $$w = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

[1] *Sur certains cas d'adhérence d'un liquide visqueux aux solides qu'il baigne* (*Comptes rendus*, t. CXXXIV, p. 265; 3 février 1902).

Si l est la distance d'un point à l'axe des z, on suppose que, lorsque l croît au delà de toute limite, u, v et toutes leurs dérivées partielles tendent vers o et que

$$lu,\quad lv,\quad l^2\frac{\partial u}{\partial x},\quad l^2\frac{\partial u}{\partial y},\quad l^2\frac{\partial v}{\partial x},\quad l^2\frac{\partial v}{\partial y}$$

ne croissent pas au delà de toute limite.

D'après l'une des hypothèses faites, chacune des composantes u et v de la vitesse doit avoir la même valeur, à l'instant t, au point dont les coordonnées sont x, y et, à l'instant t', au point dont les coordonnées sont $x' = x + U(t' - t)$, $y' = y$, c'est-à-dire que u et v ne dépendent de x et de t que par le binome $(x - Ut)$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -U\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -U\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{116}$$

Moyennant les égalités (115) et (116), les équations (100 *bis*) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + (u - U)\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho}\Delta u = 0,\\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial y} + (u - U)\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho}\Delta v = 0,\\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right. \tag{117}$$

tandis que l'équation de continuité (101 *bis*) reprend la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{103}$$

Il existe donc une fonction $\varphi(x - Ut, y)$ telle que l'on ait

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y},\qquad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{104}$$

en sorte que les deux premières égalités (117) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - U\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi = 0,\\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - U\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi = 0. \end{aligned}\right. \tag{118}$$

Différentions la première de ces équations (118) par rapport à y, la seconde par rapport à x et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous

trouvons que la fonction φ doit vérifier l'équation

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi - \frac{\mu}{\rho}\Delta\Delta\varphi = 0. \tag{119}$$

Dans le plan des x, y, la section du cylindre a pour contour L; dans ce plan, de l'origine des coordonnées pour centre, et avec un rayon l, décrivons une circonférence de cercle λ; prenons l assez grand pour que le contour L soit, en entier, à l'intérieur du cercle; soit σ l'aire comprise entre les contours L et λ.

L'égalité (119) nous permet d'écrire

$$\int_\sigma \Delta\varphi\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi - \frac{\mu}{\rho}\Delta\Delta\varphi\right]d\sigma = 0. \tag{120}$$

Considérons l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_\sigma \Delta\varphi\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi\right]d\sigma. \tag{121}$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{J} = {} & \int_\sigma \Delta\varphi\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\Delta\varphi\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta\varphi\right)\right\}d\sigma \\
= {} & -\int_{\mathrm{L}} (\Delta\varphi)^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right]d\mathrm{L} \\
& -\int_\lambda (\Delta\varphi)^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right]d\lambda \\
& -\int_\sigma \Delta\varphi\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi\right]d\sigma.
\end{aligned}$$

Mais, selon l'égalité (121), la dernière intégrale est précisément J; nous trouvons donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{J} = {} & -\frac{1}{2}\int_{\mathrm{L}} (\Delta\varphi)^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right]d\mathrm{L} \\
& -\frac{1}{2}\int_\lambda (\Delta\varphi)^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right]d\lambda.
\end{aligned} \tag{122}$$

Les égalités (120), (121) et (122) donnent sans peine

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu}{\rho}\int_\sigma \left[\left(\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma \\
& \quad = \int_{\mathrm{L}} \Delta\varphi\left\{\frac{\Delta\varphi}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right] - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial n_i}\right\}d\mathrm{L} \\
& \quad\quad + \int_\lambda \Delta\varphi\left\{\frac{\Delta\varphi}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right] - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial n_i}\right\}d\lambda,
\end{aligned} \tag{123}$$

Au second membre de cette égalité (123), la première intégrale est nulle en vertu des égalités (99), en sorte que ce second membre se réduit à la seconde intégrale.

Faisons croître le rayon l au delà de toute limite. Visiblement, en vertu des hypothèses faites, cette seconde intégrale tend vers o. Il en doit donc être de même du premier membre de l'équation (123). Or, cela n'est possible que si l'on a, en tout point de l'aire σ,

$$\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial y} = 0;$$

et comme on a, en tout point du contour L, en vertu des égalités (99),

$$\Delta\varphi = 0,$$

on doit avoir aussi, en tout point du plan des x, y extérieur au contour L,

$$\Delta\varphi = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{124}$$

Il doit donc exister, en tout point des x, y extérieur au contour L, une fonction ψ telle que

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{125}$$

cette fonction pouvant d'ailleurs n'être pas uniforme. Selon l'égalité (103), cette fonction vérifierait l'équation de Laplace et il en serait de même de u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Mais u est une fonction uniforme; elle s'annule à l'infini; en tout point du contour L on a, selon les égalités (99),

$$\frac{\partial u}{\partial n_i} = \frac{\partial u}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\beta = 0. \tag{126}$$

La fonction u doit donc être nulle dans tout le fluide, ce qui est impossible puisque l'on doit avoir, en tout point du contour L,

$$u = U. \tag{127}$$

Stokes (1) avait déjà traité ce problème dans le cas particulier où le cylindre est à section circulaire. Il était également parvenu à cette conséquence que le régime permanent considéré ne peut s'établir; mais, pour obtenir ce résultat, il avait uniquement fait usage de l'égalité (127); il n'avait pas invoqué les égalités (99), nécessaires pour que le vecteur (p_x, p_y, p_z) soit normal à la surface du cylindre. Le raisonnement qu'il a suivi pourrait donner prise à certaines critiques.

En effet, si l'analyse exposée en ce paragraphe et au paragraphe précédent aboutit à des contradictions, elle le doit à l'emploi des équations (99), c'est-à-dire, en dernière analyse, à l'hypothèse que le vecteur (p_x, p_y, p_z) aboutit normalement à la surface le long de laquelle le fluide adhère au solide.

Si nous regardons cette adhérence comme constituant une liaison nouvelle, rien n'oblige plus le vecteur (p_x, p_y, p_z) à aboutir normalement à la surface d'adhérence; les impossibilités que nous venons de signaler disparaissent alors d'elles-mêmes. Nous sommes donc contraints d'adopter cette supposition dans l'étude du frottement des fluides sur les solides, comme nous l'avons adoptée dans l'étude du frottement des solides entre eux. Par là, toute ambiguïté se trouve levée dans l'établissement des conditions aux limites.

Nous allons faire usage de ces conditions pour traiter quelques problèmes très simples relatifs au régime permanent des fluides incompressibles de température uniforme. Nous aurons de nouveau occasion de constater que le vecteur (p_x, p_y, p_z) ne peut aboutir normalement aux surfaces d'adhérence.

§ 4. — De l'écoulement permanent par filets parallèles.

Le cas le plus simple, que nous allons étudier tout d'abord, est celui du mouvement permanent *par filets parallèles;* on nomme ainsi un mouvement où toutes les vitesses sont constamment parallèles à une droite fixe que nous pouvons prendre pour axe des z. Cette hypothèse s'exprime par les égalités

$$u = 0, \qquad v = 0. \tag{128}$$

Moyennant ces égalités, l'équation de continuité (101 *bis*) se réduit à $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$; elle nous enseigne que w est une simple fonction de x et de y:

$$w = w(x, y). \tag{129}$$

(1) Stokes, *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums* (*Transactions of the Cambridge philosophical Society*, vol. IX, p. 8; 9 décembre 1850; Part I, Section IV, n°s 45 à 48. — *Mathematical and physical Papers*, vol. III, p. 62. — *Collection de Mémoires publiés par la Société française de Physique*, t. V, p. 344).

Les deux premières égalités (100 *bis*), réduites à

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0,$$

nous enseignent que Λ est une simple fonction de z :

(130) $$\Lambda = \Lambda(z).$$

Quant à la dernière égalité (100 *bis*), elle devient

(131) $$\frac{d\Lambda(z)}{dz} - \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Les équations (129) et (131) nous apprennent que $\frac{d\Lambda(z)}{dz}$ ne dépend pas de z, partant, que Λ est une fonction linéaire de z; soient Λ_0, Λ_1 les valeurs que prend cette fonction lorsqu'on donne à z les valeurs z_0, z_1. L'égalité (131) deviendra alors

(132) $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\mu}\frac{\Lambda_1 - \Lambda_0}{z_1 - z_0}.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles dont dépend l'étude du mouvement permanent par filets parallèles; elle a été donnée par Navier (¹).

Pour compléter la mise en équations du problème, il convient de joindre à l'équation précédente les conditions qui doivent être vérifiées le long de la surface du solide où le fluide est contenu. Cette surface ne peut être, d'ailleurs, qu'une surface cylindrique dont les génératrices soient parallèles à Oz.

Selon les égalités (128) et (129), les égalités (51) de la Iʳᵉ Partie de ces *Recherches* deviennent

(133) $$\left\{\begin{array}{lll} \nu_x = 0, & \nu_y = 0, & \nu_z = 0, \\ \tau_x = -\mu\frac{\partial w}{\partial y}, & \tau_y = -\mu\frac{\partial w}{\partial x}, & \tau_z = 0. \end{array}\right.$$

Si n_i est la normale à la surface limite dirigée vers l'intérieur du fluide, nous aurons $\cos(n_i, z) = 0$ et les égalités (133), jointes aux égalités (48) de la première partie, donneront

(134) $$p_x = 0, \qquad p_y = 0, \qquad p_z = \mu\frac{\partial w}{\partial n_i}.$$

(¹) NAVIER, *Mémoire sur les lois de l'écoulement des fluides*, lu à l'Académie royale des Sciences le 18 mars 1822 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1823, p. 417).

Les conditions aux limites sont de formes différentes selon que le liquide glisse ou ne glisse pas à la surface du solide.

Supposons d'abord que le fluide glisse à la surface du solide. Les conditions à vérifier seront les conditions (80). Mais l'égalité (85), jointe aux égalités (134) que nous venons d'écrire, donne

$$\Pi - \varpi = 0.$$

On voit alors que les deux premières égalités (80) deviennent deux identités, tandis que la troisième devient

$$(135) \qquad \mu \frac{\partial w}{\partial n_i} = -\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|w|}\right) w.$$

Si nous supposons que f et $\mathfrak{G}$ soient deux constantes, rien, dans les conditions (132) et (135), ne dépendra plus de la variable z et le problème auquel nous sommes amenés pourra s'énoncer de la manière suivante :

Soient σ la section droite du cylindre et L la ligne qui sert de contour à cette section droite ; la direction n_i sera normale à la ligne L, menée dans le plan de l'aire σ et vers l'intérieur de cette aire.

Il s'agit de trouver une fonction $w(x, y)$ qui vérifie la condition (132) en tout point de l'aire σ et la condition (135) en tout point du contour L.

Le sens positif de l'axe des z est arbitraire. Choisissons ce sens de telle sorte que A soit une fonction croissante de z ; $\frac{\rho}{\mu} \frac{A_1 - A_0}{z_1 - z_0}$ sera alors une quantité positive que nous désignerons par K^2 :

$$(136) \qquad \frac{\rho}{\mu} \frac{A_1 - A_0}{z_1 - z_0} = K^2.$$

L'équation (132) deviendra

$$(132 \textit{ bis}) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = K^2.$$

Je dis que la fonction $w(x, y)$, continue en tout point de l'aire σ, ne peut être positive en aucun point de cette aire.

Supposons, en effet, qu'elle puisse être positive en certains points de l'aire σ ; comme elle ne peut être infinie, elle admettrait une limite supérieure positive et, comme elle est fonction continue de x et de y, elle atteindrait sa limite soit en un point de l'aire σ, soit en point du contour L.

Imaginons, d'abord, que cette limite soit atteinte en un point M du contour L ; écrivons, au point M, la condition (135) ; w étant supposé positif, cette condition

deviendra

$$\mu \frac{\partial w}{\partial n_i} = -f w - \mathfrak{G}. \tag{137}$$

w serait positif par hypothèse ; f et $\mathfrak{G}$ sont essentiellement négatifs [IVe Partie, inégalités (46) et (53)]; μ est essentiellement positif [Ire Partie, inégalité (62 *bis*)]. La condition (137) donnerait donc

$$\frac{\partial w}{\partial n_i} > 0.$$

w croîtrait lorsqu'on s'éloignerait du point M selon la normale n_i, en sorte que w ne pourrait avoir atteint, au point M, sa limite supérieure.

Imaginons maintenant que w atteigne sa valeur maximum en un point M intérieur à l'aire σ; il faudrait qu'en ce point la forme quadratique en X et Y

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} X^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} XY + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} Y^2$$

ne fût positive pour aucun système de valeurs de X et de Y; partant, que ni $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, ni $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ ne fussent positifs, ce qui est incompatible avec la condition (132 *bis*).

La fonction $w(x, y)$ n'est donc positive en aucun point de l'aire σ; partout le fluide coule dans le même sens, et ce sens est celui où $\Lambda(z)$ va en diminuant.

w étant négatif en tout point de la ligne L, la condition (135) devient

$$\frac{\partial w}{\partial n_i} = -\frac{f}{\mu} w + \frac{\mathfrak{G}}{\mu}. \tag{135 bis}$$

Le problème que nous avons à résoudre se ramène sans peine à un problème connu.

Soit r la distance entre deux points (x, y), (x', y') de l'aire σ. Posons

$$w_0(x, y) = -\frac{K^2}{2\pi} \int\!\!\int \log r \, dx'\, dy', \tag{138}$$

l'intégrale double s'étendant à l'aire σ. Nous savons que

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = K^2. \tag{139}$$

Soit

$$w(x, y) = w_0(x, y) + w_1(x, y). \tag{140}$$

Le problème se ramènera à déterminer $w_1(x, y)$; mais, selon les égalités

(132 *bis*) et (139), $w_1(x, y)$ vérifiera, en tout point de l'aire σ, l'équation de Laplace

(141) $$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0,$$

tandis qu'en vertu des égalités (135 *bis*) et (140), on aura, en tout point de la ligne L,

(142) $$\frac{\partial w_1}{\partial n_i} + \frac{f}{\mu} w_1 = \frac{\mathfrak{G}}{\mu} - \frac{f}{\mu} w_0 - \frac{\partial w_0}{\partial n_i},$$

égalité où le second membre a une valeur connue en tout point de la ligne L.

Dans le cas où l'aire σ est une aire simplement connexe et convexe, le problème ainsi posé rentre comme cas particulier dans un problème que M. Zaremba [1] a complètement résolu en suivant les méthodes de M. H. Poincaré.

D'ailleurs, il est aisé de voir que ce problème est, en toutes circonstances, déterminé, c'est-à-dire qu'il ne peut comporter plus d'une solution. Supposons, en effet, qu'il en comporte deux distinctes, $w_1(x, y)$ et $w'_1(x, y)$ et posons

(143) $$W_1(x, y) = w'_1(x, y) - w_1(x, y).$$

Selon (141), les fonctions w_1, w'_1 vérifient l'équation de Laplace en tout point de l'aire σ; il en est donc de même de leur différence W_1, ce qui permet d'écrire

(144) $$\int_L W_1 \frac{\partial W_1}{\partial n_i} dL + \int_\sigma \left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\sigma = 0.$$

D'autre part, selon l'égalité (142), on a, en tout point de la ligne L,

$$\frac{\partial W_1}{\partial n_i} + \frac{f}{\mu} W_1 = 0.$$

L'égalité (144) peut donc s'écrire

$$\int_\sigma \left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\sigma - \frac{f}{\mu} \int W_1^2 \, dL = 0.$$

Si l'on observe que $\frac{f}{\mu}$ est essentiellement négatif, on voit que cette égalité exige que l'on ait

$$W_1 = 0$$

---

[1] S. Zaremba, *Sur l'équation aux dérivées partielles* $\Delta u + \xi u + f = 0$ *et sur les fonctions harmoniques* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. XVI, 1899, p. 435

en tout point du contour L et

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial W_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial W_1}{\partial z} = 0,$$

en tout point de l'aire σ; il en résulte que la fonction $W_1(x, y)$ est nulle en tout point de l'aire σ et que les deux fonctions $w_1(x, y)$, $w'_1(x, y)$ y sont identiques, ce qui démontre le théorème énoncé.

La proposition que nous venons d'établir justifie l'emploi de méthodes synthétiques pour trouver, dans chaque cas particulier, la valeur de $w(x, y)$.

Nous nous contenterons de traiter le cas très simple et bien connu où le tuyau a la forme d'un cylindre droit, à base circulaire, de rayon R. Dans ce cas, si nous désignons par r la distance du point (x, y) à l'axe du cylindre, w deviendra une simple fonction de r qui vérifiera l'équation

$$\text{(145)} \qquad \frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw(r)}{dr} = K^2,$$

transformée de l'équation (132 *bis*); l'intégrale générale de cette équation est

$$w(r) = \frac{K^2}{4} r^2 + B \log r + A,$$

A et B étant deux constantes arbitraires; mais comme $w(r)$ doit demeurer fini pour $r = 0$, il nous faut prendre $B = 0$ et

$$\text{(146)} \qquad w(r) = \frac{K^2}{4} r^2 + A.$$

Exprimant alors que la condition (135 *bis*) est vérifiée pour $r = R$, nous trouvons

$$A = -\frac{K^2 R}{2}\left(\frac{R}{2} - \frac{\mu}{f}\right) - \frac{\mathfrak{G}}{f}$$

et, par conséquent,

$$\text{(147)} \qquad w(r) = -\frac{K^2}{4}(R^2 - r^2) + \frac{K^2 \mu R}{2f} - \frac{\mathfrak{G}}{f}.$$

Si, dans cette formule, on suppose égal à 0 le coefficient de frottement $\mathfrak{G}$, on retrouve le résultat obtenu par Navier.

La vitesse le long de la paroi ($r = R$) a pour valeur

$$\text{(148)} \qquad w(R) = \frac{K^2 \mu R}{2f} - \frac{\mathfrak{G}}{f}.$$

En même temps, la troisième égalité (134) nous donne

$$(149) \qquad p_z = -\frac{K^2 \mu R}{2}.$$

Supposons que l'on donne à la quantité K^2 des valeurs de plus en plus petites, de telle sorte que $K^2 \mu R$, tout en demeurant supérieur à $-2\mathfrak{G}$, tende vers $-2\mathfrak{G}$; $w(R)$, tout en restant négatif, tendra vers o; en même temps, p_z tendra vers $\mathfrak{G}$.

Si nous supposons que $K^2 \mu R$, continuant à décroître, devienne inférieur à $-2\mathfrak{G}$, il ne pourra plus y avoir glissement le long des parois du tube; en effet, s'il y avait glissement, p_z deviendrait, en valeur absolue, inférieur à $-\mathfrak{G}$; en même temps, la formule (148) donnerait pour $w(R)$ une valeur négative que nous savons inacceptable.

Il est aisé d'expliciter davantage la condition limite que nous venons d'obtenir dans le cas où l'on suppose le fluide soumis seulement aux actions capillaires et à la pesanteur.

A l'intérieur du tube supposé illimité, V_i aura la même valeur tout le long d'une même parallèle à O_z; il en sera de même de la partie V_e qui provient des actions capillaires; dès lors, si l'on désigne par α l'angle que les génératrices du cylindre font avec l'horizon et par g l'accélération de la pesanteur, les égalités (101) et (136) donneront

$$(150) \qquad K^2 = \frac{\rho}{\mu} g \sin\alpha + \frac{\Pi_1 - \Pi_0}{\mu(z_1 - z_0)}.$$

Donc, tant que l'on aura

$$(151) \qquad \frac{1}{2} R\left(\rho g \sin\alpha + \frac{\Pi_1 - \Pi_0}{z_1 - z_0}\right) > -\mathfrak{G},$$

le fluide glissera sur la paroi solide; mais si l'on a

$$(151\ bis) \qquad \frac{1}{2} R\left(\rho g \sin\alpha + \frac{\Pi_1 - \Pi_0}{z_1 - z_0}\right) < -\mathfrak{G},$$

le fluide demeurera soudé à la paroi solide.

Étudions donc maintenant le régime permanent qui s'établit dans le cas où le fluide demeure adhérent à la paroi solide.

$w(x, y)$ continuera à vérifier l'équation aux dérivées partielles (132 *bis*) en tout point de la section droite σ; mais, en tout point du contour L, on aura

$$(152) \qquad w(x, y) = 0.$$

La détermination de w est alors ramenée à un problème connu qui n'admet

qu'une solution. Il est aisé de voir que cette solution est négative en tout point de l'aire ϖ; en effet, si elle était positive en quelque partie de cette aire, elle admettrait une limite supérieure positive; cette limite ne pourrait être atteinte le long de la ligne L où w est nul; la fonction w présenterait donc un maximum à l'intérieur de l'aire ϖ, et nous avons vu que cette hypothèse était incompatible avec l'équation (132 *bis*).

La quantité que l'expérimentateur détermine, c'est la *vitesse moyenne*

$$U = \frac{1}{\sigma} \int w(x, y)\, d\sigma. \tag{153}$$

Si l'on multiplie K^2 par α et les dimensions de l'aire ϖ par un rapport de similitude β, il est clair que les égalités (132 *bis*) et (152) demeureront vérifiées pourvu que l'on multiplie $w(x, y)$ par $\alpha\beta^2$; U sera multiplié par la même quantité; nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Pour un même liquide et pour des tubes de même substance ayant des sections semblables, la vitesse moyenne est proportionnelle à $\dfrac{\Lambda_1 - \Lambda_0}{z_1 - z_0}$ *et au carré des dimensions de la section.*

C'est la loi découverte expérimentalement par Poiseuille.

Si le tube est à section circulaire, $w(x, y)$ devient une simple fonction de r, donnée encore par l'égalité (146); mais selon la condition (152), cette fonction doit s'annuler pour $r = R$, ce qui donne

$$w(r) = \frac{K^2}{4}(r^2 - R^2)$$

ou, plus explicitement, en vertu de l'égalité (150),

$$w(r) = \left[\frac{\rho g \sin\alpha}{4\mu} + \frac{\Pi_1 - \Pi_0}{4\mu(z_1 - z_0)}\right](r^2 - R^2). \tag{154}$$

C'est le résultat trouvé par Hagen, par Émile Mathieu, par M. Boussinesq (*voir*, au dernier Chapitre, l'historique de cette question).

L'analyse précédente s'accorde fort bien avec les faits d'expérience; elle est d'ailleurs complète si nous assimilons l'adhérence du liquide au solide à une condition de liaison. Mais, si nous ne faisions pas cette assimilation, nous serions conduits à adjoindre aux conditions déjà invoquées la condition suivante, qui entraînerait une impossibilité :

Pour que le fluide adhère à la paroi du tube, il ne suffit pas que la fonction w vérifie la condition (152) en tous les points de la ligne L; il faut encore que le vecteur dont p_x, p_y, p_z sont les composantes soit normal à la paroi du tube, ce

qui, en vertu des égalités (134), s'exprime par l'égalité

$$(155) \qquad \mu \frac{\partial w}{\partial n_i} = 0$$

vérifiée en tous les points de la ligne L.

Si le fluide n'est pas un fluide parfait, μ est positif et l'égalité (155) devient

$$(155\ bis) \qquad \frac{\partial w}{\partial n_i} = 0.$$

Or, il est impossible que cette égalité soit vérifiée en tout point de la ligne L, car on aurait

$$\int_L \frac{\partial w}{\partial n_i} dL = -\int_\sigma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) d\sigma = 0,$$

ce qui est incompatible avec l'égalité (132 *bis*), à moins que l'on ait

$$(156) \qquad K^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Lambda_0 = \Lambda_1.$$

Mais, dans ce cas, les conditions (132 *bis*) et (152) donnent, en tout point, $w = 0$, ce qui ne saurait nous étonner, puisque la condition (156) est la condition d'équilibre du fluide.

Le problème de l'écoulement permanent par filets parallèles nous montre donc que l'on doit, sous peine de se heurter à une impossibilité, traiter l'adhérence du liquide à la paroi solide comme une condition de liaison.

§ 5. — Fluide visqueux compris entre deux plans parallèles.

Deux plans solides, $z = 0$ et $z = h$, sont parallèles et maintenus à une distance invariable l'un de l'autre; le premier est immobile, le second se meut parallèlement à Ox avec une vitesse uniforme U. Entre ces deux plans se trouve un liquide visqueux. On suppose que ce liquide soit parvenu à un régime permanent tel que tous les points matériels se meuvent parallèlement à Ox et l'on se propose d'étudier ce mouvement.

Les égalités

$$v = 0, \qquad w = 0,$$

jointes à l'équation de continuité, exigent que u soit indépendant de x; u est aussi indépendant de t, puisque le régime est permanent; u ne peut donc dépendre que de y et de z; par raison de symétrie, il ne dépendra que de z. Les deux dernières équations (100) donnent

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0,$$

en sorte que A ne dépend que de x. La première équation (100) devient

$$\frac{dA}{dx} - \frac{\mu}{\rho}\frac{d^2 u}{dz^2} = 0.$$

Elle nous enseigne, en premier lieu, que A *est une fonction linéaire de x*, en sorte que

$$\frac{dA}{dx} = \frac{A' - A}{x' - x}.$$

Elle nous enseigne, en second lieu, que *u est une fonction du second degré de z*, en sorte que

$$u = \frac{\rho(A' - A)}{2\mu(x' - x)} z^2 + \mathrm{A} z + \mathrm{B}, \tag{157}$$

A et B étant deux constantes qui devront être déterminées par les conditions aux limites.

Supposons, tout d'abord, que le fluide glisse sur les plans entre lesquels il est compris; soient u_0 sa vitesse le long du plan $z = 0$ et u_1 sa vitesse le long du plan $z = h$.

Les conditions (80) se réduisent ici à

$$-p_x = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|u_0|}\right) u_0 \qquad \text{pour} \qquad z = 0,$$

$$-p_x = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|\mathrm{U} - u_1|}\right)(u_1 - \mathrm{U}) \qquad \text{pour} \qquad z = h.$$

Mais nous avons, en vertu des égalités (57) de la Ire Partie de ces *Recherches*,

$$p_x = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \text{pour} \qquad z = 0,$$

$$p_x = -\mu \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \text{pour} \qquad z = h.$$

Nos conditions aux limites sont donc

$$\left\{\begin{array}{ll} \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|u_0|}\right) u_0 + \mu \frac{\partial u}{\partial z} = 0 & \text{pour} \quad z = 0, \\ \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|\mathrm{U} - u_1|}\right)(\mathrm{U} - u_1) + \mu \frac{\partial u}{\partial z} = 0 & \text{pour} \quad z = h. \end{array}\right. \tag{158}$$

Ces conditions détermineront les constantes A et B de la formule (157).

Traitons le cas très simple où A est indépendant de x. C'est ce qui arrive, par

raison de symétrie, si les deux plans sont supposés horizontaux et si les seules forces agissantes sont la pesanteur et les actions capillaires.

La formule (157) se réduit alors à

$$u = Az + B \tag{157 bis}$$

et les conditions (158) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|B|}\right) B + \mu A = 0,\\ &\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|U - Ah - B|}\right)(U - Ah - B) + \mu A = 0. \end{aligned}\right. \tag{158 bis}$$

Ces conditions nous enseignent que les trois quantités

$$A,\quad B,\quad U - Ah - B$$

sont de même signe, car f et $\mathfrak{G}$ sont négatifs, tandis que μ est positif.

Nous pouvons toujours supposer que U soit positif. Alors nous voyons sans peine que la condition précédente exige que A et B soient positifs. Les conditions (158 *bis*) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &fB + \mathfrak{G} + \mu A = 0,\\ &f(U - Ah - B) + \mathfrak{G} + \mu A = 0. \end{aligned}\right. \tag{159}$$

Elles donnent

$$\left\{\begin{aligned} A &= -\frac{2\mathfrak{G} + fU}{2\mu - fh},\\ B &= \frac{\mathfrak{G}h + \mu U}{2\mu - fh} \end{aligned}\right. \tag{160}$$

et, par conséquent,

$$u = -\frac{(2\mathfrak{G} + fU)z - \mathfrak{G}h - \mu U}{2\mu - fh}. \tag{161}$$

Mais cette solution n'est acceptable que si les égalités (159) peuvent être substituées aux égalités (158 *bis*), ce qui exige que l'on ait

$$B > 0, \qquad U - Ah - B > 0.$$

Si l'on tient compte de la seconde égalité (160) et si l'on observe que, selon les mêmes égalités (160),

$$U - Ah - B = \frac{\mathfrak{G}h + \mu U}{2\mu - fh},$$

on voit que cette double inégalité équivaut à l'inégalité unique

$$\text{(162)} \qquad U > -\frac{\mathfrak{E} h}{\mu}.$$

Si donc on a

$$\text{(162 *bis*)} \qquad U < -\frac{\mathfrak{E} h}{\mu},$$

il est impossible d'admettre que le fluide glisse sur les deux plans entre lesquels il est contenu. On est obligé d'admettre qu'il adhère à ces plans, ce qui donne

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0,$$
$$u = U \quad \text{pour} \quad z = h$$

et, par conséquent,

$$B = 0, \qquad A = \frac{U}{h},$$

$$\text{(163)} \qquad u = \frac{U}{h} z.$$

Mais, en outre, si l'on n'assimilait pas à une liaison l'adhérence du liquide au solide, on devrait avoir, pour $z = 0$ aussi bien que pour $z = h$, $p_x = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, ce qui est impossible, car l'égalité (163) donne

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{U}{h}.$$

Nous rencontrerions donc ici une impossibilité semblable à celle qui nous a arrêtés au paragraphe précédent lorsque nous avons examiné les conséquences de la même hypothèse.

§ 6. — Fluide compris entre deux cylindres de révolution de même axe et animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de cet axe.

Nous allons examiner un dernier exemple, très simple, et dont l'intégration peut être menée jusqu'au bout.

Une surface cylindrique indéfinie C_0, de révolution autour de l'axe des z, enferme à son intérieur un autre cylindre C_1, également de révolution autour de l'axe des z. Chacun des deux cylindres est homogène. Le cylindre C_0 est immobile, tandis que le cylindre C_1 est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des z; Ω_1 est la vitesse angulaire de ce mouvement.

Entre les deux surfaces C_0, C_1 se trouve un liquide visqueux. La position d'un point de ce liquide peut être repérée au moyen des coordonnées rectangulaires x,

y, z ou bien au moyen des coordonnées cylindriques r, ϑ, z. Le passage d'un système de coordonnées à l'autre est assuré par les formules

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta,$$

qui donnent

$$(164) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\vartheta, & &\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\vartheta, \\ &\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = -\frac{\sin\vartheta}{r}, & &\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = \frac{\cos\vartheta}{r}. \end{aligned} \right.$$

Nous supposerons que la fonction potentielle V_e des actions extérieures et que la fonction potentielle V_i des actions intérieures sont uniformes dans tout le fluide et indépendantes de ϑ : c'est ce qui aura lieu, en particulier, si le fluide est soumis à la pesanteur, supposée parallèle à Oz, et aux actions capillaires.

La pression Π étant essentiellement uniforme, il en sera de même de la quantité

$$(101) \qquad \Lambda = \frac{\Pi}{\rho} - V_i - V_e.$$

Il semble évident que le mouvement d'un pareil fluide tendra vers un régime permanent dans lequel chaque élément fluide sera animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de Oz; en outre, la vitesse Θ de ce mouvement sera indépendante de ϑ et de z.

Étudions ce régime permanent.

Nous aurons, en ce régime,

$$(165) \qquad u = -\Theta\sin\vartheta, \qquad v = \Theta\cos\vartheta, \qquad w = 0.$$

Les égalités (164) et (165) donnent

$$(166) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\frac{\Theta}{r} - \frac{d\Theta}{dr}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\Theta}{r}\cos^2\vartheta - \frac{d\Theta}{dr}\sin^2\vartheta, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\Theta}{r}\sin^2\vartheta - \frac{d\Theta}{dr}\cos^2\vartheta, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\left(\frac{\Theta}{r} - \frac{d\Theta}{dr}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta. \end{aligned} \right.$$

L'équation de continuité, réduite à

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

est vérifiée d'elle-même.

Les égalités (164) et (166) donnent sans peine

$$(167)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\left(\dfrac{d^2\Theta}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d\Theta}{dr}-\dfrac{\Theta}{r^2}\right)\sin\vartheta,\\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\quad\left(\dfrac{d^2\Theta}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d\Theta}{dr}-\dfrac{\Theta}{r^2}\right)\cos\vartheta.\end{cases}$$

Les égalités (164) donnent aussi

$$(168)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Lambda}{\partial x}=\dfrac{\partial\Lambda}{\partial r}\cos\vartheta-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\vartheta}\sin\vartheta,\\[2ex] \dfrac{\partial\Lambda}{\partial y}=\dfrac{\partial\Lambda}{\partial r}\sin\vartheta+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\vartheta}\cos\vartheta.\end{cases}$$

Enfin l'accélération de chaque élément fluide a pour grandeur $\dfrac{\Theta^2}{r}$ et sa direction est opposée à celle du rayon vecteur r; on a donc

$$(169)\quad \begin{cases} \gamma_x=-\dfrac{\Theta^2}{r}\cos\vartheta,\\[2ex] \gamma_y=-\dfrac{\Theta^2}{r}\sin\vartheta,\\[2ex] \gamma_z=0.\end{cases}$$

Les équations (100 *bis*) deviennent donc

$$(170)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Lambda}{\partial r}\cos\vartheta-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\vartheta}\sin\vartheta-\dfrac{\Theta^2}{r}\cos\vartheta+\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{d^2\Theta}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d\Theta}{dr}-\dfrac{\Theta}{r^2}\right)\sin\vartheta=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\Lambda}{\partial r}\sin\vartheta+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\vartheta}\cos\vartheta-\dfrac{\Theta^2}{r}\sin\vartheta-\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{d^2\Theta}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d\Theta}{dr}-\dfrac{\Theta}{r^2}\right)\cos\vartheta=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\Lambda}{\partial z}=0.\end{cases}$$

Les deux premières égalités (170) donnent sans peine

$$(171)\quad \frac{\partial\Lambda}{\partial r}-\frac{\Theta^2}{r}=0,$$

$$(172)\quad \frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial\vartheta}-\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{d^2\Theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Theta}{dr}-\frac{\Theta}{r^2}\right)=0.$$

Au premier membre de l'égalité (172), le second terme est indépendant de ϑ : Λ ne pourrait donc dépendre de θ que s'il en était fonction linéaire; mais alors Λ ne pourrait pas être, comme il le doit, fonction uniforme de x et de y; Λ est

donc indépendant de θ. L'équation (172) se réduit à

$$\frac{d^2\Theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Theta}{dr} - \frac{\Theta}{r^2} = 0, \tag{173}$$

tandis que l'équation (171) devient

$$\frac{d\,A(r)}{dr} = \frac{\Theta^2}{r}. \tag{171 bis}$$

L'équation différentielle (171 *bis*) a déjà été rencontrée, dans la question qui nous occupe, par M. Max Margules ([1]) et par M. N. Petroff ([2]).

L'intégrale générale de cette équation est

$$\Theta = \frac{A}{r} + Br, \tag{174}$$

A et B étant deux constantes.

Les égalités (166) deviennent, moyennant cette égalité (174),

$$(175)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2A}{r^2}\sin\theta\cos\theta, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{A}{r^2}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - B, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{A}{r^2}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + B, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{2A}{r^2}\sin\theta\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Nous aurons, d'ailleurs,

$$\begin{aligned} p_x &= \mu\left[2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right], \\ p_y &= \mu\left[\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\beta\frac{\partial v}{\partial y}\right], \\ p_z &= 0 \end{aligned}$$

([1]) Max Margules, *Ueber die Bestimmung der Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus ebenen Bewegungen einer Flussigkeit* (*Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Wien*, Bd. LXXXIII, Abth. II, 1881, p. 12).

([2]) N. Petroff, *Neue Theorie der Reibung*. Hambourg et Leipzig, 1887, p. 95.

ou bien, en vertu des égalités (175),

$$(176)\quad \begin{cases} p_x = \dfrac{2\mu A}{r^2}[2\sin\theta\cos\theta\alpha + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\beta], \\ p_y = \dfrac{2\mu A}{r^2}[2\sin\theta\cos\theta\beta + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\alpha], \\ p_z = 0. \end{cases}$$

Si nous désignons par q la projection du vecteur (p_x, p_y, p_z) sur la direction de la vitesse Θ, nous avons

$$q = -p_x \sin\theta + p_y \cos\theta$$

ou, en vertu des égalités (176),

$$(177)\quad q = \frac{2\mu A}{r^2}[-2\sin\theta\cos\theta(\beta\cos\theta + \alpha\sin\theta) + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)].$$

En un point du cylindre C_0, dont R_0 est le rayon, on a

$$r = R_0, \qquad \alpha = -\cos\theta, \qquad \beta = -\sin\theta,$$

$$(178)\quad q_0 = \frac{2\mu A}{R_0^2}.$$

En un point du cylindre C_1, dont R_1 est le rayon, on a

$$r = R_1, \qquad \alpha = \cos\theta, \qquad \beta = \sin\theta,$$

$$(178\ bis)\quad q_1 = -\frac{2\mu A}{R_1^2}.$$

Supposons d'abord que le liquide glisse sur chacun des deux cylindres que, pour simplifier, nous supposerons de même nature.

Le cylindre C_0 est immobile; la vitesse relative du fluide par rapport à cette paroi se réduit à

$$(179)\quad \Theta_0 = \frac{A}{R_0} + BR_0.$$

On aura donc, en vertu de l'égalité (178), en tout point du cylindre C_0,

$$(180)\quad \frac{2\mu A}{R_0^2} = -\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|\Theta_0|}\right)\left(\frac{A}{R_0} + BR_0\right).$$

La vitesse avec laquelle tourne un point de la surface C_1 est $\Omega_1 R_1$. La vitesse

relative du fluide par rapport au solide est

$$(179\,bis)\qquad \Theta_1 - \Omega_1 R_1 = \frac{A}{R_1} + (B - \Omega_1) R_1.$$

On doit donc avoir, en vertu de l'égalité (178 *bis*), en tout point du cylindre C_1,

$$(180\,bis)\qquad \frac{2\mu A}{R_1^2} = -\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|\Omega_1 R_1 - \Theta_1|}\right)\left[-\frac{A}{R_1} + (\Omega_1 - B) R_1\right].$$

Les égalités (180) et (180 *bis*) nous enseignent que les deux quantités Θ_0 et $(\Omega_1 R_1 - \Theta_1)$ sont toutes deux de même signe et que ce signe est le signe de A. Supposons que ce signe soit le signe +. Les égalités (180) et (180 *bis*) donneront les deux égalités

$$(181)\qquad \begin{cases} \dfrac{2\mu A}{R_0^2} = -f\left(\dfrac{A}{R_0} + BR_0\right) - \mathfrak{G}, \\ \dfrac{2\mu A}{R_1^2} = \quad f\left[\dfrac{R_1}{A} - (\Omega_1 - B) R_1\right] - \mathfrak{G}, \end{cases}$$

qui déterminent A et B et donnent, en particulier,

$$(182)\qquad A = -\frac{[(\mathfrak{G} + f\Omega_1 R_1) R_0 + \mathfrak{G} R_1] R_0^2 R_1^2}{2\mu(R_0^3 + R_1^3) - f(R_0^2 - R_1^2) R_0 R_1}.$$

Le dénominateur de cette expression est assurément positif, car on a

$$\mu > 0, \qquad f < 0, \qquad R_0 > R_1.$$

Mais l'usage des égalités (181) et (182) n'est légitime que si l'on a les inégalités

$$A > 0, \qquad \Theta_0 > 0, \qquad \Omega_1 R_1 - \Theta_1 > 0$$

qui, en vertu de l'inégalité $f < 0$ et des égalités (181), exigent que l'on ait les inégalités

$$A > 0, \qquad \frac{2\mu A}{R_0^2} + \mathfrak{G} > 0, \qquad \frac{2\mu A}{R_1^2} + \mathfrak{G} > 0.$$

De ces trois inégalités, la seconde, en vertu des conditions $\mathfrak{G} < 0$, $R_0 > R_1$, entraîne les deux autres; d'ailleurs, en vertu de l'égalité (182), cette seconde condition devient

$$\mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)(2\mu - fR_1) - 2\mu f\Omega_1 R_1^3 > 0$$

ou bien

$$(183)\qquad \Omega_1 > \frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\,\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^3}\,(2\mu - fR_1).$$

Si, dans les conditions (180) et (180 *bis*), nous avions supposé que le signe commun de A, de Θ_0 et de $(\Omega_1 R_1 - \Theta_1)$ fût le signe —, nous aurions obtenu, pour déterminer A et B, les conditions

$$(181\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{2\mu A}{R_0^2} &= -f\left(\frac{A}{R_0} + BR_0\right) + \mathfrak{G}, \\ \frac{2\mu A}{R_1^2} &= \quad f\left[\frac{A}{R_1} - (\Omega_1 - B)R_1\right] + \mathfrak{G}. \end{aligned}\right.$$

Mais, pour que l'usage de ces deux inégalités fût légitime, il faudrait que l'on eût

$$(183\ bis)\qquad \Omega_1 < -\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\,\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2}(2\mu - fR_1).$$

Lors donc que l'on a

$$(184)\qquad -\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\,\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2}(2\mu - fR_1) \leqq \Omega_1 \leqq \frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\,\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2}(2\mu - fR_1),$$

le liquide ne peut glisser sur les deux cylindres C_0, C_1 ; *il adhère au moins à l'un d'entre eux.*

La condition (184) étant vérifiée, peut-il arriver que le fluide adhère au cylindre C_1 et glisse sur le cylindre C_0 ?

L'égalité (179 *bis*) nous donnerait alors la première relation

$$(185)\qquad \frac{A}{R_1} + BR_1 + \Omega_1 R_1,$$

à laquelle il faudrait continuer de joindre la relation

$$(180)\qquad \frac{2\mu A}{R_0^2} = -\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|\Theta_0|}\right)\left(\frac{A}{R_0} + BR_0\right).$$

Comme f et $\mathfrak{G}$ sont tous deux négatifs, cette égalité (180) montre que A et $\Theta_0 = \frac{A}{R_0} + BR_0$ sont de même signe. Supposons d'abord que ces quantités soient positives. Alors, à l'équation (180), nous pourrons substituer l'équation

$$(186)\qquad \frac{2\mu A}{R_0^2} = -f\left(\frac{A}{R_0} + BR_0\right) - \mathfrak{G}.$$

Les égalités (185) et (186) déterminent A et B; elles donnent, en particulier,

$$(187)\qquad A = -\frac{(\mathfrak{G} + f\Omega_1 R_0)R_0^2 R_1^2}{2\mu R_1^2 - f(R_0^2 - R_1^2)R_0}.$$

Mais cette solution n'est acceptable que si elle donne pour A et pour $\Theta_0 = \frac{A}{R_0} + BR_0$ des valeurs positives; or, selon l'égalité (186), elle donne à Θ_0 le même signe qu'à $\frac{2\mu A}{R_0^2} + \mathfrak{C}$ et, comme $\mathfrak{C}$ est négatif, cette dernière quantité ne peut être positive que si A est positif. Donc, pour que la précédente solution soit acceptable, il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition

$$(188) \qquad \frac{2\mu A}{R_0^2} + \mathfrak{C} > 0.$$

En vertu de l'expression (187) de A, expression dont le dénominateur est essentiellement positif, cette inégalité devient

$$-f[2\mu\Omega_1 R_1^2 + \mathfrak{C}(R_0^2 - R_1^2)] > 0,$$

ou bien, puisque f est essentiellement négatif,

$$(189) \qquad \Omega_1 > -\frac{\mathfrak{C}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^2}.$$

Si nous avions supposé que le signe commun de A et de Θ_0 fût le signe —, nous aurions obtenu, pour déterminer A et B, les équations

$$(185) \qquad \frac{A}{R_1} + BR_1 = \Omega_1 R_1,$$

$$(186\ bis) \qquad \frac{2\mu A}{R_0^2} = -f\left(\frac{A}{R_0} + BR_0\right) + \mathfrak{C}.$$

Mais, pour que cette solution fût valable, il faudrait que l'on eût

$$(189\ bis) \qquad \Omega_1 < \frac{\mathfrak{C}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1}.$$

La quantité $\frac{\mathfrak{C}}{f}\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2}$ étant assurément positive, on a

$$(190) \qquad \frac{\mathfrak{C}}{2\mu f}\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2}(2\mu - fR_1) > -\frac{\mathfrak{C}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^2}.$$

On peut donc trouver des valeurs de Ω_1 qui vérifient à la fois la condition (184) et l'une des conditions (189) ou (189 *bis*).

Lors donc que l'on a ou bien

$$(191) \qquad -\frac{\mathfrak{C}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^2} < \Omega_1 < \frac{\mathfrak{C}}{2\mu f}\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^2}(2\mu - fR_1)$$

ou bien

$$(191 \textit{ bis}) \qquad -\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_1^3}(2\mu-fR_1) < \Omega_1 < \frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_1^2},$$

le liquide ne peut glisser à la fois sur les deux cylindres C_0, C_1; *mais il peut adhérer au cylindre* C_1 *et glisser sur le cylindre* C_0. *Au contraire, ce régime est impossible si l'on a la condition*

$$(192) \qquad \frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_1^2} \leqq \Omega_1 \leqq -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_1^2},$$

qui entraîne la condition (184).

La condition (184) étant vérifiée, peut-il arriver que le liquide glisse sur le cylindre C_1 et adhère au cylindre C_0?

Les équations qui doivent déterminer A et B sont alors

$$(193) \qquad \frac{A}{R_0} + BR_0 = 0,$$

$$(180 \textit{ bis}) \qquad \frac{2\mu A}{R_1^2} = -\left[f + \frac{\mathfrak{G}}{|\Omega_1 R_1 - \Theta_1|}\right]\left(\Omega_1 R_1 - \frac{R_1}{A} - BR_1\right).$$

En raisonnant comme dans le cas précédent, nous trouverons que, pour que ces conditions déterminent des valeurs acceptables de A et de B, il faut et il suffit que l'on ait ou bien

$$(194) \qquad \Omega_1 > -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2},$$

ou bien

$$(194 \textit{ bis}) \qquad \Omega_1 < \frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2}.$$

D'ailleurs, on a

$$(195) \qquad -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2} < -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_1^2},$$

et, *a fortiori*, selon l'inégalité (190),

$$(196) \qquad -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2} < \frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_1^3}(2\mu-fR_1).$$

Les conditions (194) et (194 *bis*) sont donc compatibles avec la condition (184), et nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

Lorsque l'on a ou bien

$$(197)\qquad -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2}<\Omega_1<\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_1^3}(2\mu-fR_1)$$

ou bien

$$(197\ bis)\qquad -\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_1^2}(2\mu-fR_1)<\Omega_1<\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2},$$

le liquide peut adhérer au cylindre C_0 *et glisser sur le cylindre* C_1; *lorsque l'on a, au contraire,*

$$(198)\qquad \frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2}\leqq\Omega_1\leqq-\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2},$$

le liquide adhère forcément aux deux cylindres.

Dans ce dernier cas, les constantes A et B sont déterminées par les inégalités

$$(199)\qquad \frac{A}{R_1}+BR_1=\Omega_1R_1,\qquad \frac{A}{R_0}+BR_0=0.$$

En résumé, lorsque l'on a

$$(200)\qquad |\Omega_1|>\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_1^2}(2\mu-fR_1),$$

le liquide glisse sur les deux cylindres.

Lorsque l'on a

$$(201)\qquad -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_1^2}<|\Omega_1|\leqq\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_1^2}(2\mu-fR_1),$$

le liquide est susceptible de deux régimes permanents distincts; en l'un des régimes, il adhère au cylindre C_1 *et glisse sur le cylindre* C_0; *en l'autre, il adhère au cylindre* C_0 *et glisse sur le cylindre* C_1.

Lorsque l'on a

$$(202)\qquad -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2}<|\Omega_1|\leqq-\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_1^2},$$

le liquide adhère au cylindre C_0 *et glisse sur le cylindre* C_1.

Enfin, lorsque l'on a

$$(203)\qquad |\Omega_1|\leqq-\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2},$$

le liquide adhère aux deux cylindres C_0, C_1.

Considérons un corps qui présente, avec les corps voisins, des liaisons bilatérales, accompagnées de viscosité et de frottement; imaginons que ce corps éprouve une modification réelle ou virtuelle; soient :

δU_1 la variation que subit son énergie interne;
$d\mathfrak{T}_{e1}$ le travail virtuel des actions extérieures qui lui sont appliquées;
$d\mathfrak{T}_{j1}$ le travail virtuel des forces d'inertie;
$d\mathfrak{T}_{l1}$ le travail des actions fictives de liaison, définies à la manière de Lagrange, qui s'exercent à sa surface.

La quantité de chaleur dQ_1 que dégage le corps considéré est *définie* par l'égalité

$$(204) \qquad E\,dQ_1 = -E\,\delta U_1 + d\mathfrak{T}_{e1} + d\mathfrak{T}_{j1} + d\mathfrak{T}_{l1}.$$

Supposons que nous ayons affaire à une masse fluide 1, limitée, d'une part, par une surface s_1 le long de laquelle elle est *soudée* aux corps voisins, fluides ou solides, et, d'autre part, par une surface S le long de laquelle elle glisse, avec viscosité et frottement, sur un autre corps 2.

Selon ce que nous avons vu au Chapitre II, les actions de liaison qui doivent figurer dans le calcul de $d\mathfrak{T}_l$ se composent :

1° D'une pression, de composantes ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z, appliquée en chaque point de la surface s_1;

2° D'une pression ϖ, normale à la surface S et dirigée vers l'intérieur du fluide 1, appliquée en chaque point de la surface S.

Si, comme nous l'avons fait au Chapitre II, nous désignons par N la normale à la surface S dirigée de 1 vers 2, nous aurons

$$(205) \qquad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_{l1} = &-\int \varpi[\cos(N, x)\,\delta x_1 + \cos(N, y)\,\delta y_1 + \cos(N, z)\,\delta z_1]\,dS \\ &+ \int (\varpi_x\,\delta x_1 + \varpi_y\,\delta y_1 + \varpi_z\,\delta z_1)\,ds_1. \end{aligned}$$

Le milieu auquel le corps 1 est soudé le long de la surface s_1 peut être fluide; ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z sont alors donnés par les équations (71); il peut être solide; ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z sont alors donnés par les équations (87), qui ont même forme que les égalités (71). En toutes circonstances, l'égalité (205) peut s'écrire

$$(206) \qquad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_{l1} = &-\int \varpi[\cos(N, x)\,\delta x_1 + \cos(N, y)\,\delta y_1 + \cos(N, z)\,\delta z_1]\,dS \\ &+ \int (p_{x1}\,\delta x_1 + p_{y1}\,\delta y_1 + p_{z1}\,\delta z_1)\,ds_1 \\ &+ \int \Pi_1[\cos(n_i, x)\,\delta x_1 + \cos(n_i, y)\,\delta y_1 + \cos(n_i, z)\,\delta z_1]\,ds_1, \end{aligned}$$

n_i étant la normale à la surface s_1, vers l'intérieur du corps 1.

Rien n'empêche de supposer que le milieu auquel le fluide 1 est soudé le long de la surface s_1 ne soit la continuation du fluide 1 lui-même; la surface s_1 sera une surface quelconque tracée à l'intérieur du fluide 1.

Soient λ une quantité constamment positive, variable d'une manière continue le long de la surface S, donnée une fois pour toutes, et ε une quantité positive infiniment petite, la même en tout point de S. Par chaque point M de S élevons, vers l'intérieur du fluide 1, une normale $\mathrm{M}m_1$ de longueur $\delta = \varepsilon\lambda$. Prenons le lieu du point m_1 pour surface s_1.

Si nous considérons le point M et le point correspondant m_1, nous pourrons écrire les égalités

$$ds_1 = d\mathrm{S},$$

$$\delta x_1(m_1) = \delta x_1(\mathrm{M}_1), \qquad \delta y_1(m_1) = \delta y_1(\mathrm{M}_1), \qquad \delta z_1(m_1) = \delta z_1(\mathrm{M}_1),$$

$$\cos(n_i, x) = \cos(\mathrm{N}, x), \qquad \cos(n_i, y) = \cos(\mathrm{N}, y), \qquad \cos(n_i, z) = \cos(\mathrm{N}, z).$$

En chacune de ces égalités sont négligées des quantités de l'ordre du produit de ε par la grandeur écrite en l'un ou l'autre membre.

Lors donc que ε tend vers o, $d\mathfrak{T}_l$ a pour limite

$$d\mathfrak{T}_{l1} = \int \Big\{ \quad [p_{x1} + (\Pi_1 - \varpi)\cos(\mathrm{N}, x)]\,\delta x_1 + [p_{y1} + (\Pi_1 - \varpi)\cos(\mathrm{N}, y)]\,\delta y_1 + [p_{z1} + (\Pi_1 - \varpi)\cos(\mathrm{N}, z)]\,\delta z_1 \Big\}\, d\mathrm{S}.$$

Si nous tenons compte des égalités (56) et (57) et si nous observons que, dans ces égalités,

$$\cos(n_1, x) = -\cos(\mathrm{N}, x), \quad \cos(n_1, y) = -\cos(\mathrm{N}, y), \quad \cos(n, z) = -\cos(\mathrm{N}, z),$$

nous trouvons que $d\mathfrak{T}_l$ a pour limite, lorsque ε tend vers o,

$$(207) \quad d\mathfrak{T}_{l1} = -\int \Big\{ \Big(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\Big) [(u_1 - u_2)\,\delta x_1 + (v_1 - v_2)\,\delta y_1 + (w_1 - w_2)\,\delta z_1] \Big\}\, d\mathrm{S}.$$

D'autre part, lorsque ε tend vers o, chacune des quantités $\delta\mathrm{U}$, $d\mathfrak{T}_e$, $d\mathfrak{T}_i$ qui figurent dans l'égalité (204) tend vers o comme les produits $\varepsilon\,\delta x_1$, $\varepsilon\,\delta y_1$, $\varepsilon\,\delta z_1$. D'où la conclusion suivante :

En un fluide, on considère une couche infiniment mince qui confine à une partie de la surface limite; on suppose que, le long de cette surface, le fluide glisse avec viscosité et frottement sur les corps voisins. Lorsque l'épaisseur de cette couche tend vers o, *la quantité de chaleur qu'elle dégage en une modification virtuelle quelconque ne tend pas en général vers* o; *cette quan-*

tité a pour limite :

$$(208)\qquad dQ_1 = -\frac{1}{E}\int\left\{\left(f+\frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)[(u_1-u_2)\,\delta x_1+(v_1-v_2)\,\delta y_1+(w_1-w_2)\,\delta z_1]\right\}dS.$$

Par définition, *cette quantité est la* **quantité de chaleur dégagée par la viscosité et le frottement en la partie S de la surface limite du fluide 1.**

La formule (208), que nous venons d'obtenir en supposant que le corps 1 soit un fluide, est un cas particulier d'une formule plus générale, indépendante de la nature du corps 1. Pour établir cette formule générale, nous imposerons aux indices 1 et 2 une permutation qui nous sera commode dans la suite. Nous désignerons par 2 le corps dont nous étudions le dégagement de chaleur dQ_2, par 1 le corps sur lequel il glisse le long de la surface S, par s_2 la surface qui le soude à d'autres corps. dQ_2 sera donnée par l'égalité

$$(204\ bis)\qquad E\,dQ_2 = -E\,\delta U_2 + d\mathfrak{E}_{e_2} + d\mathfrak{E}_{j_2} + d\mathfrak{E}_{l_2}.$$

D'autre part, les équations du mouvement de ce corps 2 sont données par les principes généraux que nous avons posés ailleurs (1).

Soient :

$\delta_T\mathfrak{F}_2$ la variation virtuelle du potentiel interne $\mathfrak{F}_2$, prise en supposant toutes les températures invariables;

$d\mathfrak{E}_{v_2}$ le travail virtuel de la viscosité interne du corps 2, supposé dépourvu de frottement interne;

$d\mathfrak{E}_{w_2}$ le travail virtuel des viscosités de contact qui agissent le long de la surface terminale;

$d\mathfrak{E}_{\psi_2}$ le travail virtuel des frottements de contact le long de la même surface.

Les équations du mouvement du corps 2 sont condensées dans la formule

$$(209)\qquad d\mathfrak{E}_{e_2} + d\mathfrak{E}_{l_2} - \delta_T\mathfrak{F}_2 + d\mathfrak{E}_{j_2} + d\mathfrak{E}_{v_2} + d\mathfrak{E}_{w_2} + d\mathfrak{E}_{\psi_2} = 0.$$

Comparée à l'égalité (204 *bis*), cette égalité (209) donne

$$(210)\qquad E\,dQ_2 = \delta_T\mathfrak{F}_2 - E\,\delta U_2 - d\mathfrak{E}_{v_2} - d\mathfrak{E}_{w_2} - d\mathfrak{E}_{\psi_2}.$$

Supposons que le corps 2 se réduise à une couche infiniment mince, d'épaisseur δ, qui confine à la surface S; les quantités $\delta_T\mathfrak{F}_2$, δU_2, $d\mathfrak{E}_{v_2}$ tendront vers zéro avec ε;

(1) *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, Chapitre VI, § I, équations (223) (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5e série, t. II, 1896 et Paris, A. Hermann, 1896).

comme le long de la surface s_2 le corps 2 est soudé aux corps voisins, il n'y a le long de cette surface ni frottement de contact, ni viscosité de contact; $(d\mathfrak{T}_{w2} + d\mathfrak{T}_{\psi 2})$ est donc le travail virtuel des viscosités et frottements de contact qui agissent le long de la surface S; cette somme est indépendante de ε; en sorte que lorsque ε tend vers 0, dQ_2 a pour limite

$$dQ_2 = -\frac{1}{E}(d\mathfrak{T}_{w2} + d\mathfrak{T}_{\psi 2}). \tag{211}$$

En un corps quelconque, on considère une couche infiniment mince qui confine à la surface limite; on suppose que, le long de cette surface, le corps glisse avec viscosité et frottement sur les corps voisins. Lorsque l'épaisseur de cette couche tend vers 0, *la quantité de chaleur qu'elle dégage ne tend pas vers* 0; *elle a pour limite le quotient par l'équivalent mécanique de la chaleur du travail virtuel changé de signe du frottement de contact et de la viscosité de contact qui s'exercent sur le corps considéré, le long de la surface considérée.*

Les développements donnés au Chapitre II nous montrent que si le corps 1 est un fluide ou un solide isotrope, la valeur limite de dQ_2 est

$$dQ_2 = -\frac{1}{E}\int\left\{\left(f + \frac{\mathfrak{C}}{|r'|}\right)[(u_2 - u_1)\,\delta x_2 + (v_2 - v_1)\,\delta y_2 + (w_2 - w_1)\,\delta z_2]\right\}dS. \tag{208 bis}$$

§ 2. — La condition supplémentaire en une surface le long de laquelle deux corps glissent l'un sur l'autre.

Soit S une aire finie quelconque découpée en la surface par laquelle deux corps confinent l'un à l'autre et glissent l'un sur l'autre. A partir de cette aire, traçons, au sein des deux corps, les surfaces s_1, s_2, infiniment voisines de S, qui ont été considérées au paragraphe précédent.

Dans le temps dt, la masse matérielle comprise entre les surfaces s_1, s_2 et formée des couches 1 et 2 dégage réellement une quantité de chaleur dQ dont la théorie de la conductibilité fournit l'expression :

$$dQ = dt\int k_1 \frac{\partial T}{\partial n_i} ds_1 + dt\int k_2 \frac{\partial T}{\partial n_i} ds_2,$$

k_1 étant le coefficient de conductibilité du corps 1, k_2 le coefficient de conductibilité du corps 2, la normale n_i étant menée vers l'intérieur du corps 1 le long de la surface s_1, et vers l'intérieur du corps 2 le long de la surface s_2.

Lorsque ε tend vers o, cette quantité de chaleur a pour limite

$$(212) \qquad dQ = dt \int \left[k_1 \left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_1 - k_2 \left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_2 \right] dS.$$

Mais cette limite peut s'obtenir d'une autre manière; dQ est égal, en effet, à la somme $(dQ_1 + dQ_2)$ des quantités de chaleur réellement dégagées, dans le temps dt, par les couches 1 et 2; et les valeurs limites de dQ_1 et dQ_2 se tirent des égalités (208) et (208 *bis*) en y faisant

$$\delta x_1 = u_1\, dt, \qquad \delta y_1 = v_1\, dt, \qquad \delta z_1 = w_1\, dt,$$
$$\delta x_2 = u_2\, dt, \qquad \delta y_2 = v_2\, dt, \qquad \delta z_2 = w_2\, dt,$$

ce qui nous donne pour valeur de la *quantité de chaleur réellement dégagée, dans le temps dt, en une portion quelconque de la surface par laquelle deux corps glissent l'un sur l'autre, la valeur essentiellement positive*

$$(213) \qquad dQ = -\frac{dt}{E} \int \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right) [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2]\, dS$$
$$= -\frac{dt}{E} \int (f r'^2 + \mathfrak{G} |r'|)\, dS.$$

Les seconds membres des égalités (212) et (213) doivent être égaux entre eux, quelle que soit l'aire S découpée sur la surface de contact des deux corps; pour cela, il faut et il suffit *que l'on ait, en tout point de la surface le long de laquelle deux corps glissent l'un sur l'autre, et à tout instant, la relation*

$$(214) \quad k_1 \left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_1 - k_2 \left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_2 = \frac{1}{E} \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right) [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2] = 0$$

qui peut aussi s'écrire, en désignant par n_1, n_2, les deux demi-normales à la surface S dirigées l'une vers l'intérieur du corps 1, l'autre vers l'intérieur du corps 2,

$$(214\ bis) \quad k_1 \frac{\partial T}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial T}{\partial n_2} - \frac{1}{E} \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right) [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2] = 0.$$

Dans le cas où les corps 1 et 2 sont soudés entre eux le long de la surface S, on doit, comme nous le savons, faire

$$f = 0, \qquad \mathfrak{G} = 0.$$

L'égalité (213) devient alors

$$dQ = 0 \tag{215}$$

et l'égalité (214 *bis*) se réduit à

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial T}{\partial n_2} = 0. \tag{216}$$

Dans le cas où les deux corps en contact glissent l'un sur l'autre avec viscosité, mais sans frottement, nos diverses égalités prennent des formes que l'on obtient aisément en y faisant $\mathfrak{G} = 0$. Ces formes ont été données par G. Kirchhoff [1]. Il importait de les étendre au cas où il y a frottement et de les déduire rigoureusement de nos définitions générales de la quantité de chaleur dégagée par un système.

CHAPITRE V.

ÉTUDE HISTORIQUE SUR LES CONDITIONS VÉRIFIÉES AUX LIMITES D'UN FLUIDE.

Les lois de la résistance qu'un fluide oppose au mouvement des solides qui y sont immergés, qu'il éprouve de la part des parois solides au long desquelles il coule avaient, de bonne heure, préoccupé les physiciens, sans que ceux-ci s'accordassent dans leurs opinions; Newton, Daniel Bernoulli, s'Gravesande, Chezy, l'abbé Bossut, Du Buat, avaient proposé, pour représenter ces lois, les formules les plus diverses [2].

Parmi ces physiciens, il en est un dont les recherches méritent d'arrêter un instant notre attention : c'est Du Buat [3].

Les expériences de Du Buat sur l'écoulement de l'eau dans les tuyaux l'amènent à supposer qu'une couche d'eau demeure adhérente à la paroi solide et ne prend

(1) G. Kirchhoff, *Vorlesungen über die Theorie der Wärme, herausgegeben von* Dr Max Planck, XIte Vorlesung, § 4; Leipzig, 1894.

(2) On trouvera d'intéressants renseignements sur ces anciennes recherches dans le Mémoire de Girard sur le mouvement des fluides dans les tubes capillaires, Mémoire qui sera cité plus loin.

(3) Du Buat, *Principes d'Hydraulique, vérifiés par un grand nombre d'expériences faites par ordre du Gouvernement*, 2 vol. (1re édition, Paris, 1779. — 2e édition, Paris, 1786).

aucune part au mouvement qui entraîne le reste du fluide [1] (*loc. cit.*, 2e édition, t. I, p. 93). De même, lorsqu'un corps solide se meut dans un fluide, il entraîne « avec lui une certaine quantité du même fluide qui varie peu avec la différence des vitesses; de sorte que la masse en mouvement ne consiste pas seulement en la masse propre du corps, mais encore en celle du fluide entraîné, ce qui convient très bien avec ce que nous avons appelé *poupe* et *proue fluide* » (*loc. cit.*, t. II, IIIe Partie, Section I, Chap. VII, p. 234). L'étude de cet entraînement du fluide par un solide en mouvement apparaît à Du Buat comme un objet d'une extrême importance : « Il n'est pas de moyen plus propre, dit-il (*loc. cit.*, t. II, p. 229) pour déterminer la quantité du fluide qu'entraîne avec lui un corps plongé que de faire osciller le corps dans le fluide.... On connaît les expériences de Newton sur les oscillations des globes dans différents fluides; comme il n'avait pour objet que de déterminer directement la résistance il ne s'attacha qu'aux pertes des amplitudes, sans observer la durée des oscillations. »

De quelle manière devons-nous concevoir cet entraînement? Le fluide se sépare-t-il, par une surface précise, en deux parties, l'une qui, pour ainsi dire, perdrait sa fluidité et ferait corps avec le solide; l'autre, demeurée fluide et glissant sur la première comme glissait la masse fluide entière à la surface du solide, selon l'hypothèse admise avant Du Buat? Ou bien, au contraire, la vitesse du fluide, identique à celle du solide le long de leur commune frontière, varie-t-elle d'une manière continue lorsqu'on s'éloigne de cette surface?

Si l'on s'en tenait seulement aux passages que nous avons cités, on attribuerait sans doute à Du Buat la première opinion; mais il est moins aisé de la concilier avec d'autres passages de ses *Principes d'Hydraulique*.

La masse même, qu'il attribue au fluide entraîné, semble peu compatible avec l'hypothèse que les mouvements de cette masse sont rigoureusement solidaires des oscillations du solide. « On voit, dit-il (*loc. cit.*; t. II, IIIe Partie, Section I, Chap. VII), qu'en général, un globe, mû dans l'eau, entraîne avec lui, tant en avant que derrière, une portion du fluide dont le volume excède un peu la moitié du sien. »

---

(1) Cette supposition s'était déjà présentée incidemment à l'esprit de Daniel Bernoulli, comme propre à expliquer les divergences entre les principes de l'Hydraulique et les données de l'observation. « Non dubito, écrit-il (4), quin hæc ad amussim experientiæ essent responsura, si modo adhæsio aquæ ad latera tubi motum non retardaret; puto tamen, eventum experimentorum talem esse posse, ut intelligenti, qui horum impedimentorum rationem habeat, satis ostendant propositionum veritatem. » Et plus loin (5) : Enormes has differentias maxima ex partie adhæsioni aquæ ad latera tubi tribuo, quæ certe adhæsio in hujusmodi casibus incredibilem exercere potest effectum. »

(4) DANIELIS BERNOULLI, *Hydrodynamica*, Sectio tertia, § 27, p. 50. — Argentorati, anno MDCCXXXVIII.

(5) *Ibid.*, id., § 27, p. 59.

d'unités adopté, comme Girard devait le reconnaître avec bonne grâce quelques années plus tard ([1]).

Dissipant cette erreur, de Prony, dans ses *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes,* reprend la formule primitive de Coulomb et s'attache à déterminer la valeur des coefficients a et b.

De Prony admet d'ailleurs, comme Du Buat, dont il s'inspire, qu'une masse fluide notable demeure adhérente aux parois d'un canal où coule un liquide; il croit cette couche adhérente assez épaisse pour que ni la nature de la paroi, ni les petites aspérités qu'elle présente, n'aient d'influence sur le mouvement du liquide. « Lorsque le fluide coule dans un tuyau ou sur un lit susceptible d'être mouillé, une lame ou couche du fluide reste adhérente à la matière qui compose ce tuyau ou dans laquelle ce lit est creusé; cette couche peut ainsi être regardée comme la véritable paroi qui renferme la masse fluide en mouvement. »

En 1816, Girard revint ([2]) à l'étude de la résistance que les parois solides opposent à l'écoulement des fluides; il aborda cette étude au double point de vue théorique et expérimental. Il demeure attaché aux lois posées par Coulomb, dont le Mémoire « contient les principes qui doivent conduire à la solution de cette question » (*loc. cit.*, p. 253).

Ces principes, toutefois, il les précise et, en les précisant, il les altère de manière à les rapprocher des idées de Du Buat et de Prony. Coulomb, en un passage que nous avons cité, admettait qu'un solide et un liquide en mouvement relatif adhèrent le long de la surface de contact, puis que la vitesse varie graduellement, à partir de cette surface de contact, lorsqu'on pénètre au sein du liquide. Pour Girard, une gaine fluide très mince adhère à la surface du solide; une surface de discontinuité sépare cette gaine du reste du liquide et la vitesse qui figure dans ses formules, c'est la vitesse relative des deux masses fluides que sépare cette surface : « Par l'effet, dit-il (*loc. cit.*, p. 254), de l'adhérence du fluide aux parois du canal qui le contient, il arrive qu'une couche très mince de ce fluide reste attachée à ces parois, de sorte que le courant s'établit en glissant sur cette couche. »

Cette couche très mince qui adhère au solide oppose au mouvement du reste du fluide une résistance au proportionnelle à leur vitesse relative (*loc. cit.*, p. 255); cette résistance est donc attribuable, non aux actions du solide sur le fluide, mais aux actions mutuelles des diverses parties du fluide. Elle existerait seule si la paroi solide était parfaitement polie; mais la paroi offre une multitude

---

(1) GIRARD, *Mémoire sur le mouvement des fluides*, etc. (*voir* ci-dessous), p. 256.

(2) *Mémoire sur le mouvement des fluides dans les tubes capillaires et l'influence de la température sur ce mouvement,* par M. GIRARD. Lu à l'Académie, le 30 avril et le 6 mai 1816 (*Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France,* années 1813, 1814 et 1815).

d'aspérités qu'épouse fidèlement la couche adhérente et qui se reproduisent à la surface par laquelle cette couche confine au reste du fluide; c'est à ces aspérités qu'il faut attribuer la présence, dans l'expression de la résistance, d'un terme bu^2 proportionnel au carré de la vitesse u (*loc. cit.*, p. 255). Girard, on le voit, suppose à la gaine liquide adhérente moins d'épaisseur que ne lui en attribuaient Du Buat et de Prony.

Les expériences effectuées par Girard ne s'accordent guère avec les fondements de sa théorie; la valeur du coefficient a, au lieu d'être constante pour un fluide donné, dépend du diamètre du tube par lequel le liquide s'écoule (*loc. cit.*, p. 297 et p. 328). Girard, il est vrai, ne s'émeut guère de cette contradiction; bien plus, il lui semble (*loc. cit.*, p. 328) que « l'existence de cette couche fluide (immobile, qui tapisse intérieurement le tuyau), par laquelle nous avons expliqué les phénomènes précédents, se trouve démontrée par celui qui nous occupe actuellement ». D'ailleurs, pour rétablir l'accord entre sa théorie et les faits d'expérience, il n'hésite pas à supposer que l'épaisseur de la couche adhérente dépend de la courbure de la paroi.

Les hypothèses touchant les actions moléculaires qui ont fourni à Navier [1] les formules relatives à la viscosité intérieure des fluides lui fournissent également la théorie de la résistance qu'une paroi solide oppose à l'écoulement d'un fluide.

Pour Navier, le fluide n'est pas adhérent au solide; au contact d'une paroi immobile, le fluide a une vitesse dont les composantes u, v, w, différentes de o, vérifient seulement la condition (*loc. cit.*, p. 415)

$$u\cos(n_i, x) + v\cos(n_i, y) + w\cos(n_i, z) = 0.$$

Le travail virtuel des actions du solide sur la couche fluide contiguë a pour valeur (*loc. cit.*, p. 411)

$$-\int \mathrm{E}(u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z)\,d\mathrm{S},$$

$d\mathrm{S}$ étant un élément de la surface de contact et δx, δy, δz les composantes du déplacement virtuel de la masse liquide qui confine à cet élément. E est un coefficient positif qui dépend seulement de la nature du liquide et du solide et de leur commune température.

Cette expression du travail de la viscosité de contact rentre comme cas particulier dans notre formule (48), à condition d'y réduire notre quantité f à $-$ E.

---

(1) NAVIER, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, lu à l'Académie royale des Sciences, le 18 Mars 1822 (*Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, année 1823, p. 389). On trouve un exposé des formules de Navier dans RESAL, *Traité de Mécanique générale*, t. II, p. 252; 1874.

La théorie proposée par Navier rentre donc comme cas particulier dans celle que nous avons exposée, à la condition de faire, en celle-ci,

$$f = -E, \qquad \mathfrak{C} = 0.$$

Et, en effet, si l'on substitue ces valeurs dans les conditions (76), on obtient les équations qui doivent, selon Navier, être vérifiées en tout point de la surface de contact du solide et du liquide (*loc. cit.*, p. 415).

Ces conditions, Navier en fait usage pour traiter *de l'écoulement d'un fluide par un tuyau rectiligne dont la section est rectangulaire* (*loc. cit.*, p. 417), puis *de l'écoulement d'un fluide par un tuyau rectiligne dont la section est circulaire* (*loc. cit.*, p. 422). Les formules qu'il donne pour résoudre ce problème sont, au fond, identiques à celles que Girard avait déduites de sa théorie.

Ce rapprochement entre les conséquences de la théorie de Girard et les conséquences de la théorie de Navier ne doit pas nous surprendre; distinctes par une de leurs hypothèses fondamentales, la théorie de Girard et la théorie de Navier ne tardent guère à se rejoindre; pour celui-ci, c'est sur la paroi solide même que glisse le liquide; pour celui-là, c'est sur une mince couche fluide adhérente au liquide; mais, pour l'un comme pour l'autre, une surface de discontinuité sépare les masses mobiles des masses immobiles et les premières retardent les secondes par une viscosité à laquelle les deux physiciens imposent les mêmes lois.

La contradiction que les formules de Girard rencontrent dans ses propres expériences s'oppose donc également à l'adoption des formules de Navier.

En 1829, Poisson compose un Mémoire [1], capital pour le développement de la physique moléculaire, qui contient une théorie fort originale du mouvement des fluides visqueux; les hypothèses qu'il formule touchant l'action d'une paroi solide sur un fluide en mouvement ont d'étroites relations avec les suppositions que Girard avait émises.

« Si un fluide, dit-il (*loc. cit.*, p. 94), est en contact avec un corps solide susceptible d'agir sur ses molécules, cette action produira une compression particulière qui peut se transmettre de proche en proche, jusqu'à une distance extrêmement petite, mais sensible, de la surface du solide, quoique l'action immédiate de ce corps n'ait lieu qu'à une distance insensible. Il se peut que, dans l'épaisseur de cette couche ainsi comprimée, le fluide perde sa fluidité, ou, autrement dit, il est possible que ses molécules soient assez rapprochées les unes des autres pour que leur forme influe sur leur action mutuelle, comme dans les corps solides. Dans cette hypothèse, la contraction linéaire et, par suite, la pression moléculaire, n'y seront plus égales en tout sens autour de chaque

---

(1) *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corp solides élastiques et des fluides*, par S.-D. Poisson, lu à l'Académie des Sciences, l 12 octobre 1829 (*Journal de l'École Polytechnique*, XXe cahier, t. XIII, 1831, p. 1).

point; et c'est sans doute ce qui a lieu dans la couche extrêmement mince qui s'attache à un corps mouillé par un liquide et ne coule plus le long de sa surface; ce qui est un effet distinct de l'adhésion apparente, due à la même cause que les phénomènes de la capillarité. »

Comme Girard, Poisson admet qu'une véritable surface de discontinuité sépare cette couche immobile, adhérente à la paroi, de la masse fluide mobile :

« Nous avons déjà remarqué (*loc. cit.*, p. 161) qu'il est possible qu'une couche très mince du fluide devienne adhérente à cette paroi et perde sa fluidité; dans ce cas, nous regarderons cette couche comme faisant partie de la paroi qui aura pour surface celle de cette même couche où se termine le fluide qui sera resté mobile. »

L'accord entre les vues de Poisson et celles de Girard, que nous venons de constater dans les hypothèses fondamentales, se retrouve dans leurs conséquences : celles-ci, dès lors, s'accordent également avec les formules de Navier. Les conditions vérifiées à la surface de contact du solide et du fluide (*loc. cit.*, p. 169) sont ce que deviennent nos égalités (76) si l'on y remplace $\mathfrak{G}$ par o et f par un coefficient μ qui dépend « de la nature du fluide et de celle de la paroi. Il sera constant dans le cas d'un fluide incompressible et homogène qui aura partout la même température. S'il s'agit d'un fluide aériforme, il pourra dépendre de la compression variable du fluide ».

Si les suppositions de Poisson, dans le Mémoire que nous venons de citer, s'accordent très exactement avec celles de Girard, elles sont au contraire pleinement conformes à celles de Navier dans le Mémoire que Poisson consacre à la théorie du pendule [1]. Les vitesses des molécules adjacentes au solide ne sont plus supposées identiques à celles du solide; le fluide peut glisser à la surface du solide; il est assujetti seulement à cette condition : « Les vitesses des molécules adjacentes à ce corps sont constamment les mêmes, dans le sens normal, que celles des points correspondants de sa surface. » Mais, en glissant à la surface du solide, le fluide, par son frottement, produit une action tangentielle proportionnelle à la vitesse relative des deux corps en contact.

Ces principes sont bien ceux qu'admet Navier; mais, par une singulière inconséquence, Poisson omet de tenir compte, dans ses équations, de la viscosité interne du fluide; il aurait dû, dès lors, en vertu même de ses hypothèses, admettre que le fluide demeure adhérent au solide tout le long de leur commune surface.

L'idée, émise par Coulomb, selon laquelle le fluide se meut avec une vitesse exactement égale, le long des parois, à celle du solide qu'il baigne, et graduel-

---

[1] S.-D. Poisson, *Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XI, 1832, p. 521).

lement variable avec la distance à ces parois, semble donc généralement abandonnée; Girard, Navier, Poisson s'accordent à admettre l'existence d'une surface au travers de laquelle la vitesse subit une brusque variation; leurs opinions divergent seulement touchant le siège de cette surface. Nous retrouvons toutefois, en 1839, l'opinion de Coulomb dans un travail, d'ailleurs médiocre, de Hagen (¹); lorsqu'un liquide coule dans un tube étroit, Hagen admet sans discussion (*loc. cit.*, p. 433) que la vitesse d'écoulement, nulle à la paroi, est, en chaque point, proportionnelle à la distance de ce point à la paroi..

L'opinion émise par Coulomb et abandonnée par la plupart de ses successeurs, allait trouver en Stokes un partisan convaincu; à l'appui de cette opinion, Stokes allait invoquer un argument nouveau, qui sera repris ensuite par divers théoriciens. Voici sous quelle forme il présente cet argument (²) :

Au sein d'un fluide visqueux en mouvement (*Papers*, Vol. I, p. 96) imaginons une surface et supposons qu'au voisinage de cette surface, les dérivées partielles des composantes u, v, w de la vitesse, soient extrêmement grandes; les actions tangentielles, dues à la viscosité, seront aussi extrêmement grandes; elles produiront une rapide atténuation de la vitesse relative des parties voisines. Passons à la limite et supposons qu'à un instant t, les composantes u, v, w de la vitesse soient discontinues le long d'une certaine surface; à cet instant, les actions tangentielles seraient infinies le long de cette surface; elles détruiraient immédiatement la vitesse relative des deux masses fluides qui confinent l'une à l'autre le long de cette surface; on ne peut donc trouver, au sein d'un fluide visqueux en mouvement, de surfaces le long desquelles les composantes de la vitesse soient discontinues. Raisonnant par analogie, il est naturel d'admettre que les actions, au contact d'un fluide et d'un solide qu'il baigne, sont semblables aux actions qu'exercent l'une sur l'autre deux masses fluides contiguës; que, par conséquent, la vitesse ne peut être discontinue le long d'une semblable surface. Par là, on est conduit à admettre que le fluide adhère au solide le long de leur commune frontière.

Le raisonnement de Stokes est une sorte d'esquisse des considérations que nous avons développées précédemment (IIᵉ Partie, Chap. I); mais la comparaison de ce que nous avons écrit avec ce raisonnement trop sommaire montre que ce dernier n'est pas entièrement exact. Il est bien vrai qu'une surface au passage de

---

(¹) HAGEN, *Ueber die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. XLVI, 1839, p. 423).

(²) P. G. STOKES, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids*, lu le 14 avril 1845 à la *Philosophical Society* de Cambridge (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. VIII, p. 287. — *Mathematical and physical Papers*, Vol. I, p. 75).

laquelle les composantes u, v, w de la vitesse varieraient d'une manière discontinue ne peut persister pendant un temps fini au sein d'un fluide visqueux; mais il n'est pas exact que les actions de viscosité donnent, au long d'une telle surface, des résultantes infinies, et le raisonnement de Stokes, suivi rigoureusement, aurait pour conséquence de justifier l'opinon de Navier, bien loin de la réfuter.

D'ailleurs, en dépit de ces considérations, qui lui semblent démontrer l'adhérence du fluide au solide et la continuité du mouvement au sein du fluide, Stokes hésite à adopter cette opinion; car, en la suivant, il a étudié l'écoulement d'un liquide dans un tuyau et il a trouvé une formule qui ne s'accorde pas avec les expériences de l'abbé Bossut et de Du Buat.

Il tente alors de revenir à l'opinion de Navier (qu'il désigne sous le nom d'*opinion de Poisson*); mais, dans cette voie, il rencontre de nouvelles difficultés; selon les expériences de Du Buat, une couche liquide reste adhérente aux parois du tuyau au sein duquel coule un fluide; il n'est possible de mettre cette observation d'accord avec les formules de Navier qu'en supposant infini le coefficient E, et l'on est ainsi ramené à la précédente opinion.

Cette hésitation entre les diverses suppositions émises par Coulomb, par Girard, par Navier, par Poisson, se retrouve dans le *Rapport* ([1]) écrit par Stokes, en 1846.

Peut-être les conditions vérifiées au contact d'un solide et d'un liquide changent-elles, selon que le liquide *mouille* le solide, comme l'eau mouille le verre, ou que le liquide *ne mouille pas* le solide, comme il arrive dans le cas du mercure et du verre.

Les idées de Stokes touchant le problème qui nous occupe se fixent, en 1850, dans son célèbre travail : *De l'effet du frottement intérieur des fluides sur le mouvement des pendules* ([2]). Il a adopté définitivement l'hypothèse de Coulomb. Les raisons qui déterminent son choix sont, sous une forme plus explicite, celles qu'il avait déjà indiquées en 1845; voici en quels termes il les présente (*Collection de Mémoires,* t. V, p. 292) :

» Pour que le fluide, immédiatement en contact avec un solide, pût couler sur lui avec une vitesse finie, il faudrait que le solide exerçât sur le fluide un frotte-

---

([1]) P. G. STOKES, *Report on recent researches on Hydrodynamics* (*Report of the British Association for* 1846, Part. I, p. 1. — *Mathematical and physical Papers,* Vol. I, p. 157).

([2]) P. G. STOKES, *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums,* lu à la *Philosophical Society* de Cambridge, le 9 décembre 1850 (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society,* Vol. IX, Part. II, p. 8. — *Philosophical Magazine,* Vol. I, 1851, p. 337. — *Collection de Mémoires relatifs à la Physique, publiés par la Société française de Physique,* t. V, 1891, p. 277. — *Mathematical and physical Papers* Vol. III, p. 1).

ment infiniment plus faible que celui que le fluide exerce sur lui-même. Car, concevons la couche élémentaire de fluide comprise entre la surface du solide et une surface parallèle à la surface h, et ne considérons que la portion de cette couche qui correspond à une portion élémentaire dS de la surface du solide. Il doit y avoir équilibre entre les forces qui agissent sur l'élément fluide et les forces effectives, prises en sens contraire ([1]). Concevons maintenant que h s'évanouisse par rapport aux dimensions linéaires de dS, et que, finalement, dS s'évanouisse également. Il est évident que les conditions d'équilibre se réduisent finalement à celle-ci, que la pression oblique que l'élément fluide éprouve du côté du solide doit être égale et opposée à la pression qu'il éprouve du côté du fluide. Or, si le fluide pouvait couler le long du solide avec une vitesse finie, il s'ensuivrait que la pression tangentielle, mise en jeu par le glissement continu du fluide sur lui-même, ne serait pas même contrebalancée par le glissement rude et inégal du fluide sur le solide. Comme cela paraît *a priori* excessivement improbable, il semble raisonnable d'examiner en premier lieu les conséquences de la supposition qu'il n'y a pas de pareil glissement du fluide sur le solide, d'autant mieux que les difficultés mathématiques du problème seront ainsi matériellement diminuées. Je prendrai donc, comme condition devant être satisfaite aux limites du fluide, que la vitesse d'une particule fluide doit être égale, en grandeur et en direction, à celle de la particule solide avec laquelle elle est en contact. Les résultats déduits de cette hypothèse montrent, en réalité, l'accord le plus satisfaisant avec l'observation. »

En admettant qu'un liquide adhère aux parois des tuyaux dans lesquels il coule et en étudiant le régime permanent qui s'établit dans ces tuyaux, Stokes avait obtenu des résultats qui ne s'accordaient pas avec les observations de Bossut et de Du Buat; ce désaccord l'avait fait hésiter sur la légitimité de son hypothèse.

Cette hésitation lui eût été évitée, s'il eût connu les expériences poursuivies à la même époque par Poiseuille ; le résultat du calcul eût été pleinement conforme aux données de l'observation.

L'étude de l'écoulement des liquides dans les tubes de très petit diamètre apparaît comme particulièrement propre à contrôler les hypothèses qui pourraient être faites, touchant la résistance que les parois opposent à cet écoulement. D'autre part, cette étude intéresse à un haut degré le physiologiste qui veut analyser les phénomènes de la circulation capillaire. Ce fut surtout cette seconde raison qui porta Poiseuille ([2]) à reprendre cette étude au point de vue expérimental et à soumettre à l'observation des tubes beaucoup plus étroits que les tubes

---

([1]) Par cette dernière expression, Stokes entend les *forces d'inertie*.

([2]) POISEUILLE, *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de petit diamètre* (*Mémoires des savants étrangers*, t. IX, 1846, p. 433).

Grâce à ce changement apporté aux conditions aux limites, l'analyse de Navier fournit sans peine à Hagenbach les lois mêmes que Poiseuille avait tirées de l'expérience.

Peu de temps après, et sans connaître le travail de Hagenbach, Émile Mathieu ([1]) reprit, avec le même succès, une analyse semblable. « Quand un liquide coule dans un tube capillaire, dit-il, il existe une couche de liquide adhérente au tube...; cette adhérence tient à la force de cohésion du liquide et du verre, ou plutôt au frottement qui est proportionnel à cette force. Ainsi, la condition à la surface est que la vitesse du liquide soit nulle sur la paroi. »

Plus tard, par des méthodes analogues, le même sujet fut repris par M. Boussinesq ([2]); en modifiant la condition aux limites admise par Navier, M. Boussinesq justifiait cette modification par des raisons semblables à celles qu'avaient invoquées Stokes et Hagenbach.

Bien que très général, le consentement à l'opinion de Coulomb ne fut cependant pas universel; certains hydrauliciens, et non des moindres, tinrent pour les hypothèses de Girard et de Navier; parmi ceux-ci, il convient de citer Darcy ([3]).

Darcy n'ignore pas les considérations par lesquelles, depuis Prony, on tente de prouver qu'un fluide ne peut couler le long d'une paroi solide avec une vitesse finie; il sait qu'en supposant du même ordre de grandeur les actions mutuelles des diverses parties du fluide et les actions du solide sur le fluide, on prétend démontrer qu'un tel glissement engendrerait un frottement infini; mais il se range à l'opinion que Dupuit avait émise dans ses *Études sur le mouvement des eaux courantes,* et, sans discuter la rigueur du raisonnement, il révoque en doute l'hypothèse même qui lui sert de fondement. « On voit par ce qui précède, dit-il (*loc. cit.*, p. 309), qu'il suffit d'une vitesse relative infiniment petite pour faire naître, dans les couches fluides en contact, une résistance comparable à celle qui pourrait être engendrée par une vitesse finie du liquide glissant sur une paroi solide. M. Dupuit a donc pu prétendre que de Prony ne paraît pas avoir exprimé une idée précise lorqu'il a dit : « Cette cohésion des molécules fluides entre elles, et celle des mêmes molécules à la matière dont le tuyau est formé ou dans laquelle le tuyau est creusé, doivent être, en général, représentées par des valeurs différentes, mais comparables ou du même ordre les unes par rapport aux autres. »

« L'adhérence à la paroi, en effet, peut être expérimentée sous une vitesse finie

---

([1]) Émile Mathieu, *Sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petit diamètre* (*Comptes rendus*, t. LVII, 1863, p. 320. — *Cours de Physique mathématique*, p. 66. Paris, 1873).

([2]) Boussinesq, *Théorie des expériences de M. Poiseuille sur l'écoulement des liquides dans les tubes capillaires* (*Comptes rendus*, t. LXV, 1867, p. 46).

([3]) Darcy, *Recherches expérimentales sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux* (*Mémoires des Savants étrangers*, t. XV, 1858, p. 141).

quelconque, tandis que ce qu'on appelle la *cohésion* ne peut l'être que sous l'influence d'une vitesse relative infiniment petite; car, de quelque manière qu'on fasse l'expérience, ajoute justement M. Dupuit, *la cohésion du liquide sera toujours assez forte pour que la vitesse relative des deux surfaces soit sensiblement nulle* ».

« Ces deux forces de l'adhérence et de la cohésion sont, on le voit, d'un ordre différent et sans mesure commune. »

De ce passage une conclusion semble se dégager nettement : Le liquide peut, comme le voulait Navier, glisser avec une vitesse finie à la surface d'une paroi solide; mais il ne peut se produire, entre deux masses fluides, une de ces surfaces de discontinuité dont Girard admettait l'existence.

Cette conclusion n'est pas, cependant, celle qu'adopte Darcy. S'il admet que, dans certains cas exceptionnels, le liquide glisse à la surface même du solide, il pense que, le plus souvent, l'écoulement a lieu selon le mode que Girard a imaginé. Voici, en effet, quelques-unes des propositions par lesquelles Darcy résume ses recherches (*loc. cit.*, p. 347) :

» Il résulte des expériences faites :

» 1° Que, même dans un tuyau *verticalement placé* et à raison de l'attraction de ses parois, une couche liquide leur reste adhérente.

» 2° Que l'épaisseur de cette couche est beaucoup trop faible pour faire disparaître les aspérités de la paroi; que, d'ailleurs, elle doit présenter une épaisseur sensiblement constante et, par conséquent, offrir à sa surface les mêmes reliefs que la paroi elle-même.

» Sans doute, dans un courant, il ne peut y avoir entre les vitesses de deux filets contigus qu'une différence insensible; mais il ne saurait en être ainsi lorsqu'il s'agit de la couche adhérente; elle est, pour ainsi dire, passée à l'état d'*émail,* d'enduit aqueux de la paroi. »

Cette couche tend à retarder le mouvement du liquide qu'elle enserre :

» Si donc, d'une part, l'attraction des parois doit être considérée comme une des causes retardatrices du mouvement, on doit reconnaître, d'autre part, que cette cause agit vraisemblablement en grande partie par l'intermédiaire de la cohésion du fluide que la surface extérieure du cylindre mobile doit surmonter.

» Ainsi le mode d'agir de l'attraction des parois semblerait pouvoir se résumer ainsi :

» Force nécessaire pour vaincre l'attraction des parois, dans les parties où le liquide viendrait à s'en détacher, et force nécessaire pour surmonter la cohésion quand le cylindre liquide passe sur l'enduit aqueux.

» Enfin, les aspérités de la surface qui viennent modifier brusquement le mouvement et la direction des filets fluides forment, évidemment, une autre cause retardatrice. »

Une inconséquence assez étrange semble donc faire le fond des considérations développées par Darcy touchant l'action des parois sur une masse fluide en mouvement.

C'est aux hypothèses de Navier que revient M. Oskar Emil Meyer (¹).

Reprenant des expériences analogues à celles de Coulomb, M. Oskar Emil Meyer fait osciller un disque métallique au sein d'une masse d'eau que recouvre une couche d'huile; la face supérieure du disque est amenée tout près de la surface de séparation entre l'eau et l'huile.

Conformément à l'opinion de Coulomb, M. O.-E. Meyer admet (*Diss.*, p. 6; *Pogg. Ann.*, p. 61) que l'eau adhère au disque métallique : *Discum fluido circumfuso tanto modo humectari pono, ut stratum fluidi disco vicinum eadem gaudeat celeritate qua ipse discus.* Mais il suppose que les deux liquides glissent l'un sur l'autre le long de leur surface de contact; ce glissement engendrerait une résistance soumise à des lois semblables de tout point à celles que Navier imposait au frottement d'un liquide sur un solide. Il semble par là, que l'opinion de M. O.-E. Meyer s'accorderait aisément avec l'hypothèse de Girard et de Darcy; mais ce n'est là qu'une apparence dissipée par la lecture des écrits où, peu après, M. O.-E. Meyer développe plus explicitement sa pensée.

Dans son Mémoire inséré aux *Annales de Poggendorff*, tout en admettant en général l'adhérence du liquide au solide, M. O.-E. Meyer écrit (*Pogg. Ann.*, p. 68) quelques lignes où il déclare que les lois vérifiées au contact d'un solide et d'un liquide sont tout à fait analogues à celles qui sont vérifiées au contact de deux liquides; il les suppose donc, en ce passage, données par les formules de Navier. De plus, il écarte (*ibid.*, p. 69) l'objection présentée par Stokes contre ces formules; avec Dupuit et avec Darcy, il admet ce principe : Les lois de la viscosité interne d'un fluide sont d'une tout autre nature que les lois dont dépend la viscosité au contact de deux substances différentes.

Dans son travail publié au *Journal de Borchardt*, M. O.-E. Meyer s'exprime plus explicitement encore; il admet que les conditions vérifiées à la surface de contact de deux fluides sont données par les équations de Navier (*loc. cit.*, p. 238); qu'il en est de même des conditions vérifiées à la surface de contact d'un liquide et d'un solide (*ibid.*, p. 239); mais que, dans le cas où le solide est mouillé par le fluide, le coefficient E est infini, en sorte que la vitesse relative du solide et du fluide tombe à o.

(¹) Ottocarius Æmilius Meyer, *De mutua duorum fluidorum frictione* : Dissertatio inauguralis; Regimonti Prussorum (Kœnigsberg), anno MDCCCLX. — Oskar Emil Meyer, *Ueber die Reibung der Flussigkeiten* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, Bd. CXIII, p. 55; 1861). — *Ueber die Reibung der Flussigkeiten;* theoretischer Theil (*Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. LIX, p. 229; 1861).

qu'elle diffère de o, il est aussi sûr et plus simple de la supposer rigoureusement égale à o (*Scientific papers*, vol. II, p. 9).

Comme Helmholtz et von Piotrowski, Stefan (¹) admet qu'un liquide peut glisser sur une surface solide; il applique, en particulier, cette hypothèse au glissement du mercure sur le verre qui, selon lui, suit les lois tracées par Navier. D'ailleurs, dans ce cas, l'hypothèse semblait fort plausible; car les expériences de Poiseuille lui-même avaient prouvé que les lois de l'écoulement d'un liquide dans un tube capillaire, découvertes par ce physicien, ne s'appliquaient pas à l'écoulement du mercure dans le verre.

Mais, chose remarquable, cette exception n'était qu'apparente et due à des observations incorrectes; en 1870, M. Emil Warburg (²) reprit l'étude de l'écoulement du mercure dans des tubes de verre capillaires; contrairement à son attente, il trouva que cet écoulement suivait les célèbres lois de Poiseuille; il fallait nécessairement conclure de cette observation que le mercure adhérait au verre (*loc. cit.*, p. 370). Cette découverte expérimentale paraît à M. Warburg (*loc. cit.*, p. 379) s'accorder pleinement avec le raisonnement de Stokes, selon lequel le glissement d'un liquide sur un solide est impossible si l'on admet que le frottement du solide sur le fluide dépend de lois analogues à celles qui régissent le frottement mutuel de deux couches fluides.

Quelques années plus tard, l'observation de M. E. Warburg était confirmée successivement par M. E. Villari (³) et par M. Syn. Koch (⁴); ces deux auteurs reconnurent que le mercure, coulant dans de très fins tubes de verre, suivait les lois de Poiseuille.

Les hypothèses formulées par Navier touchant le glissement des liquides sur les solides, un moment remises en honneur par les recherches de Helmholtz et de von Piotrowski, se trouvaient de nouveau rejetées en suspicion par ces observations qui ramenaient l'attention vers l'hypothèse de Coulomb.

Une tendance analogue se dégageait des importantes recherches expérimentales, historiques et critiques poursuivies par M. Couette (⁵). En précisant par

---

(¹) STEFAN, *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der Akademie der Wissenschaften zu Wien*, Bd. XLVI, 1862.

(²) EMIL WARBURG, *Ueber den Ausfluss des Quecksilbers aus gläsernen Capillarröhren* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. CXL, 1870, p. 367).

(³) E. VILLARI (*Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, 3ᵉ série, t. VI, 1876, p. 1).

(⁴) SYN. KOCH, *Ueber die Abhängigkeit der Reibungsconstante des Quecksilbers von der Temperatur* (*Wiedemann's Annalen*, Bd. XIV, 1881, p. 1).

(⁵) M. COUETTE, *La viscosité des liquides* (*Bulletin des Sciences Physiques de la Faculté des Sciences de Paris*, 1ʳᵉ année, Paris, 1888-1889; pp. 49, 123, 201, 262). — *Études sur le frottement des liquides* (*Thèse de Paris*, 30 mai 1890, et *Annales de Chimie et de Physique*, 6ᵉ série, t. XXI, p. 433; 1890).

solution préconisée par Du Buat, par de Prony, par Girard, par Poisson, par Darcy. Il ne peut pas se faire qu'une couche fluide demeure adhérente au solide et que le reste du fluide glisse avec une vitesse finie sur cette couche. Les raisonnements exposés au Chapitre I de la II[e] Partie de ces *Recherches* nous ont démontré qu'au sein d'un fluide visqueux, aucune surface ne peut être, pour les composantes de la vitesse, une surface de discontinuité [1].

Les composantes de la vitesse varient donc d'une manière continue d'un point à l'autre du fluide; par là, le doute se trouve restreint et nous ne pouvons plus hésiter qu'entre l'hypothèse de Coulomb et l'hypothèse de Navier.

Comme nous l'avons fait remarquer, l'hypothèse de Navier est impliquée, comme cas particulier, dans notre théorie. Pour retrouver les formules de Navier, il nous suffit d'admettre que le coefficient du frottement de contact $\mathfrak{G}$ est identiquement nul et que le coefficient de la viscosité de contact f ne dépend pas de la vitesse relative r'.

L'hypothèse de Coulomb admet que, pour deux corps différents, dont l'un au moins est fluide, la vitesse relative est nulle le long de la surface de contact. Si les fluides sont dénués de viscosité intrinsèque, ce n'est point là une hypothèse nouvelle, mais une conséquence des principes posés par Navier.

Dans le cas, au contraire, où les fluides étudiés sont des fluides visqueux, l'hypothèse de Coulomb se présentait jusqu'ici comme une hypothèse première que rien ne reliait aux principes généraux de la Mécanique. Ce n'était pas, en effet, relier cette hypothèse aux principes de la Mécanique de remarquer, avec F.-E. Neumann, Helmholtz, M. O.-E. Meyer et tant d'autres, que les formules de Navier donnent cette hypothèse à titre de loi limite lorsqu'on y fait croître au delà de toute limite le coefficient f de la viscosité de contact; c'est proprement remarquer que lorsque la théorie de Navier perd tout sens, on est contraint d'adopter l'hypothèse de Coulomb; ou mieux, c'est faire la remarque suivante : Lorsque f prend de grandes valeurs sans que μ dépasse certaines limites, les composantes de la vitesse relative deviennent très petites, ce qui assure une adhérence approchée, mais non pas une adhérence rigoureuse des deux corps.

La théorie que nous avons exposée permet de prévoir des cas où un fluide adhérera forcément et rigoureusement aux corps solides qu'il baigne; l'hypothèse

(1) Récemment, M. Hadamard [a] a montré que cette proposition devait être admise même pour les fluides parfaits. Des surfaces le long desquelles deux parties distinctes d'un même fluide glisseraient l'une sur l'autre pourraient persister, une fois nées; mais il est impossible qu'elles naissent à aucun instant.

(a) J. HADAMARD, *Sur les glissements dans les fluides* (*Comptes rendus*, 2 février et 2 mars 1903, t. CXXXVI, p. 299 et 545).

de Coulomb est ainsi reliée aux principes généraux de l'Énergétique. Mais, en outre, elle montre qu'un même fluide et un même solide pourront, selon les circonstances du mouvement, adhérer l'un à l'autre ou glisser l'un sur l'autre; cette conclusion est conforme à l'opinion émise par certains hydrauliciens et notamment par Darcy dans un passage que nous avons cité.

TABLE DES MATIÈRES (Fascicule N° 2, 1905).

1182 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES,
DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME V. — ANNÉE 1903.

[redacted]

GAUTHIER-VILLARS,

IMPRIMEUR-ÉDITEUR.

TOULOUSE.

ED. PRIVAT,

IMPRIMEUR-LIBRAIRE.

1903

(Ce Recueil paraît chaque trimestre.)

Troisième fascicule.

SUR LES

COURBES DE TRACTION DU CAOUTCHOUC VULCANISÉ,

PAR MM. H. BOUASSE ET Z. CARRIÈRE.

Nous devons préciser le but que nous avons poursuivi en étudiant le caoutchouc. Il ne peut entrer dans notre esprit d'étudier toutes les espèces de caoutchouc. Leur nombre est indéfini; elles peuvent différer par l'arbre qui fournit la gomme et le mode d'extraction, par la quantité de soufre introduit et par le procédé de vulcanisation. Nous serions d'abord amenés à caractériser ces espèces par des constantes, et c'est justement l'existence de ces constantes que nous discuterons et que l'expérience nous montrera de plus en plus douteuse.

Il ne nous est pas possible d'étudier *en général* les propriétés du caoutchouc, sans passer en revue les espèces et sans retomber, par conséquent, dans les difficultés précédentes. Nous nous limiterons donc à étudier *un échantillon de caoutchouc*, il est plus que probable que les autres caoutchoucs présenteraient qualitativement les mêmes phénomènes; mais ce n'est pas sûr, et d'ailleurs assez indifférent pour le but que nous poursuivons.

Nous considérons ce caoutchouc comme le substratum de certaines lois, comme possédant certaines propriétés caractéristiques que nous nous proposons de classer. Nous l'avons choisi, après un grand nombre de physiciens, comme sujet d'étude, parce que ces propriétés sont chez lui extraordinairement grossies et comme caricaturales; mais elles se retrouvent dans bien des corps à un moindre degré; et l'on peut espérer que des phénomènes, débrouillés dans ce cas extrême, pourront être plus facilement classés dans d'autres cas où ils ne sont plus aussi nettement tranchés.

Notre échantillon de caoutchouc a été fourni par une des premières usines de France comme ne contenant que de la gomme et du soufre : nous le possédons sous forme de cordes de 4^{mm} de diamètre et nous en avons utilisé plusieurs kilogrammes. Sa densité est 0,985; sa surface est grise et contient un excès de soufre pulvérulent. Nous n'avons pas cherché à savoir d'où provenait la gomme .... par quel procédé on l'avait vulcanisée .... Nous n'aurions eu que de vaines précisions, sans intérêt, du moment que nous ne pouvions pas assister à toute la série des manipulations.

La plus élémentaire discrétion empêche de demander à un industriel de révéler ses secrets de fabrication, et ensuite de les publier, *à supposer qu'il les communique*. Si d'ailleurs on veut bien se mettre à notre point de vue, on comprendra que nous ne regrettons que médiocrement de n'avoir pu satisfaire notre curiosité.

Nous ne voulons pas donner comme résultat de notre travail que tel caoutchouc de telle origine, après telle préparation dans telles conditions, présente telles propriétés. Nous voulons conclure qu'il est possible de rencontrer des corps, *peu importe leur nom et leur composition,* qui présentent certains phénomènes que nous étudions et classons. Il y a des chances pour qu'on reproduise ces phénomènes en utilisant du caoutchouc; mais admettons, par impossible, que l'échantillon que nous avons étudié soit seul au monde à les présenter, ils n'en perdraient pas leur intérêt. Et, à supposer bien entendu que nos observations soient correctes, une théorie n'aurait pas le droit de les négliger.

Nous savons que de telles opinions sont encore considérées comme paradoxales : ce n'est pas une raison pour qu'elles soient erronées. Il peut sembler bizarre d'étudier un corps qui présente de si nombreuses et de si importantes applications, comme le substratum de certaines lois curieuses : mais chacun a son rôle dans la Science : il faut bien que quelques-uns s'occupent des phénomènes indépendamment de leur utilité.

APPAREIL POUR DÉCRIRE LES COURBES DE TRACTION.

La figure 1 représente schématiquement l'appareil que nous avons employé pour décrire les courbes de traction. Suivant un principe auquel on doit toujours se conformer, les charges sont imposées d'une manière continue et les longueurs sont observées par une méthode qui permet de les déterminer à tout instant.

Le principe de la mise en charge est le déroulement ou l'enroulement d'une chaînette de cuivre pesant à peu près exactement 50^g par mètre. Elle est contenue dans le vase V, passe sur un cylindre de bois R, de 20^{cm} de diamètre, glisse sur une gouttière *cb* et tombe dans le cornet du clinquant E. On peut, par des procédés mécaniques appropriés et qu'il est inutile de décrire, donner au cylindre R des mouvements de rotation uniformes dans un sens ou dans l'autre, changer instantanément ce sens, ou arrêter brusquement. Par un entraînement direct par poulies, ou en utilisant un entraînement par vis tangente et friction, on peut obtenir la mise en charge de 1^m de chaîne en un nombre de secondes variant de 5 à 120. Tous les mètres, la chaîne porte un anneau de fil rouge.

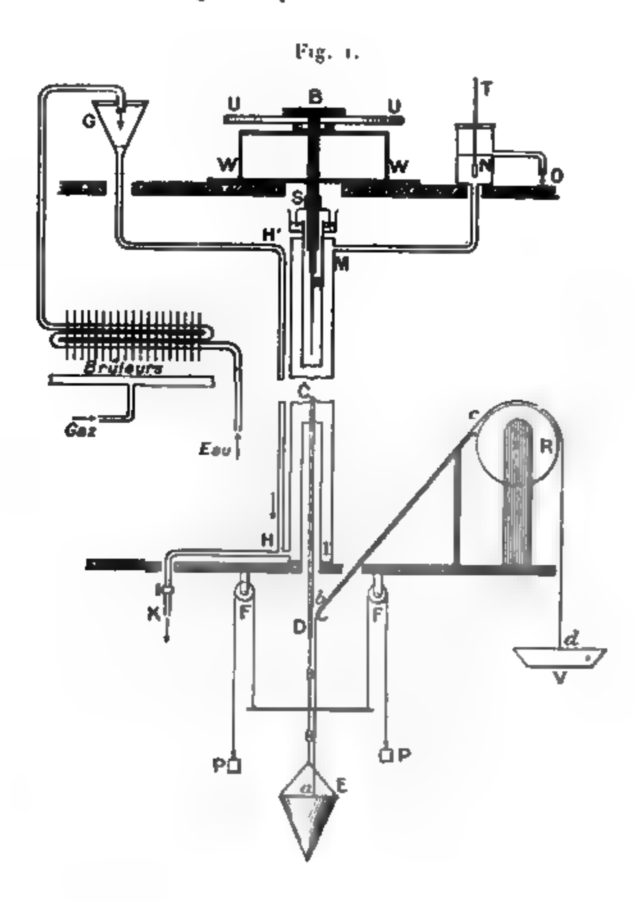
On observe avec une lunette le passage de ces fils, et simultanément, dans la même lunette, on lit la position d'une règle en bois mince DC qui est suspendue à la corde de caoutchouc étudié : la longueur de la corde en expérience est ainsi

connue à $\frac{1}{10}$ de millimètre près, approximation généralement plus que suffisante.

Le cornet E est équilibré par des contrepoids P rattachés par des fils passant sur des poulies d'aluminium très légères et très mobiles FF.

Après des efforts infructueux pour trouver un mode d'attache parfaitement correct, nous avons dû nous résigner à pincer les extrémités de la corde de caout-

Fig. 1.



chouc dans des pinces de bijoutier. Le serrage doit être considérable lorsqu'on veut pouvoir allonger de 6 ou 7 fois la longueur initiale sans que la corde échappe. Mais l'expérience montre qu'une fois desserrée la corde reprend bien son diamètre primitif et ne semble pas avoir souffert. Une des pinces (non représentées) est invariablement fixée à la pièce BA qui entre à frottement doux dans le tube servant d'axe au disque gradué UU. L'autre pince est reliée par un crochet à la règle CD. Pour mettre la corde en expérience, on la fixe à ses pinces, on introduit le tout par en haut après avoir accroché la règle. On peut aisément régler cette dernière en azimut grâce au disque UU. Nous avons d'ailleurs installé l'appareil comme il vient d'être dit, en vue d'expériences sur la torsion.

La pince et la règle que supporte toujours le caoutchouc pèsent ensemble 61g : nous désignerons cette charge par P_0.

Nous avons effectué des expériences à des températures autres que la température ordinaire.

Il est très difficile de maintenir à une température constante, même grossièrement, l'eau renfermée dans une enceinte de 1m,40 de hauteur : il est à peu près impossible d'agiter, tant à cause des difficultés mécaniques à vaincre, qu'à cause des trépidations qui résulteraient de cette agitation.

D'ailleurs, le refroidissement et le réchauffement demanderaient un temps considérable. Nos expériences sont basées sur un principe tout différent.

La corde est entourée d'un tube de laiton de 0m,04 de diamètre : un autre tube de 0m,06 de diamètre coaxial au premier, forme avec lui une enceinte dans laquelle on fait circuler un courant d'eau chaude ou froide. L'eau arrive à la partie inférieure de l'enceinte par le tube GH et sort par le tube MN. Un robinet K permet la vidange : le trop plein s'écoule en O et est amené dans les égouts. La température de l'eau est prise par le thermomètre T. L'ensemble du tube HH' et des tubes concentriques formant l'enceinte est entouré d'une couche de corde d'amiante pour éviter un trop grand rayonnement extérieur.

Une chicane S, formée d'une gouttière circulaire remplie d'huile et d'un chapeau glissant à frottement sur l'axe du disque UU, empêche un courant d'air froid de s'établir autour du caoutchouc, sans gêner les mouvements de rotation.

Reste à chauffer l'eau qu'on enverra dans l'enceinte. Nous avons utilisé des appareils du commerce, robustes et bon marché, que l'on emploie aujourd'hui couramment. Avec un débit de plus de 1l à la minute, ils échauffent l'eau d'une quarantaine de degrés : en en mettant deux en série, nous avons obtenu un débit de plus de 1l par minute, avec un échauffement de 70° à 80°. Ils se composent essentiellement d'un tube de cuivre deux fois replié sur lui-même et entouré d'ailettes en cuivre : une rampe de brûleurs chauffe le tout. L'encombrement de ces appareils est très petit : ils sont longs d'une trentaine de centimètres : les ailettes ont 0m,07 de diamètre. Pour que la température soit constante à 1° près, il faut régler la pression d'arrivée du gaz : on fait varier la température en modifiant le débit.

Les cordes employées ont généralement de 0m,15 à 0m,30 de longueur. Sans sortir du tube, elles s'allongent d'un peu plus de 1m. Le caoutchouc pouvant prendre jusqu'à 7 à 8 fois sa longueur primitive, dans quelques cas particuliers la corde a comme longueur initiale une douzaine de centimètres. Il y a avantage, tant au point de vue de la précision que de la définition des déformations subies, à prendre cette longueur aussi grande que possible.

On s'aperçoit immédiatement, rien qu'à regarder la corde d'un même paquet, que le diamètre n'est pas constant : cette circonstance augmente beaucoup la

difficulté des comparaisons numériques, d'autant plus que l'homogénéité de la matière à la surface et au centre est très imparfaite. Les expériences devant être le plus souvent exécutées sur des bouts différents pour avoir un sens, ce n'est que par leur répétition que l'on parvient à assurer certaines conclusions.

Notations. — Nous appellerons L_0 la longueur initiale de la corde, L sa longueur actuelle. Nous poserons $\Lambda = L : L_0$.

Les charges seront données en mètres de chaîne : dire qu'un cycle est de $n\pi$ signifiera que la variation de charge est de n fois le poids π de 1^m de chaîne, soit sensiblement 50n-grammes.

La charge étant prise comme variable, nous appellerons amplitude l d'un cycle la différence entre les longueurs initiale et finale, avant et après l'imposition de la charge.

Toutes les courbes sont construites en portant les longueurs en abscisses et les charges en ordonnées.

A moins d'indications contraires, la charge croît proportionnellement au temps à raison de 1^m en 27 secondes, soit approximativement 100^g en 54 secondes.

Les longueurs L_0, L, l sont toujours données en dixièmes de millimètre.

Nous appelons T_0 et T_1 les temps écoulés à charge constante aux extrémités des cycles.

Historique. — L'historique de la question sera très bref, non que le nombre des gens qui ont tiré sur du caoutchouc ne soit considérable; mais ils se sont placés à un point de vue qui n'est pas le nôtre.

Le premier Mémoire qu'il vaille la peine de citer est celui de Villari (*Pogg. Ann.*, t. CXLIII, 1871).

L'auteur trace la courbe de traction du caoutchouc, mais, *comme tous ceux qui l'ont suivi,* les charges sont installées à la main, sans précautions spéciales. Il trouve un point d'inflexion.

Sa principale préoccupation est de calculer le module d'élasticité pour lequel il donne une définition inadmissible, à supposer qu'il ait la prétention d'exprimer par ce module un paramètre, constant ou variable peu importe, mais caractéristique de la longueur ou de la charge actuelle d'un caoutchouc donné. Nous reviendrons là-dessus dans un prochain Mémoire.

Imbert (*Thèse de Marseille,* 1880) allonge des lames de caoutchouc; sa technique n'est pas meilleure que celle de Villari. Il retrouve le point d'inflexion. Nous ne discuterons pas ici les conséquences qu'il tire de ses expériences.

Cantone (*R. Istituto lombardo,* t. XXXI, 1898) décrit des cycles selon une technique tout aussi rudimentaire : il semble encore que son objectif principal soit le calcul du module d'élasticité.

Ainsi la forme générale des courbes de traction du caoutchouc est connue depuis longtemps; la technique a toujours été défectueuse.

On a mêlé à l'étude de ces courbes des considérations sur le module d'élasticité dont le moindre défaut est de ne pas avoir de sens, comme il ressortira à l'évidence du présent travail. Quand on se sera rendu compte de la variabilité extraordinaire des courbes avec la technique, on se demandera comment il a pu venir à l'idée de calculer le module d'élasticité d'après les propriétés de ces courbes.

Enfin, personne n'a étudié systématiquement comment les cycles se fixaient, comment la température intervenait sur cette fixation, ..., questions qui font l'objet principal de notre Mémoire.

RÉSULTAT DES EXPÉRIENCES.

1. *Allongement permanent.* — Nous avons cherché tout d'abord à nous rendre compte des charges que les cordes supportent et des allongements permanents qui peuvent en résulter. Les cordes se rompent toujours aux points d'attache. Les pinces fixent assez correctement la partie utilisée, mais diminuent la charge de rupture. En prenant le caoutchouc doublé dans un nœud coulant qui se serre automatiquement à mesure que la tension croît, on augmente la charge de rupture, mais la partie utilisée se trouve assez mal déterminée. On tourne cette difficulté en mesurant les allongements entre deux repères tracés à l'encre sur la surface du caoutchouc. Nous n'avons pas pu employer généralement cette technique, parce qu'elle exige deux expérimentateurs, est plus compliquée que celle que nous avons précédemment exposée et ne peut pas être employée quand on veut élever la température du caoutchouc. D'ailleurs les courbes obtenues avec l'une ou l'autre technique ne diffèrent pas sensiblement.

Chaque expérience est faite sur un caoutchouc différent :

Première série : la charge est maintenue 24 heures.

Charges.	200g.	500g.	1000g.	1500g.
Λ_1	1,268	2,600	4,744	6,624
Λ_3	1,012	1,016	1,036	1,044
Λ_4	1,008	1,012	1,020	1,030

Λ_1 est la longueur un peu avant la décharge; Λ_2 est la longueur 10 minutes après la décharge; Λ_3 24 heures après, et Λ_4 7 jours après :

Deuxième série : la charge est maintenue 2 jours.

Charges.	200g.	500g.	1000g.	1500g.
Λ_1	1,332	3,100	5,544	7,184
Λ_2	1,028	1,068	1,104	1,112
Λ_3	1,012	1,030	1,056	1,068
Λ_4	1,008	1,018	1,044	1,056

Troisième série : la charge est maintenue 10 jours.

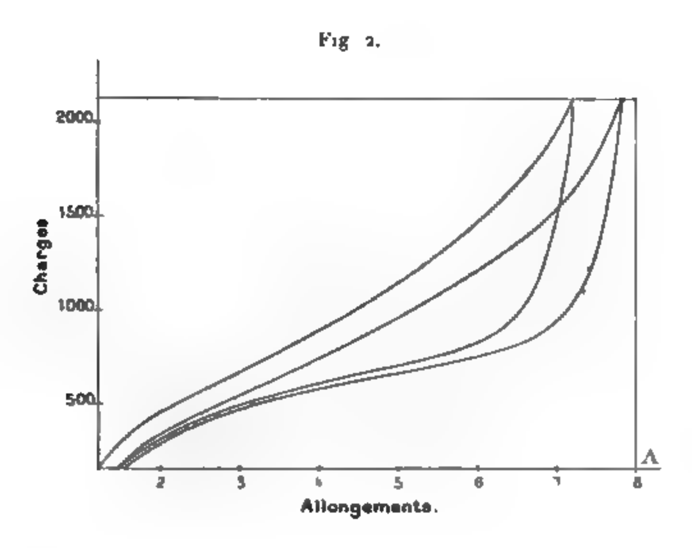
Charges.	200g.	500g.	1000g.	1500g.
A_1..................	1,310	2,912	5,804	7,258
A_2..................	1,036	1,104	1,160	1,160
A_4..................	1,020	1,052	1,092	1,108

Ces expériences montrent que l'allongement, que l'on est tenté d'appeler permanent, croît avec la charge et avec la durée d'application : mais la question est de savoir s'il ne diminue presque indéfiniment en maintenant le fil assez longtemps sous charge nulle.

La corde de 4^{mm} que nous avons employée (pure gomme et soufre) supporte encore des charges plus considérables; nous sommes parvenus à lui faire subir, pendant quelques minutes, 2700^g, qui produisaient une longueur $A = 8,2$.

2. *Courbe de charge et de décharge continuées jusqu'aux plus fortes charges.* — Nous avons tracé, d'après la technique précédente, quelques courbes de charge et de décharge. La figure 2 représente deux parcours complets entre 3π

Fig. 2.

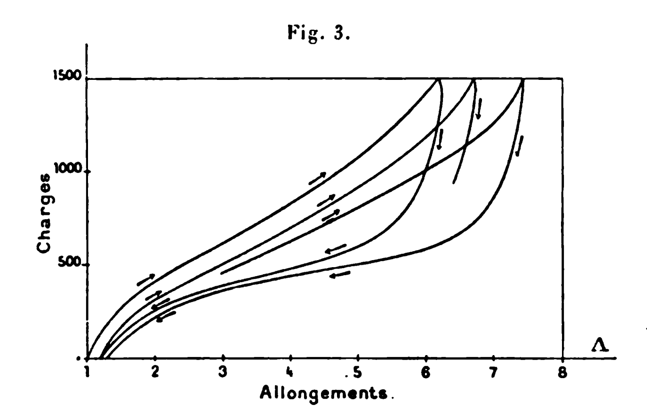


et 43π, soit sensiblement entre 150^g et 2150^g. L'allure de ces courbes est tout à fait caractéristique.

On remarquera à quel point elles se relèvent pour les fortes charges. Le rapport des valeurs maxima et minima des allongements qui correspondent à un même accroissement de charge atteint 6 sur la courbe de charge du second cycle. Au début de la courbe de décharge, il y a encore allongement pour le premier cycle; la courbe est sensiblement verticale pour le second.

3. *Mode de fixation des cycles de traction d'amplitude constante.* — Cycles de 30π, parcourus sans arrêt aux extrémités $T_0 = T_1 = 0$. On trace 8 courbes

Fig. 3.



complètes. La figure 3 représente la première, une partie de la seconde et une partie de la huitième.

Amplitudes. — $\Lambda_0 = 1$ au début du premier cycle. Voici les Λ_1 aux extrémités des divers cycles et les Λ_0 de retour :

Λ_1.........	6,16		6,68		6,90		7,04		7,17		7,27		7,36		7,43
Différences.		52		22		14		13		10		9		7	
Λ_0.........	1,20		1,23		1,25		1,25		1,28		1,28		1,28		1,28

L'amplitude des cycles croît d'abord beaucoup, puis de moins en moins et tend vers une limite.

Elle n'est pratiquement atteinte qu'après le huitième cycle. Ce résultat rentre dans la propriété générale d'accommodation. On remarquera que la limite inférieure est à peu près immédiatement atteinte et que le cycle ne s'allonge que par un déplacement de son extrémité supérieure. La charge de 30π est considérable pour la corde employée et l'allonge de plus de six fois sa longueur initiale.

Inclinaison au début de la courbe de charge. — $L_0 = 1470$. On donne ci-dessous l'allongement pour les deux premiers mètres de chaîne :

173 214 2[illegible] 236 239 230 250 266

A mesure que le numéro d'ordre du cycle croît, la courbe est au début de plus en plus inclinée.

Tangente d'inflexion sur la courbe d'aller. — Elle a lieu pour 10π environ. L'allongement est alors par mètre, pour les cycles successifs,

351 390 403 410 416 422 424 428

La tangente d'inflexion est de plus en plus inclinée.

Inclinaison à la fin de la courbe de charge. — Voici les allongements pour les deux derniers mètres :

319	246	225	223	221	222	221	214

Ainsi, bien que l'amplitude croisse à mesure que le numéro d'ordre du cycle augmente, la corde est de moins en moins déformable pour les charges finales. Ce fait est d'accord avec le suivant.

Inclinaison du début de la courbe de décharge. — Si l'on maintient la charge constante à partir d'un point quelconque de la courbe de charge, il y a un allongement dont la vitesse, d'abord très grande, diminue rapidement. Si, au lieu de maintenir la charge constante, nous la diminuons, il y a simultanément une tendance à l'allongement, du fait que la longueur actuelle ne correspond pas d'une manière stable à la charge actuelle, et une tendance au raccourcissement du fait que la charge diminue. La première tendance l'emporte toujours au voisinage de l'extrémité du cycle : mais l'allongement peut cesser presque immédiatement. On n'observe que l'effet total produit par la décharge de π.

Pour le premier et le deuxième cycle, il y a allongement très net quand on décharge de π; pour le troisième, le fil a la même longueur à l'extrémité de la courbe de charge et après décharge de π; au delà du sixième, il y a raccourcissement sensible.

Tangente d'inflexion sur les courbes de décharge. — L'inflexion a lieu pour une charge égale à 9π : le raccourcissement est, par mètre de chaîne :

822	1012	1015	1055	1115	1093	1124	1137

La tangente d'inflexion est de plus en plus inclinée.

Inclinaison à la fin de la courbe de décharge. — Voici les raccourcissements pour les deux derniers mètres de chaîne :

342	360	352	370	410	376	381	385

La variation de l'inclinaison de retour est faible.

Enfin, voici, pour fixer les idées, le premier cycle complet : on donne les allongements produits par l'adjonction de 2π :

Courbe de charge	173	257	382	558	694	736	733	673
	624	582	535	507	444	377	319	
Courbe de décharge	94	83	78	99	124	162	228	370
	734	1156	1644	1182	718	472	342	

Pour le caoutchouc, la déformation permanente est relativement faible. Il ne faut pas se laisser tromper par la grandeur des A_0 : ils indiquent un allongement du quart de la longueur, mais cet allongement est loin d'être tout entier permanent. En abandonnant la corde longtemps sous charge nulle, elle n'aurait conservé qu'un allongement permanent très inférieur à $\frac{1}{10}$ (*voir* n° 1).

L'expérience précédente montre à quel point les parcours réagissent les uns sur les autres; donc il y a une transformation interne plus ou moins permanente du caoutchouc qui résulte de la déformation.

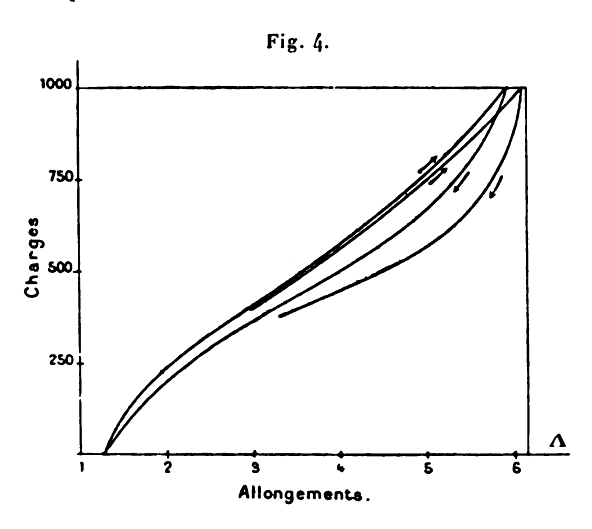
4. *Cycles fixés. Influence de la vitesse de charge et de décharge.* — Les expériences sont croisées sur un même fil : la vitesse est constante dans chaque série et variable d'une série à l'autre. Les cycles sont de 20π; la vitesse V est de 1^m en $4^s,5$; la vitesse v est de 1^m en 68^s. $T_0 = T_1 = 0$.

Voici les amplitudes successives mesurées sur la courbe de charge :

V..........	7980	8080	8175	8250	8290
v..........	8678	8791			
V..........	8709	8630	8660	8660	
v..........	9031	9067			
V..........	8935				

Prenons comme abscisses les numéros d'ordre des cycles et comme ordonnées les amplitudes. Tous les points v sont sur une courbe, tous les points V sur une courbe plus basse. Exception faite pour les cycles d'amplitude 8709 et 8935 qui sont les premiers des séries V : les points correspondants sont trop hauts. La distance des courbes est 300 en moyenne. Donc, toutes choses égales d'ailleurs, l'amplitude diminue quand la vitesse croît.

Fig. 4.



La forme des cycles est également modifiée : la figure 4 représente à droite un

cycle à vitesse V; à gauche, un cycle à vitesse v. L'épaisseur du dernier cycle est beaucoup plus petite que l'épaisseur du premier. Par exemple, pour le cycle (V) d'amplitude 8290, la différence maxima des abscisses (allongements) qui correspondent à une même ordonnée (à une même charge) est 850; pour le cycle (V) d'amplitude 8660, elle est 840. Pour les cycles (v) d'amplitudes 8791 et 9067, elle est au contraire 1746 et 1831. La différence entre les cycles porte principalement sur les courbes de retour.

Voici, pour fixer les idées, les courbes qui correspondent au cycle (V) d'amplitude 8660 et au cycle (v) d'amplitude 9067. $L_0 = 1870$, on donne les allongements produits par l'adjonction de 2π :

V.	Charge.......	370	650	940	1140	1190	1110	1000	860	760	640
	Décharge.....	310	440	680	990	1190	1380	1230	1090	780	570
v.	Charge.... ..	421	688	972	1218	1208	1121	1010	900	800	729
	Décharge.....	118	302	442	770	1325	1819	1769	1187	850	528

5. *Fixation des cycles : d'une série à l'autre on prend* T_0 *comme variable.* — On fixe des cycles de 15π sans arrêt au bout ($T_1 = 0$), mais avec un arrêt T_0 variable avec le fil. On appelle 1000 l'allongement sur la première courbe de charge; on donne les raccourcissements et les allongements pour les autres parcours en fonction de celui-là. Voici le résultat des expériences :

$T_0 =$ 0.........	Allongements......	1000	1017	1028	1039	1043
	Raccourcissements..	970	1010	1027	1038	1043
$T_0 =$ 30 minutes.	Allongements......	1000	1023	1036	1044	1051
	Raccourcissements..	968	1011	1023	1035	1039
$T_0 =$ 1 heure...	Allongements......	1000	1025	1037	1043	1051
	Raccourcissements..	969	1011	1023	1028	1037
$T_0 =$ 24 heures..	Allongements......	1000	1020	1032	1039	1046
	Raccourcissements..	968	1004	1016	1025	1033

Voici maintenant les moyennes des parcours aller et des parcours retour :

$T_0 =$ 0..................	985	1014	1028	1039	1043
$T_0 =$ 30 minutes...........	984	1017	1030	1040	1045
$T_0 =$ 1 heure.............	985	1018	1030	1035	1044
$T_0 =$ 24 heures...........	984	1012	1024	1032	1040

Ces moyennes sont à peu près les mêmes pour tous les fils. Ce résultat fort remarquable prouve à quel point la transformation qui résulte d'un parcours est stable, et à quel point aussi le fait que le fil a supporté une fois une certaine charge n'amène pas un état déterminé de la matière, la transformation continuant à se produire, à mesure que croît le nombre des parcours, quel que soit l'intervalle qui les sépare.

6. *Cycles fixés. On laisse le fil se reposer un certain temps sous charge nulle; on fixe à nouveau le même système de cycles.* — Voici le résultat des expériences pour deux fils et des cycles de 15π et de 8π.

Cycles de 15π. — Ils sont parcourus sans arrêt aux extrémités du cycle. Après quatre parcours, on laisse se reposer le fil sous charge nulle, en le retirant de l'appareil. On recommence la fixation au bout d'un temps T. Le Tableau suivant donne l'allongement sur la courbe de charge et le raccourcissement sur la courbe de décharge, par rapport à l'allongement sur la courbe de charge du premier cycle de la première série que nous appelons 1000 :

	Charge...........	1000	1015	1029	103
	Décharge.........	962	1009	1027	1038
T = 1 jour..	Charge...........	1040	1035	1042	1047
	Décharge.........	1014	1033	1039	1046
T = 11 jours.	Charge...........	1053	1048	1060	1062
	Décharge.........	1026	1045	1059	1062
T = 8 jours.	Charge...........	1075	1066	1074	1077
	Décharge.........	1051	1064	1072	1075

La fixation se traduit par la tendance à l'égalité des allongements sur la courbe de charge et des raccourcissements sur la courbe de décharge. La transformation de la matière se continue même lorsque le caoutchouc a subi seize parcours. On peut se demander ce que serait devenu l'allongement si les seize parcours avaient été faits d'affilée : il semble bien qu'il ne différerait pas beaucoup de celui que l'on a obtenu en espaçant les séries. Assurément, la moyenne des allongements de charge et de décharge pour le premier parcours de chaque série est plus petite que la même moyenne pour le dernier parcours de la série précédente : $1027 < 1038$, $1040 < 1046$, $1063 < 1051$. Mais, outre que ces différences sont petites, les courbes qui représentent ces moyennes en fonction du numéro d'ordre du parcours sont assez rapidement montantes au début de chacune des séries, et faiblement à la fin.

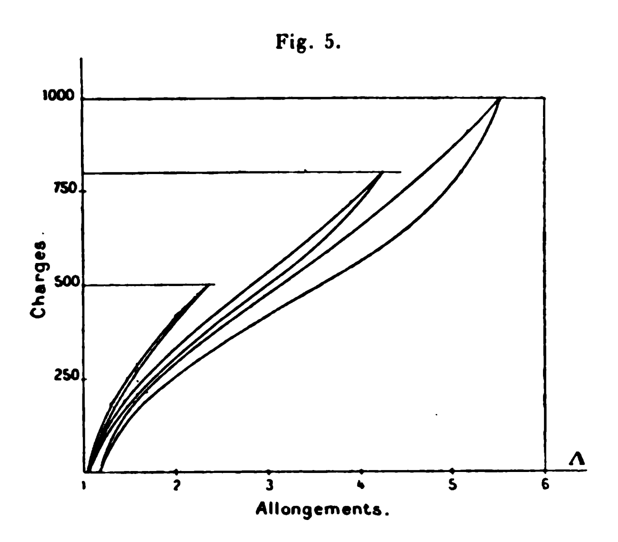
Cycles de 8π. — Même technique :

	Charge...........	1000	997	1011	1015
	Décharge.........	951	992	1007	1011
T = 1 jour..	Charge...........	1041	1023	1026	1031
	Décharge.........	999	1013	1024	1026
T = 11 jours.	Charge...........	1040	1035	1038	1045
	Décharge.........	1000	1026	1036	1043
T = 8 jours.	Charge...........	1051	1035	1046	1048
	Décharge.........	1010	1031	1044	1046

Mêmes conclusions.

7. *Cycles fixés, d'amplitudes variables, ayant une extrémité commune. Cycles décrits entre* o *et* $n\pi$. — Nous allons d'abord fixer les cycles *sur des fils différents* qui n'ont pas antérieurement servi. La figure 5 montre le résultat de

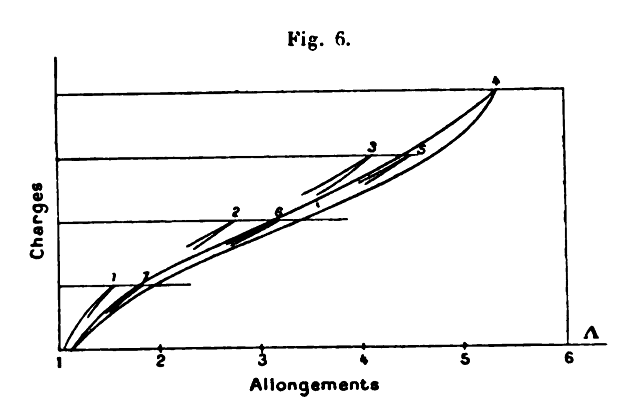
Fig. 5.



l'expérience. Les cordes ne sont jamais absolument comparables, mais les différences sont si grandes qu'on ne peut pas les imputer aux inégalités inévitables. Quand on fixe un parcours étendu, les parties du cycle qui correspondent aux faibles charges se trouvent notablement plus voisines de l'horizontalité que les parties correspondantes des petits cycles. Cependant, les déformations permanentes restent toujours faibles.

Le résultat est plus intéressant quand les cycles sont fixés *sur la même corde,* parce qu'on peut faire plus sûrement les comparaisons numériques (*fig.* 6).

Fig. 6.



On a fixé successivement sur une corde neuve des cycles de 5π, 10π, 15π, 20π, 15π, 10π, 5π. On n'a tracé sur la figure que le cycle 20π en entier, et l'on

s'est contenté des extrémités des autres pour éviter un encombrement de lignes inutiles.

Comme il est à peu près certain qu'un petit cycle fixé n'influe pas sensiblement sur la forme fixée d'un grand cycle décrit postérieurement, les cycles 1, 2, 3, 4 se disposent dans la figure 5 comme ils le faisaient pour des cordes différentes dans la figure 4. Mais il n'en est plus de même des cycles 5, 6, 7. L'influence du grand allongement et de la transformation qui en résulte se fait sentir : les parcours sont beaucoup plus inclinés.

Voici les amplitudes pour les divers cycles et leurs différences :

	Cycles de			
	5π.	10π.	15π.	20π.
Croissants..........	789	2623	4739	6711
Décroissants.......	1055	3176	5238	
Différences.........	334	447	501	

Si la différence absolue des amplitudes est plus grande pour les cycles de 15π que pour ceux de 5π, la différence relative est, au contraire, plus grande pour ces derniers.

Les cycles 5, 6, 7 sont plus voisins de l'horizontalité que les cycles correspondants 3, 2, 1; mais ils sont aussi plus minces; voici les différences maxima des abscisses correspondant à une même charge :

	Cycles de			
	5π.	10π.	15π.	20π.
Croissants...........	61	167	286	533
Décroissants.........	61	148	236	

8. *Cycles fixés d'amplitude variable, ayant une extrémité commune, décrits entre* 20π *et* $n\pi$. — On va d'une traite à la charge de 20π et l'on fixe des parcours entre cette charge et les charges 15π, 10π, 5π et o. Chaque expérience est faite sur une corde neuve.

$L_0 = 1870$ pour tous les fils. Voici leurs longueurs aux divers passages par la charge 20π, c'est-à-dire aux extrémités des quatre cycles qui ont été décrits. On donne de plus la différence des longueurs pour le premier et le quatrième passage :

Cycle 20– 0.	7367	7921	8131	8266	899
Cycle 20– 5.	7474	7960	8132	8252	778
Cycle 20–10.	7171	7330	7411	7475	304
Cycle 20–15.	7402	7557	7637	7688	286

Si les cordes étaient identiques, les nombres de la première colonne seraient égaux; ils diffèrent peu.

Ce Tableau montre que les cycles se fixent inégalement vite et d'autant plus vite qu'ils sont plus petits : la limite à laquelle tend la longueur est elle-même d'autant plus petite que le cycle est plus petit. Il ne faut pas oublier que le petit cycle correspond tout entier aux charges les plus grandes. Il était naturel que le cycle 0-5 se fixât plus vite que le cycle 0-20; il l'est beaucoup moins que le cycle 15-20 se fixe plus vite que le cycle 0-20. On aurait pu croire qu'en revenant aux faibles charges le fil se reposerait et retournerait aux grandes avec un allongement moins augmenté.

Nous trouvons ici un premier exemple d'un fait général qui se présentera sous bien des formes. Une variation de la charge facilite toujours l'allongement. Nous verrons qu'en un temps donné la corde peut s'allonger moins sous une charge constante égale à $n\pi$ que sous une charge variable entre 0 et $n\pi$ (comparer au n° 1 du Mémoire *Sur la réactivité du caoutchouc*).

Comparons maintenant les inclinaisons moyennes des parties correspondantes des cycles : on donne dans le Tableau suivant la moyenne des allongements sur les courbes de charge et de décharge des cycles fixés, entre 20π, 15π, 10π et 5π :

Allongement moyen entre	Cycle 20-0.	Cycle 20-5.	Cycle 20-10.	Cycle 20-15.
20-15	1507	1461	1229	984
15-10	2486	2384	2089	
10- 5	2520	2439		
5- 0	1378			

Les nombres diminuent de gauche à droite sur une même ligne. A mesure que le cycle est plus petit, il est moins horizontal, quelles que soient les parties correspondantes des cycles que l'on compare.

9. *Comparaison entre un grand cycle fixé et des cycles fixés de petite amplitude compris dans le grand.* — On commence par fixer un cycle de 24π (I); puis, sur le même fil, on fixe successivement des cycles de 6π ayant pour extrémités inférieures 0, 6π, 12π, 18π (série I), 12π, 6π, 0 (série II). On fixe enfin à nouveau le cycle de 24π (II). On compare les inclinaisons et les positions des petits cycles aux inclinaisons et aux positions des parties correspondantes des grands. On donne dans le Tableau suivant les allongements pour les cycles I et II entre 0 et 6π, 6π et 12π, etc. sur les courbes de charge et de décharge et les amplitudes des petits cycles correspondants :

Allongements entre	Cycle I. Charge.	Cycle I. Décharge.	Cycle II. Charge.	Cycle II. Décharge.	Série I.		Série II.	
0 et 6π..	1465	1801	1553	1844	1489	(90)	1545	(130)
6π et 12π..	2799	3459	2911	3760	2623	(1837)	2717	(1967)
12π et 18π..	2350	2368	2475	2430	2037	(4835)	1727	(6049)
18π et 24π..	1747	712	1846	744	678	(8151)		

La corde avait une longueur $L_0 = 1700$: on donne entre parenthèses la position des extrémités inférieures des deux séries de cycles fixés. Enfin, voici pour les grands cycles fixés les allongements qui correspondent aux charges 0, 6π, 12π, 18π, 24π sur les courbes de charge et de décharge :

Cycle I..	100	1565	4364	6714	8461	7749	5381	1922	121
Cycle II..	159	1712	4623	7098	8944	8200	5770	2010	166

Comparons d'abord entre eux les petits cycles des séries I et II. Les premiers ne diffèrent des seconds que par rapport aux opérations qui les ont précédés. On pourrait croire qu'après la fixation d'un cycle de 0 à 24π, c'est-à-dire après que le fil a déjà subi les plus fortes charges, le fait de fixer le petit cycle 18π-24π modifie assez peu le parcours fixé 12π-18π. Cependant, l'origine de ce cycle dans la première série est 4835 et son amplitude 2037; l'origine du même cycle de la série II est 6049 et son amplitude est 1727. *La différence entre ces cycles est de même nature et du même ordre qu'entre les parties correspondantes des courbes d'aller et de retour :* c'est ce que montre immédiatement le Tableau suivant.

On donne les cycles rapportés à la même origine :

Série I.	Charge.....	0	407	780	1124	1468	1765	2037
	Décharge...	0	463	873	1234	1548	1814	
Série II.	Charge.....	0	362	672	990	1262	1512	1727
	Décharge...	0	409	812	1111	1368	1579	

Le cycle de la série II forme un croissant plus incurvé que l'autre, de même que la courbe de décharge est, pour les mêmes charges, plus incurvée que la courbe de charge.

Les cycles ne semblent pas tendre l'un vers l'autre, autant qu'il est possible de juger d'une pareille question. Voici quelles sont les longueurs pour 18π, quand on fixe le cycle de la série I et quand on fixe le cycle de la série II :

Série I............	6840	6855	6874	6870
Série II...........	8253	7782	7767	7769

Le déplacement est très rapide d'abord, mais ensuite si lent qu'il est impossible de prévoir que les cycles puissent venir se confondre par la répétition.

Nous arrivons donc fatalement à cette conclusion : entre deux charges données, *il existe une infinité de cycles fixés qui dépendent des opérations antérieures;* et cela alors même que, pendant les opérations qui séparent les deux fixations, la corde n'a pas subi des charges plus fortes que celles qu'elle a subies avant la première fixation. On comprend l'importance de cette dernière proposition. Si, entre les deux fixations, le fil subissait des charges qu'il n'a jamais subies, on pourrait dire que les différences tiennent à une modification permanente due à ces charges, *à une sorte d'écrouissage qui, une fois acquis, ne peut être supprimé par d'autres déformations.* Il n'en est pas de même ici; les cycles de la série I, où l'on procède par déplacement vers la droite, sont toujours différents des cycles de la série II, où l'on procède par déplacement vers la gauche, alors même qu'on recommence plusieurs fois la série entière des opérations.

Il ne faudrait pas croire que les différences constatées tiennent à un mode incorrect de comparaison. Il suffit de construire une courbe avec les amplitudes moyennes des petits cycles fixés en ordonnées et les *allongements* qui correspondent à l'une de leurs extrémités en abscisses, pour voir qu'il existe encore une différence considérable entre les séries I et II. Les points obtenus, comme il vient d'être dit, se placent sur deux courbes nettement différentes.

Comparons maintenant les petits cycles aux parties correspondantes des grands : nous constaterons que les petits cycles sont toujours plus redressés, soit qu'on fasse la comparaison entre les mêmes charges, soit qu'on la fasse entre les mêmes allongements.

10. *Courbes de traction décrites avec arrêts intermédiaires.* — On a réalisé deux vitesses de charge : V correspond au passage de 1^m de chaîne en $2^s,35$; v au passage de 1^m de chaîne en 92^s. On décrit des cycles de 20π. Avec la première vitesse, il faut 94^s pour la charge et la décharge; avec la deuxième, il faut $61^m 20^s$. On s'arrange, au moyen de huit arrêts égaux, de manière que l'opération à grande vitesse dure exactement le même temps que l'opération à petite vitesse. Ces arrêts sont donc de 7 minutes et demie environ.

Ils sont disposés de telle sorte que, pour tous les parcours, $\int P\,dt$ soit le même : il suffit pour cela qu'ils aient lieu pour $2,5\pi$; $7,5\pi$; $12,5\pi$ et $17,5\pi$. Ainsi, dans le parcours à grande vitesse, $\frac{1}{8}$ du temps total se passe, par exemple, à la charge de $7^m,5$; dans le parcours à petite vitesse, ce même temps se répartit régulièrement entre des charges variant linéairement en fonction du temps entre 5^m et 10^m de chaîne.

On compare les parcours ainsi obtenus. On donne, dans le Tableau suivant,

les allongements dans le parcours sans arrêt v pour les charges qui ont été indiquées ci-dessus; au-dessous, on donne, dans le parcours avec arrêt, les allongements pour les mêmes charges au commencement et à la fin de l'arrêt :

Courbe de charge.

v....	579	2467	4822	6762
V...	530-569	2352-2529	4730-4849	6659-6851

Courbe de décharge.

v....	692	2653	5309	7104
V...	661-792	2602-2720	5230-5300	7033-7000

Ainsi, autant qu'il est possible de l'espérer dans de telles expériences, les deux courbes chevauchent l'une sur l'autre, de manière que la petite horizontale à charge constante se trouve précisément sur la courbe décrite à petite vitesse uniforme. L'abscisse de la courbe v est intermédiaire entre les abscisses de la courbe V qui correspondent à la même charge. Exception seulement au début des courbes de charge et de décharge et encore cette exception tient à ce que le cycle n'est jamais absolument fixé, et aussi qu'il faut un certain temps pour changer les vitesses.

Les deux dernières lignes du Tableau doivent être lues de droite à gauche. Donc, pendant le premier arrêt ($17,5\pi$), il y a un allongement consécutif à l'arrêt. Pour les autres arrêts, il y a raccourcissement. Ce sont des phénomènes tout à fait analogues à ceux que l'un de nous a trouvés pour les courbes de torsion des fils métalliques. Nous reviendrons d'ailleurs sur ces phénomènes.

Cette expérience a une grande importance théorique. On est toujours tenté d'exagérer l'importance des perturbations, des petites irrégularités dans la vitesse de charge, etc. C'est un moyen commode pour rejeter sur l'inévitable les irrégularités de ses expériences. Or, on ne peut imaginer un déréglage plus systématique que le précédent, et l'expérience prouve que son effet total est à peu près négligeable; le parcours conserve, en somme, même forme et même amplitude. Voici, par exemple, les amplitudes de quatre parcours; le premier, le second et le quatrième sont à la vitesse v, le troisième est à la vitesse V :

7230 7255 7269 7329

La suite régulière aurait donné, pour le quatrième, une amplitude voisine de 7283; la différence est de 46, soit 1 : 160. Mais le croisement n'est pas parfait; car il faut un certain temps pour changer les vitesses. De plus, l'influence des irrégularités de charge serait de moins en moins grande, à mesure que les arrêts

deviendraient plus courts et se répartiraient sur la courbe entière. On peut dire que leur action est rigoureusement nulle.

PARCOURS APRÈS RECUIT ET A TEMPÉRATURES ÉLEVÉES.

11. *Phénomènes entre* 100° *et* 150°. — L'expérience la plus grossière prouve que le caoutchouc se transforme considérablement au voisinage de 150°. Nous avons tenu à savoir quels sont les phénomènes, l'expérience ayant prouvé qu'ils restent analogues à des températures plus basses. Rendons-nous compte de ce que deviennent les propriétés mécaniques générales.

Le fil est placé dans une étuve sous charge faible; on le laisse prendre la température ambiante pendant 15 minutes; on charge alors d'un poids connu et l'on détermine la vitesse d'allongement sous charge constante. Elle diminue beaucoup moins vite qu'elle ne fait à basse température. Toutes choses égales d'ailleurs, elle augmente plus vite que la charge et croît très rapidement avec la température.

Pour avoir une idée de la variation de l'élasticité, on recommence l'expérience précédente; mais, à des intervalles réguliers, on supprime et l'on remet 100^g : on détermine l'amplitude du cycle ainsi décrit. On fait la même expérience à froid sur un autre fil et l'on compare. Voici, pour 140° et pour des charges totales P, les rapports R des allongements à chaud et à froid quand l'expérience a été réalisée plusieurs fois,

$$P = 100^g, \quad R = 1,28; \quad P = 200^g, \quad R = 1,54; \quad P = 300^g, \quad R = 2,00.$$

Ainsi, la transformation de la matière entraîne une diminution d'élasticité.

Il y a plus, à mesure que le fil s'allonge à chaud par l'effet de la tension, l'allongement et le raccourcissement pour une variation donnée de charge augmentent beaucoup plus vite que ne le veut la variation de section à supposer invariables les propriétés de la matière.

Enfin, comme nous l'avons déjà dit, il y a un allongement permanent. Il dépend de la charge et du temps que le fil est maintenu dans l'étuve. En 30 minutes sous 300^g à 140°, il atteint, par exemple, les deux tiers de sa longueur initiale. Dans les mêmes conditions, sous 300^g, la longueur du fil était 3,8 fois la longueur initiale. L'allongement élastique était donc encore plus de 3 fois l'allongement permanent.

L'expérience suivante montre que la matière se transforme par le fait, non seulement d'une température élevée, mais encore d'un allongement à cette température.

Plaçons le fil dans l'étuve, imposons-lui un certain allongement invariable et

déterminons comment varient les tensions en fonction du temps. Elles diminuent d'abord rapidement, puis de plus en plus lentement. Mais voici qui est plus curieux.

A mesure qu'on part d'un allongement plus grand, le diamètre du fil est plus petit. Considérons l'instant où pour tous les fils, inégalement allongés au début, la tension est la même. Si la matière qui les forme était aussi la même, la variation de tension serait plus rapide pour le fil d'abord le plus allongé, puisque son diamètre est plus petit : or, c'est le contraire qu'on observe. Donc le fait de s'allonger à haute température transforme la matière de manière à la rendre plus apte à supporter des charges. Par exemple, à 143°, si la tension initiale est telle que le fil supporte au début 100^g, en moins de 8 minutes la tension passe de 100^g à 50^g. Si la tension initiale est telle que le fil supporte au début 400^g, il faut 45 minutes pour que la tension passe de 100^g à 50^g. Tandis que, dans le premier cas, on arrive en 45 minutes à la tension de 10^g, on n'y arrive jamais si la tension initiale est 400^g; le fil a le temps de se durcir.

Il est difficile de préciser la nature des transformations éprouvées à haute température : la matière devient plus visqueuse, mais peu à peu le soufre en excès s'incorpore au caoutchouc, qui devient dur et cassant. La coupure du fil n'est plus collante.

12. *Effet d'un recuit entre* 100° *et* 150°. — *Influence de la durée du recuit.* — Les fils sont préparés par 5 cycles de 5π : on les porte dans l'étuve à 148°, on les maintient un temps variable et l'on recommence à décrire 5 cycles de 5π, 4 minutes après leur sortie de l'étuve. On compare les amplitudes l et l' des derniers cycles des deux séries :

	Durée du recuit				
	0h,5.	1h.	2h.	4h.	23h.
$(l'-l):l$	0,36	0,09	−0,26	−0,57	−0,81

Les cordes deviennent de plus en plus noires à mesure qu'elles séjournent davantage dans l'étuve. La surface diffère de l'intérieur, elle semble solidifiée. Après un séjour de 23 heures, la corde est gercée et fragile. On s'explique ainsi aisément le résultat obtenu pour les amplitudes.

Influence du temps écoulé depuis la sortie de l'étuve. — Étuve à 149°. Même préparation. Durée du recuit, 30 minutes :

	Temps après la sortie de l'étuve					
	0h.	0h,5.	1h.	2h.	24h.	48h.
$(l'-l):l$	0,35	0,33	0,31	0,27	0,08	0,08

Donc, l'état produit par le recuit, même à haute température, n'est pas permanent; une transformation se produit ensuite, qui dure des heures. La matière tend probablement vers un état limite.

Influence de l'amplitude du cycle sur l'effet du recuit. — Durée uniforme du recuit, 32 minutes. La corde est portée dans l'étuve 3 minutes après la sortie de l'appareil d'essai et refroidie pendant 57 minutes avant le second essai. On décrit 5 fois le cycle pour le fixer dans les deux essais :

	Cycles de					
	π.	3π.	5π.	10π.	16π.	20π.
$(l'-l):l$.........	0,39	0,33	0,28	0,19	0,03	0,03

L'allongement relatif du cycle diminue à mesure que l'amplitude du cycle augmente.

Les cycles sont plus aplatis après qu'avant le recuit; ils renferment une aire plus petite, quand le caoutchouc est recuit.

13. *Effet d'un recuit à* 100°. — A 100° le soufre ne fond pas encore, le caoutchouc se transforme moins profondément et moins vite qu'à 150°.

Influence de la durée du recuit. — Les fils sont préparés comme précédemment par 5 cycles de 5π; on les recuit le lendemain et l'on fixe à nouveau le même cycle 4 minutes après la sortie de l'étuve. L'amplitude du cycle augmente :

	Durée du recuit			
	$0^h,5$.	1^h.	2^h.	4^h.
$(l'-l):l$........................	0,31	0,34	0,41	0,52

L'effet est considérable et augmente avec la durée du recuit. *L'aspect des cordes n'a pas changé.* On s'explique que le résultat soit opposé à celui que l'on avait observé à 150°.

Influence du temps écoulé depuis la sortie de l'étuve. — Préparation : 5 cycles de 5π. Recuit le lendemain pendant 30 minutes. On fixe le même cycle des temps variables après la sortie de l'étuve :

	Temps écoulé					
	0^h.	$0^h,5$.	1^h.	2^h.	4^h.	24^h.
$(l'-l):l$.........	0,33	0,27	0,23	0,13	0,07	0,07

L'état acquis par le recuit n'est pas permanent. Il est curieux que les variations soient du même ordre après un recuit à 100° ou un recuit à 150°.

Influence de l'amplitude du cycle sur l'effet du recuit. — On fixe les cycles par 5 parcours. On recuit 30 minutes; on fixe à nouveau le cycle 65 minutes après la sortie de l'étuve :

	Cycles					
	π.	3π.	5π.	10π.	15π.	20π.
$(l'-l):l$.........	0,34	0,23	0,22	0,16	0,12	0,11

Contrairement à ce qui se passe à 150°, les cycles sont moins aplatis après le recuit qu'avant. En d'autres termes, la différence maxima des abscisses, pour une même charge, est plus grande quand le fil est recuit.

14. *Effet d'un recuit à 59°.* — On admettait généralement que le caoutchouc pouvait être chauffé jusqu'à 80° sans subir de modification permanente. Nous allons voir à quel point cette hypothèse est erronée.

Influence de la durée du recuit. — Même technique qu'au n° **11** :

	Durée du recuit						
	30^m.	1^h.	2^h.	4^h.	24^h.	51^h.	96^h.
$(l'-l):l$.	0,17	0,20	0,20	0,20	0,15	0,10	0,03

L'effet est de même sens qu'à 100°. Il y a tout d'abord accroissement de l'effet produit, puis diminution. Il ne résulte pas du tout de ces expériences que la transformation de la matière soit plus petite après 96 heures de chauffe qu'après 30 minutes. Le réactif que nous employons est complexe; rien ne dit que la même amplitude ne peut pas correspondre à des matières très différentes. Selon toute probabilité, un recuit prolongé ne détruit pas l'effet d'un recuit de courte durée : il en produit un autre, qui se traduit par des phénomènes inverses.

Influence du temps écoulé depuis la sortie de l'étuve. — Même technique qu'au n° **11**.

On donne aussi, dans le Tableau suivant, la variation relative $(e'-e):e$ de l'épaisseur du cycle, c'est-à-dire de la différence maxima des abscisses pour une même charge :

	Temps écoulé				
	0^h.	1^h.	4^h.	25^h.	50^h.
$(l'-l):l$..................	0,17	0,15	0,12	0,09	0,08
$(e'-e):e$..................	0,29	0,20	0,25	0,13	0,13

Ainsi, l'effet du recuit diminue non seulement en ce qui touche l'amplitude des cycles, mais encore leur épaisseur : ils s'aplatissent à mesure qu'augmente le temps écoulé depuis la sortie de l'étuve jusqu'à l'essai.

Influence de l'amplitude du cycle. — Même technique qu'au n° 11 :

	Cycles de					
	π.	3π.	5π.	10π.	15π.	20π.
$(l'-l):l$	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08	0,07

De même, le rapport des épaisseurs des cycles avant et après le recuit, grand pour de petits cycles, diminue à mesure que l'amplitude augmente. Le cycle est toujours moins aplati après le recuit qu'avant.

15. *Effet d'un refroidissement dans la neige carbonique.* — Nous avons répété des expériences analogues aux précédentes en remplaçant le recuit par un refroidissement dans l'anhydride carbonique solide. On fixait des cycles de 5π et de 15π. On conservait la moitié des fils comme témoins, l'autre moitié était maintenue 45 minutes, soit dans un tube métallique complètement entouré de neige carbonique tassée, soit à même la neige. En fixant à nouveau les cycles, on trouve les mêmes résultats pour les deux groupes. L'effet du refroidissement est donc nul.

16. *Cycles fixés à des températures différentes.* — Il faut tenir compte, dans les expériences suivantes, des faits précédemment observés. Puisque le recuit produit une modification plus ou moins permanente, les comparaisons doivent porter sur des phénomènes qui se produisent à chaud et à froid après un premier recuit. On supposera donc que le caoutchouc a été porté antérieurement pendant quelque temps à la température la plus élevée qu'il doit subir ensuite.

On fixe à 60° un cycle de 23π. $L_0 = 1520$.

Voici les amplitudes sur les courbes de charge et de décharge :

7770		7902		8002		8050	
	7530		7872		7981		8039

On laisse reposer 20 heures sous charge nulle. On croise alors systématiquement des cycles à 12° et à 60°. Voici les amplitudes sur les courbes de charge et de décharge.

12°	8143	7960	8290	8262
60	8207	8119	8173	8159
12	8589	8392	8583	8551.

Les cycles à froid sont moins redressés que les cycles à chaud.

L'effet de la température est plus marqué sur l'aire du cycle. Déterminons la différence maxima des abscisses des courbes de charge et de décharge pour les mêmes charges. Voici d'abord les résultats pour les cycles à 60° que l'on fixe au début de la série :

820 275 260 204

Voici maintenant les résultats pour les cycles croisés :

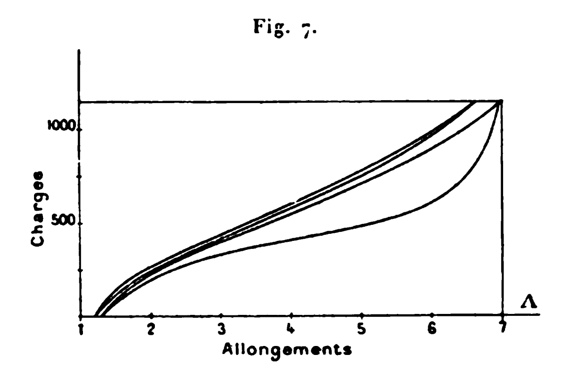
12°	1981	2335
60	295	209
12	2400	2418

La figure 7 donne un cycle à 12° et un cycle à 60°. Le cycle à 60° est beaucoup plus aplati.

L'expérience suivante montre quelles erreurs l'on ferait en ne tenant pas compte du recuit.

$L_0 = 1885$, cycles de 12π. On fixe les cycles à froid (10° environ). On décrit

Fig. 7.



4 parcours; voici, de 2m en 2m de chaîne, les allongements pour le premier, le troisième et le quatrième :

I.	Charge	0	252	651	1223	2018	2917	3829
	Décharge	170	535	1098	1856	2651	3394	
III.	Charge	197	488	960	1681	2548	3420	4206
	Décharge	208	618	1177	1972	2849	3640	
IV.	Charge	208	506	1000	1723	2591	3471	4268
	Décharge	217	614	1220	2011	2871	3671	

On chauffe à 62°; voici les 3 premiers parcours à cette température :

V.	Charge......	88	412	911	1643	2582	3588	4637
	Décharge....	177	571	1130	»	2885	3827	
VI.	Charge......	177	520	1048	1822	2762	3775	4786
	Décharge....	192	598	1205	1960	2939	3928	
VII.	Charge......	192	540	1084	1870	2823	3848	4832
	Décharge....	190	617	1212	2047	2986	3971	

Voici les amplitudes pour tous ces cycles :

10°..................	3829	3931	4009	4060
62°..................	4549	4609	4640	

On pourrait conclure sans précaution, et l'on a souvent conclu, que l'effet de l'élévation de la température était d'allonger le parcours et d'augmenter son épaisseur, ce qui résulte de la comparaison des cycles IV et V. Mais déjà le cycle VII est plus aplati que le IV.

L'expérience a été continuée. Après ces deux séries, on en a fait sept autres alternativement à 10° et à 62°; elles se composaient seulement de deux parcours et il s'écoulait 1 heure entre le début des parcours. Comme ceux-ci exigent 22 minutes environ, il restait 38 minutes pour amener le fil à la température indiquée. On donne les six derniers parcours, qui sont les XVI, ... et XXI :

XVI.	10°...	Charge......	177	538	1109	1960	3038	4138	5140
		Décharge....	296	777	1498	4421	3481	4427	
XVII.	10°...	Charge......	296	663	1274	2150	3218	4279	5229
		Décharge....	317	808	1522	2463	3531	»	
XVIII.	62°...	Charge......	200	560	1134	»	2948	3987	4950
		Décharge....	240	658	1294	2138	»	»	
XIX.	62°...	Charge......	240	607	1189	1999	2997	4025	4988
		Décharge....	246	675	1275	2090	3122	4101	
XX.	10°...	Charge......	204	578	1181	2051	3148	4251	5272
		Décharge....	317	816	1544	2502	3550	4521	
XXI.	10°...	Charge......	317	697	1324	2229	3319	4357	5359
		Décharge....	330	840	1560	2530	3618	4578	

Voici les amplitudes pour tous ces cycles :

10°.................	4963	4933
62.................	4950	4748
10.................	5068	5042

Il suffit de retrancher les nombres placés l'un sur l'autre pour le même cycle, pour voir à quel point le cycle fixé à chaud est plus aplati. Voici les différences pour les parcours XIX et XXI :

Différences.	XIX	16	68	86	91	123	76
	XXI	13	143	236	301	299	221

Même pour les séries régulièrement croisées, il faut ne comparer que des cycles véritablement correspondants pour avoir des résultats réguliers. Ainsi, le premier cycle à chaud a une amplitude supérieure au précédent cycle à froid. Enfin, il ne faut jamais oublier que croiser des expériences revient à imaginer un ensemble périodique où interviennent plusieurs variables, et que les phénomènes dépendent de l'ensemble tout entier.

Si donc on fait varier l'une quelconque des conditions formant l'ensemble périodique, les résultats se trouvent modifiés. Il serait donc absurde de dire que les amplitudes d'un cycle donné varient dans tel rapport quand la température passe de θ_0 à θ_1 sans spécifier tout ce qui définit l'ensemble périodique, sans dire par exemple quel est le nombre des parcours, quel temps s'écoule entre leur description aux deux températures, etc.

17. Voici une expérience faite à 14° et 100° qui montre qu'à cette dernière température la transformation de la matière est déjà considérable.

$L_0 = 1870$. Cycle de 10π.

Il s'écoule 45 minutes entre le parcours des cycles ; la température est modifiée aussitôt le parcours effectué.

Il faut environ 30 minutes pour que le fil atteigne la température définitive ; mais comme la description du parcours exige moins de 10 minutes, on a largement le temps.

On donne, dans le Tableau suivant, les allongements de 2^m en 2^m de chaîne :

I.	100°...	Charge	0	292	719	1332	2150	3137
		Décharge	170	532	2049	2689	2418	
II.	14°...	Charge	153	518	1081	1910	2920	3970
		Décharge	249	711	1300	2220	3158	
III.	100°...	Charge	158	490	983	1690	2591	3601
		Décharge	337	760	1322	2050	2853	
IV.	14°...	Charge	317	744	1409	2360	3472	4612
		Décharge	417	950	1704	2690	3692	
V.	100°...	Charge	317	700	1290	2116	3158	4304
		Décharge	563	1068	1719	2579	3500	

On constate, comme précédemment, que le cycle à chaud a une amplitude moindre que le cycle à froid. Voici ces amplitudes, prises sur les courbes de charge :

14°		3817		4295	
100°	3137		3443		3987

Mais il y a un allongement subpermanent assez grand à chaud pour que les

parcours soient alors plus épais. Voici, d'une part, les épaisseurs maxima; d'autre part, les distances des points de départ et de retour à charge nulle. Les parcours sont très loin d'être fermés :

14°....................		320		330
100....................	357		360	486
14....................		96		100
100....................	170		179	246

18. *Influence de la vitesse sur la forme des cycles à chaud.* — Pour des raisons que l'on comprendra quand nous aurons étudié la réactivité, il était important de savoir si à chaud la vitesse influe sur la forme des cycles. Les expériences ont été faites à 70°. La vitesse V est de 1m de chaîne en 4 secondes et demie, la vitesse v est de 1m en 68 secondes. Les cycles sont de 18π.

On croise sur le même fil. On donne, dans le Tableau suivant, les amplitudes des parcours sur les courbes de charge. $L_0 = 1874$:

V..........	7070	7150	7210	7305	7340	7375	7420
v...........	7631	7719					
V..........	7701	7660	7700	7690	7700		
v...........	7912	8008					
V..........	7947	7890	7920	7910	7885	7870	

Il est incontestable que la vitesse influe cependant beaucoup moins à chaud qu'à froid.

Nous retrouvons, d'ailleurs, pour les premiers parcours des séries V, les mêmes particularités qu'à froid. Pour bien se rendre compte de la variation due à la vitesse, on construira une courbe en prenant les amplitudes comme ordonnées et le numéro d'ordre des parcours comme abscisses.

De même qu'à froid, l'épaisseur des cycles est moindre à grande vitesse qu'à petite; mais, sur l'épaisseur aussi, l'influence de la vitesse est considérablement moindre à chaud qu'à froid.

La comparaison de la manière suivant laquelle les cycles se fixent dans les différentes séries V est intéressante. Dans la première, l'amplitude va constamment en augmentant; dans les autres, elle diminue d'abord beaucoup pour rester à peu près stationnaire. Ici encore, les expériences à grande et à petite vitesse réagissent les unes sur les autres, et la méthode des expériences croisées se présente avec une complexité qui la rend assez hasardeuse. Nous avons un ensemble périodique d'opérations, et l'on ne peut pas distraire une seule de ces opérations sans modifier les résultats de l'ensemble entier.

SUR LA

RÉACTIVITÉ DU CAOUTCHOUC VULCANISÉ,

PAR MM. H. BOUASSE ET Z. CARRIÈRE.

HISTORIQUE.

Pour bien faire comprendre en quoi nos recherches diffèrent de celles qui les ont précédées, nous allons résumer le Mémoire de Kohlrausch (*Pogg. Ann.*, t. CLVIII, 1876). Il est classique en Allemagne, et l'on peut dire que les nombreux auteurs qui se sont occupés du caoutchouc se sont imprégnés de son esprit et n'ont fait qu'en retrouver les résultats, qui sont d'ailleurs pour la plupart dans le Mémoire de Weber. On ne saurait conclure de là qu'ils soient inattaquables dans leur interprétation générale; cette concordance prouve tout au plus que Kohlrausch observait bien, ce dont personne n'a jamais douté, et que ses élèves et continuateurs se sont placés dans les mêmes conditions expérimentales. A quel point ces conditions sont particulières, par quelles limites étroites il a borné la question, c'est ce que le présent Mémoire montrera.

Kolhrausch emploie du caoutchouc de jouets : sa section est carrée, de $0^{mm},9$ de côté. Un mètre pèse $0^{g},98$. La densité est 1,2; ce qui prouve que le caoutchouc contenait passablement de matières étrangères. Au fil est constamment attaché un petit plateau pour placer des poids, pesant lui-même $4^{g},1$; sous cette charge la longueur du fil est $2^{m},30$. Avant le commencement des recherches il était tendu de 60^{cm} pendant 20 minutes et dès lors abandonné à lui-même. *Remarquons que c'est le même fil qui va servir pour toutes les recherches.*

RÉACTIVITÉ APRÈS DES ALLONGEMENTS OU DES SURCHARGES DE PEU DE DURÉE.

On saisit le fil *à la main,* on l'allonge de 1 à A (*voir* pour cette notation le Mémoire précédent), on maintient l'allongement pendant 1 minute et l'on ramène le fil à sa position naturelle, *rapidement mais avec prudence.* Après 10 secondes ses oscillations sont amorties et l'on commence les lectures. Enfin après 30 minutes le fil revient à sa longueur initiale à moins de 1^{mm} près; on prend cette position comme position d'équilibre et l'*on y rapporte le résultat* de toute l'opération.

On appelle x les allongements temporaires du fil par rapport à la longueur avant le commencement de l'expérience.

Entre deux expériences on met un temps tel que la réactivité en 50 minutes soit négligeable. Ici Kohlrausch pose donc, comme hypothèse, que le fil revient à un état bien déterminé et toujours le même, quand la réactivité est devenue négligeable, *ce qui est entièrement faux*.

Kohlrausch prend l'allongement pour paramètre variable de ses expériences et cherche une formule pour les représenter.

Il s'arrête à l'expression suivante $x = \frac{c}{t^\alpha}$, où c et α sont des fonctions de A. Pour $t = 0$, on a $x = \infty$; mais il ne fait servir la formule qu'à partir de 10 secondes, c'est-à-dire de $t = 0,167$; il prend la minute pour unité de temps.

Voici donc précisé le point de vue de Kohlrausch : il pose comme hypothèse que les opérations sont indépendantes les unes des autres, qu'il suffit d'attendre un temps suffisant pour que la matière du caoutchouc revienne à son état initial; conséquemment qu'il y a lieu de chercher une formule où intervienne seule l'opération actuelle. De plus, les opérations elles-mêmes sont mal définies : il ne suffit pas de dire que les allongements et raccourcissements se font rapidement mais avec prudence (*rasch aber behutsam*). Quant à la formule choisie, nous prouverons qu'elle n'est pas générale et qu'à supposer qu'elle représente les résultats de Kohlrausch, on peut imaginer une infinité de techniques où elle est grossièrement erronée.

A la vérité nous sommes en présence d'un ensemble complexe d'opérations qui réagissent toutes les unes sur les autres, et l'on ne peut rien modifier sans tout modifier plus ou moins.

RÉACTIVITÉ SOUS L'INFLUENCE D'UN CHANGEMENT PERMANENT DE CHARGE.

On augmente ou l'on diminue brusquement la charge de 1^g, 2^g, 4^g. On détermine la manière dont le fil s'approche peu à peu de sa nouvelle position d'équilibre. La durée du phénomène est ici considérable et se chiffre par semaines. Il serait peut-être plus simple de dire qu'il n'y a pas de position d'équilibre, mais c'est une affaire de mots sans importance.

Surcharge. — Soit (*fig.* 1) la courbe des allongements OAB : pour 4^g Kohlrausch la représente par l'équation

$$y_4 = 0,0767 - \frac{0,0241}{t^{0,109}},$$

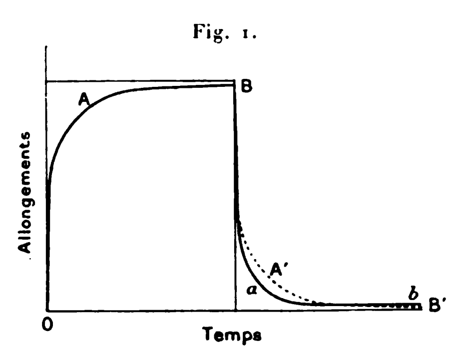
y_4 est l'allongement en fonction de la longueur initiale prise pour unité; l'unité de temps est la minute. Pour $t = \infty$, le fil se serait allongé de 0,0767 de sa longueur

initiale. Pour des poids autres que 4^g, il trouve des courbes semblables à celle qui correspond à cette charge. On aurait, par exemple,

$$y_4 = 2,16 y_2 = 4,41 y_1.$$

La formule donnerait $y = -\infty$ pour $t = 0$; mais on ne s'en servira qu'à partir

Fig. 1.



d'un temps tel que y soit positif, ce qui représente une très petite fraction de seconde : $0^s,0015$. Il n'y a donc aucun inconvénient à employer l'expression précédente.

Décharge. — Kohlrausch énonce la loi suivante : les allongements et les raccourcissements qui suivent la charge et la décharge sont égaux pour un même poids pourvu que l'allongement soit relativement petit. Cependant, il remarque, après Weber, que cette loi est insuffisante et que le raccourcissement est toujours plus rapide que l'allongement. La courbe n'est pas BA'B' identique à OAB (*fig.* 1), mais B*ab*; de plus il peut intervenir un allongement permanent.

Si, au lieu de se borner aux très petits allongements, généralement très inférieurs à $\Lambda = 2$, Kohlrausch avait poussé ses expériences jusqu'à $\Lambda = 6$, 7 ou 8, il n'aurait même plus eu l'idée de donner la loi d'égalité, même comme première et grossière approximation. Cependant, pourquoi borner son étude aux petits allongements et quel intérêt présente cette limitation des phénomènes à la soi-disant élasticité parfaite qui n'existe jamais?

Influence de la température. — Kohlrausch compare les réactivités après des allongements de 160^{mm} pendant 1 minute : une des expériences est faite à 9°, l'autre à $17^o,3$. Elles donnent des courbes de même forme; on peut les représenter par l'expression $x = ct^{-\alpha}$, où α reste le même. Les coefficients c sont dans le rapport 3,2; le plus grand correspond à 9°, ainsi la réactivité décroît avec la température, à l'inverse de ce qui se passe pour les métaux.

Nous verrons plus loin combien peu une telle expérience est convaincante.

Il reprend la même étude en imposant une surcharge de 2^g. Voici les conclusions :

La température a une influence énorme. A haute température les allongements initiaux sont beaucoup plus grands qu'à basse température; mais les différences décroissent vite, on peut admettre qu'elles s'annulent et qu'après quelques jours dans toutes les séries l'allongement est le même.

Les mêmes phénomènes se présentent après une brusque décharge. Voici d'ailleurs les nombres de deux séries pour fixer les idées. Surcharge 2^g :

Temps en minutes.	0,25.	0,5.	2.	5.	10.	1440.
	mm	mm	mm	mm	mm	mm
Allongements à 19°,5...	52,0	54,1	57,4	61,0	62,5	75,9
Allongements à 7°,6...	33,5	37,4	45,4	49,5	»	»

Entre $0^m,25$ et 5^m, l'allongement à 19°,5 est 9,0; à 7°,6 il est 16,0.

Excepté en ce qui a trait au sens de la variation de la réactivité avec la température, les conclusions précédentes sont singulièrement contestables.

Kohlrausch dit que les résultats d'Exner, sur la diminution de la vitesse de propagation du son dans le caoutchouc, quand la température s'élève, concordent avec l'influence constatée de cette élévation sur la grandeur de la réactivité. On ne voit pas bien en quoi ces questions sont connexes.

RÉACTIVITÉS DUES A DES DÉFORMATIONS CONSÉCUTIVES DE SENS OPPOSÉS.

C'est là certainement la partie la plus neuve et la plus intéressante du Mémoire de Kohlraush. Le caractère général de la réactivité, dit-il, est qu'une déformation dont elle est cause diminue d'autant plus lentement qu'il s'est écoulé plus de temps depuis la déformation qui lui a donné naissance (déformation primaire). Superposons plusieurs réactivités sur le même corps; on peut s'arranger de manière qu'il se déforme spontanément dans un sens puis dans l'autre. On impose par exemple une déformation grande ou longue et ensuite une déformation petite ou courte de sens contraire; on abandonne ensuite le corps à lui-même; on peut s'attendre à voir la réactivité qui provient de la seconde déformation l'emporter d'abord. Mais son effet diminue vite et, pour des rapports convenables entre les déformations primaires, la réactivité due à la première de ces déformations peut réapparaître. La déformation spontanée du corps change alors de signe.

Pour intéressantes que soient ces considérations, Kohlrausch n'est resté qu'à la surface de la question, car le seul exemple qu'il nous donne comporte deux changements de signe et non pas un seul, comme il le croit.

Il utilise le caoutchouc qui lui a toujours servi et qui portait d'une manière permanente une charge de $4^g,1$. Il diminue cette charge à 4^g qu'il maintient pendant 6 minutes. Il raccourcit alors à la main de 40^{mm} pendant 1 minute, ce qui

correspond à une nouvelle décharge et abandonne enfin le fil à lui-même. Il commence par s'allonger pendant 90^s, puis se raccourcit.

Si Kohlrausch avait attendu un temps suffisant, il aurait vu le fil s'allonger à nouveau. Nous montrerons comment on peut systématiquement reproduire ces inversions de sens doubles.

Expérience de Pülfrich (*Wied. Ann.*, t. XXVIII, 1886). — Pülfrich s'est proposé d'étudier les phénomèmes de réactivité sur un tube de caoutchouc, en déterminant simultanément les variations de longueur et de diamètre. Il s'agissait de discuter sous une de ses faces la question du coefficient de Poisson. Nous ne faisons que signaler ces expériences, parce que, au point de vue où nous sommes, ni dans la méthode, ni dans les résultats, elles n'ont apporté quelque chose de neuf. Nous y reviendrons quand nous rencontrerons dans un prochain Mémoire le coefficient de Poisson.

DESCRIPTION DES APPAREILS EMPLOYÉS.

On peut reprocher aux physiciens qui se sont occupés du caoutchouc, outre des idées erronées sur la nature du phénomène qu'ils étudiaient, une technique défectueuse. Cette technique était d'ailleurs la conséquence de leurs idées. Nous ne pouvons plus nous contenter d'opérations à la main, fussent-elles conduites *avec prudence, behutsam;* il s'agit d'obtenir des déformations parfaitement définies, ne serait-ce que pour les reproduire identiques à elles-mêmes.

L'appareil employé est représenté schématiquement (*fig.* 2). Le caoutchouc est pris entre deux pinces. La pince supérieure est fixée dans l'axe d'un tronc de cône de laiton qui se place dans un tronc de cône creux, lui-même fixé dans une épaisse planche à $3^m,50$ au-dessus du sol. Grâce à cette disposition on peut aisément régler le caoutchouc en azimut, ce dont on va voir la nécessité.

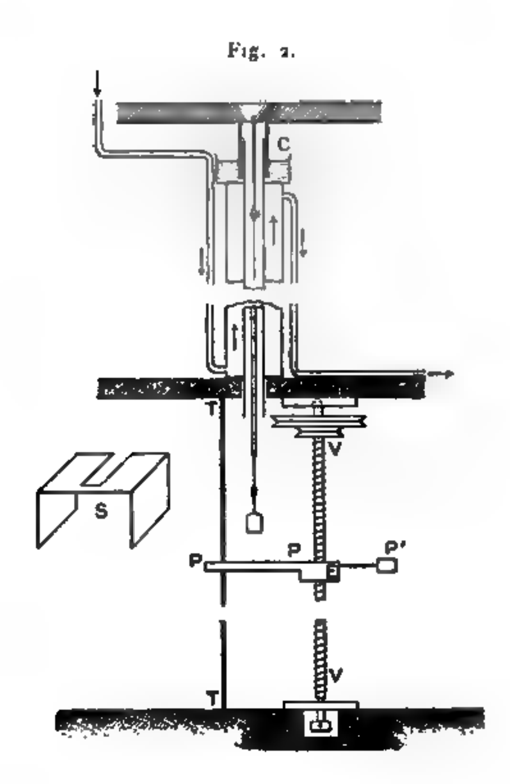
La pince inférieure supporte une légère règle de bois à laquelle seront suspendus des poids par l'intermédiaire de crochets. Une plate-forme PP peut être animée d'un mouvement vertical, grâce à la rotation de la vis VV dans l'écrou E; elle est équilibrée par un contrepoids P' et guidée par une tringle verticale TT qui la traverse à frottement doux.

Pour mettre le caoutchouc en charge, on fait descendre la plate-forme d'un mouvement uniforme, en entraînant l'une des poulies qui sont fixées à la vis. Le caoutchouc s'allonge avec une vitesse constante jusqu'à ce que le poids abandonne la plate-forme. A partir de ce moment le fil s'allonge à charge constante.

Pour étudier la réactivité à haute température, le caoutchouc est entouré d'une double enceinte formée de deux tubes de laiton concentriques; un courant d'eau froide ou chaude traverse l'espace annulaire. L'eau est fournie par un réservoir,

et amenée soit directement soit à travers un appareil à ailettes chauffé au gaz, qui la porte à une température fonction de la vitesse d'écoulement. Une chicane remplie

Fig. 2.



d'huile C empêche les courants d'air verticaux de se produire autour du caoutchouc en expérience.

La vis a $1^m,40$ de long; il en est de même de la partie du tube qu'il est possible de chauffer. La hauteur totale de l'appareil est donc voisine de $3^m,50$. On peut allonger de 6 fois sa longueur un caoutchouc de 20^{cm}.

On lit dans une lunette les divisions de la règle à un dixième de millimètre près; c'est une approximation largement suffisante.

Il est possible, grâce à un inverseur de vitesse, d'imprimer aux poulies un mouvement dans l'un ou l'autre sens, ou de les arrêter brusquement; on peut d'ailleurs faire varier la vitesse de 1 à 10 en utilisant des transmissions convenables. La vitesse du moteur est maintenue exactement uniforme par un régulateur de Watt.

Pour étudier la réactivité sur une courbe de décharge (n° 9), il est nécessaire de supprimer une partie seulement de la charge. On utilise un support S représenté à gauche de la figure 2 et qui se place sur la plate-forme P. La charge est divisée en deux, P_1 et P'_1; P_1 repose sur la plate-forme, P'_1 sur le support S; elles sont reliées par une cordelette dont la longueur est de quelques centimètres supérieure

à la hauteur du support S. Quand la plate-forme descend, P'_1 se trouve d'abord suspendu au fil, puis P_1. On enlève alors le support S. Pendant la décharge, P_1 est rencontré d'abord par la plate-forme; il suffit d'arrêter le mouvement pour maintenir la tension constante égale à P'_1. Cette technique peut se généraliser et s'appliquer à trois ou plusieurs poids successifs.

Enfin il peut être nécessaire d'imposer au fil des tractions rythmées petites et nombreuses. La pince supérieure est alors fixée à l'extrémité d'une tige métallique horizontale qui tourne autour d'un axe horizontal placé en son milieu. Sa course est limitée par deux vis. Le poids des pinces, de la règle de bois et de la charge que supporte le caoutchouc est à peu près équilibré par un poids qui est suspendu par un fil métallique à l'autre extrémité de la tige et qui plonge dans un vase plein d'huile. Une armature de fer est soudée à cette sorte de fléau et peut être attirée par un électro-aimant sur le circuit duquel se trouve une pile. Une horloge ou un métronome le ferme à des intervalles de temps égaux et connus. On obtient ainsi indéfiniment une oscillation verticale à l'extrémité supérieure du caoutchouc, dont l'amplitude peut varier de 0^{mm} à 5^{mm}.

Notations. — La charge que supporte toujours le fil en expérience (pince et règle) est de 65^g; nous la désignerons par P_0. Nous désignerons par P_1 la charge qu'on ajoute.

T_0 est le temps passé sous la charge invariable P_0; T_1 est le temps passé sous la charge constante P_1. La longueur initiale du fil est L_0, généralement mesurée sous P_0 à moins d'indications contraires : L_0 représente aussi la longueur au commencement des cycles; L_1 est la longueur au commencement de l'arrêt sous P_1, L'_1 est la longueur à la fin de l'arrêt sous P_1. Nous représenterons par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, les allongements sous P_1, dans les intervalles formés par les temps 0^s, 30^s, 1^m, 2^m, ... formant (sauf le premier) une progression géométrique de raison 2. Enfin Δ est l'allongement total entre 30^s et T_1; on donne à cet allongement une importance particulière, parce qu'il est le plus grand qu'on puisse déterminer avec rigueur. La longueur L_1 n'est pas déterminée avec une très grande précision; au moment où la charge devient constante, la vitesse d'allongement ne varie pas brusquement. Il est donc impossible de dire à un dixième de millimètre près quelle est la valeur de L_1 et par conséquent quel est l'allongement total pendant l'arrêt T_1. La même difficulté n'a pas lieu entre 30^s et T_1.

A moins d'indication contraire, la vitesse uniforme d'allongement pendant la mise en charge est de 1^m en 173^s. De même, à moins d'indication spéciale, on opère à la température ordinaire du laboratoire. Le caoutchouc est employé sous forme de cordes rondes de 4^{mm} de diamètre; sa densité est 0,984; il a été fourni comme ne contenant que de la gomme et du soufre. Il est gris clair et légèrement poudreux à la surface; il s'allonge sans céder de 7 à 8 fois sa longueur.

Nous poserons $\Lambda = L : L_0$.

A moins d'indication contraire, les longueurs sont énoncées en dixièmes de millimètre.

RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES.

1. *Allongement sous charge constante aux extrémités d'un parcours. Fixation du cycle.* — $P_1 = 500^g$; $T_1 = 32^m$, $T_0 = 0$.

On décrit des cycles dans ces conditions. Voici le résultat de l'expérience :

L_0	3230	3660	3700	3730	3790	3750	3790	3790
L_1	7500	8290	8440	8520	8665	8680	8710	8730
Δ_1	240	108	96	92	92	94	89	90
Δ_2	98	38	34	36	33	35	32	33
Δ_3	111	38	35	35	32	36	36	35
Δ_4	117	39	35	33	32	33	31	32
Δ_5	117	40	33	28	27	28	29	29
Δ_6	114	44	34	30	25	25	24	24
Δ_7	112	49	36	32	24	24	25	23
Δ	669	250	207	194	173	181	179	176
L'_1	8409	8648	8743	»	8930	8955	8978	8996

Entre le quatrième et le cinquième parcours, le temps T_1 a été 128^m. On a eu pour le quatrième parcours $\Delta_8 = 40$, $\Delta_9 = 56$. Au moment de la décharge, L'_1 était donc égal à 8902.

1° La loi énoncée par un de nous pour les fils métalliques, à savoir que les allongements sont sensiblement égaux dans des intervalles de temps en progression géométrique, est encore approximativement vérifiée, en tenant compte, bien entendu, de toutes les restrictions apportées à cet énoncé. (*Voir* le Mémoire *Sur les courbes de déformation des fils métalliques*, Chap. VIII.)

Entre 16^m et 32^m par exemple, l'intervalle est 32 fois plus grand que l'intervalle compris entre 30^s et 1^m; pourtant Δ_7 et Δ_2 ne diffèrent que du tiers ou du quart de leur valeur. En tous cas les expériences satisfont infiniment mieux à la loi $L = A + B\log(t + \tau)$ qu'aux lois proposées par Kohlrausch qui donnent lieu à des calculs aussi vains que compliqués.

2° Le phénomène est considérablement modifié par le premier parcours : cette modification ne disparaît pas par le repos sous charge nulle, même prolongé.

3° Considérons le quatrième parcours; on devrait trouver pour Δ_8 et Δ_9 des nombres faiblement croissants; on trouve 40 et 56. Donc, si l'on augmente T_1, les nouveaux Δ se rapprochent de plus en plus des Δ de même numéro d'ordre qu'on aurait trouvés pour le premier parcours, si l'on avait allongé le temps T_1. En d'autres termes, si après le quatrième parcours on augmente suffisamment T_1

pour observer des Δ_n de numéros d'ordre élevés, ils tendent vers les valeurs qu'auraient eues les Δ_n du premier parcours.

On s'explique ainsi la croissance des Δ du second parcours qui se fait dès à partir de Δ_2.

Pour le troisième et le quatrième, il y a croissance de Δ_6 à Δ_7, mais plus faible.

4° Pour le cinquième parcours Δ est plus petit : cette diminution tient à l'augmentation de T_1 à la fin du quatrième. Puis Δ augmente pour le sixième, pour décroître régulièrement ensuite pour les septième et huitième, la fixation se faisant toujours par une diminution de Δ.

L'influence de l'allongement T_1 se montre aussi par la notable diminution des derniers Δ pour les parcours suivants.

A elle seule cette expérience suffit pour prouver à quel point les idées de Kohlrausch et de ses émules sont erronées. Comment pourrait-il venir à l'idée de calculer des paramètres numériques pour un phénomène aussi complexe? Ne voit-on pas, jusqu'à la dernière évidence, la réaction des parcours les uns sur les autres et le souvenir que garde la matière des précédentes modifications?

5° L'allongement est toujours plus grand, si la charge croît et décroît entre P_0 et P_1, que si elle conserve la valeur constante P_1. Extrapolons pour le premier parcours. Pour T_1, $L'_1 = 8409$. Si l'on attendait jusqu'à $T_1 = 256$, la longueur serait $8409 + 336 = 8745$, en admettant $\Delta_8 = \Delta_9 = \Delta_{10} = 112$. Or on atteint cette longueur à la fin du troisième cycle, auquel on parvient 100 minutes environ après le commencement de l'arrêt sur le premier; on gagne donc 156 minutes environ. De même, il faudrait à charge constante un temps énorme pour parvenir à 8996.

2. *Réactivité en fonction de la charge.* — Chaque expérience est faite sur un fil différent. Vitesse uniforme d'allongement pendant la mise en charge : 1^m en 173^s. On a représenté, figure 3, l'allongement Δ entre 30^s et 32^m. La longueur des fils sous charge nulle est de $0^m,25$, les Δ sont donnés en millimètres. Pour fixer les idées on a représenté par un trait interrompu les allongements totaux jusqu'au temps 32^m après l'établissement de la charge.

Par exemple, imposons 1000^g; entre 30^s et 32^m l'allongement est de $0^m,077$; à ce moment le fil s'est allongé de $1^m,02$; sa longueur totale est de $1^m,27$ et $\Lambda = 5$. On remarquera la forme singulièrement complexe de la courbe qui représente les Δ : nous l'avons vérifiée par de nombreuses expériences et elle ne semble pas douteuse. Elle présente trois points d'inflexion et un maximum. Il est bien entendu que la technique influe notablement sur la position de ces points et que les nombres ne sont que pour fixer les idées.

La loi suivant laquelle les allongements à charge constante dépendent du temps est variable tout le long de la courbe. Étudions la variation des Δ_2, Δ_3, ...

Si la charge est petite, ils sont à peu près constants ou légèrement décroissants. Quand la charge croît, un maximum apparaît. Il a lieu pour un numéro d'ordre d'abord croissant. Par exemple, pour 300^g, c'est Δ_3 qui est maximum; pour 500^g, c'est Δ_4. Puis, jusqu'à 1000^g, le maximum correspond à un numéro supérieur à 7. Comme les expériences n'étaient continuées que jusqu'à 32^m, on ne l'observait pas : les Δ_i croissaient continuellement à partir de Δ_2.

Au-dessus de 1000^g, le maximum réapparaît dans le champ de l'expérience et se produit pour un Δ_i de numéro d'ordre i décroissant. Enfin, quand la charge est suffisamment élevée, à 1500^g, par exemple, les Δ_i décroissent continuellement. Le maximum a disparu.

On peut donc avoir, entre 30^s et 32^m, des Δ égaux pour deux charges différentes, mais composés de Δ_i entièrement différents, par exemple, toujours croissants pour la plus faible charge, toujours décroissants pour la plus forte.

Dans toutes les expériences effectuées avec notre technique, Δ_1 (entre 0^s et 30^s) est toujours plus grand que Δ_2 (30^s à 1^m).

Mêmes expériences sur un fil unique. — Ces expériences ont été reprises sur un fil unique. On impose la charge P_1 pendant un temps T_1; on revient à la charge P_0, on attend un temps T_0, puis on recommence avec une charge P_1 plus grande et ainsi de suite. Il est clair que les résultats numériques dépendent de la loi de variation des charges P_1 et des temps d'arrêt T_1 et T_0. L'allure générale du phénomène reste la même que si l'on emploie pour chaque expérience des fils différents. Par exemple, on a pris pour les charges P_1 la série arithmétique 100, 400, 700, 1000, 1300; $T_1 = 32$ et T_0 est tel que l'expérience totale dure 1 heure. On a trouvé, pour Δ entre 30^s et 32^m, $L_0 = 1600$:

P_1................	100	400	700	1000	1300
Δ................	38	269	368	629	790

La courbe représentative a la même allure que celle représentée figure 3.

Pour 100^g les Δ_i sont constants : ils présentent un maximum pour Δ_1 quand $P_1 = 400$; puis le maximum se fait pour des temps de plus en plus grands; ainsi pour $P_1 = 1000^g$, jusqu'à 32^m, les Δ_i sont croissants. Pour 1300^g le maximum réapparaît pour Δ_3. Ces résultats sont conformes aux précédents.

Autre exemple. — Nous avons pris pour P_1 la série arithmétique 100, 200, 300, ... $T_0 = 2^m$, $T_1 = 8^m$, $L_0 = 1600$. Nous donnons ci-dessous la suite des Δ entre 30^s et 8^m jusqu'à 1500^g :

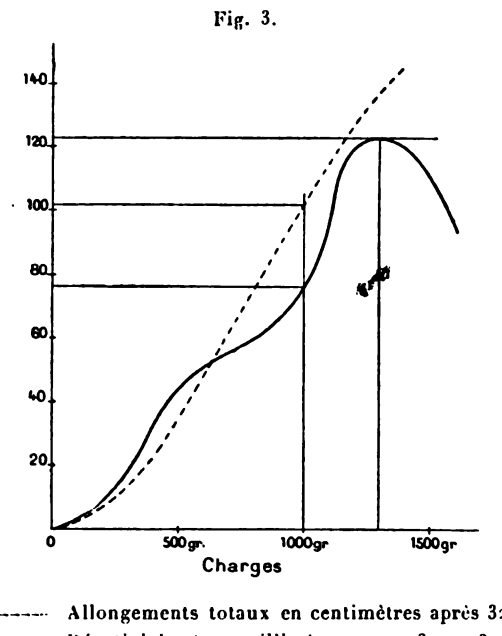
22	49	89	131	160	168	171	180
205	269	387	502	528	499	442	

La courbe a encore même allure. On constate que pour 600^g et 700^g les Δ sont

sensiblement les mêmes. En diminuant encore la raison de la progression arithmétique, on arriverait même à donner à la courbe, au voisinage de ces charges, un maximum et un minimum, ce qui est conforme aux résultats du n° 1.

Ces expériences prouvent à quel point l'interprétation des séries effectuées sur

Fig. 3.



-------- Allongements totaux en centimètres après 32^m.
———— Réactivités, Δ en millimètres entre 30^s et 32^m.

un même fil devient complexe et justifie les critiques que nous avons adressées au Mémoire de Kohlrausch, qui fait porter toutes ses recherches sur un même bout de fil. Il n'étudie d'ailleurs que la toute première partie de la courbe que nous venons de tracer.

3. *Réactivité pour la charge* P_0. — $L_0 = 3240$, $P_1 = 700^g$, $T_1 = 166^m$, $L_1 = 11030$. Voici les valeurs des Δ et Δ_1 à Δ_8 :

265	111	130	139	143	144	145	146

Entre 30^s et 64^m, l'allongement sous P_1 est 962.
Pour $T_1 = 166^m$, la longueur est devenue 12447.
On ramène alors à la charge P_0. Voici les valeurs de Δ, de Δ_1 à Δ_8 :

178	39	43	42	40	37	29	19

Entre 30^s et 64^m le raccourcissement sous P_0 est 253.

La loi de Kohlrausch, *que les allongements et les raccourcissements qui suivent la charge et la décharge sont égaux pour un même poids,* ne saurait être générale. Kohlrausch ajoute, il est vrai, que pour des allongements un peu grands le raccourcissement est plus rapide : l'expérience précédente montre que ce dernier fait n'est pas seulement une correction petite à ajouter à la loi d'égalité. L'allongement A_1 correspondant au début de la charge est 3,1, et déjà les Δ correspondant à la charge et à la décharge sont entre eux comme 4 : 1 environ.

Cet exemple prouve quel avantage il y a d'opérer dans toute l'étendue accessible d'un phénomène. Kohlrausch fait varier A de 1 à 1,05, il trouve une certaine loi simple qu'il énonce comme de première approximation. S'il avait pris un allongement un peu grand, il ne se serait pas arrêté à une proposition exacte tout au plus comme limite.

Refaisons la même comparaison dans les conditions suivantes : $L_0 = 3210$; $P_1 = 200^g$, $T_1 = 64^m$, $L_1 = 4150$, $A_1 = 1,293$:

Charge........	$\Delta_n = 111$	35	36	38	38	38	36	36	$\Delta = 367$
Décharge......	109	16	16	16	15	12	10	7	$\Delta = 92$

Ainsi l'allongement n'est qu'une fraction petite de celui qu'on peut obtenir, et déjà la différence entre les phénomènes est énorme.

Il n'est d'ailleurs pas plus admissible de dire que les allongements et raccourcissements obéissent à la même forme de loi : les Δ relatifs au raccourcissement décroissent toujours beaucoup plus vite que les autres.

4. *Fixation d'un parcours et influence de l'arrêt* T_0. — $P_1 = 400^g$, $T_0 = 5^m$, sauf indications contraires; $T_1 = 32^m$, $L_0 = 3240$.

On donne dans le Tableau suivant L_0, L_1, $L_1 - L_0$, L'_1, Δ_1, Δ et le rapport $\Delta : \Delta_1$:

	T_0.	L_0.	L_1.	$L_1 - L_0$.	L'_1.	Δ_1.	Δ.	$\Delta : \Delta_1$.
1....		3240	6880	3640	7747	230	637	2,77
2....		3460	7480	4020	7927	130	317	2,44
3....	140^m	3402	7380	3978	7915	153	412	3,69
4....		3494	7620	4126	8027	123	284	2,60
5....		3513	7680	4167	8072	121	271	2,24
6....		3528	7720	4192	8107	121	266	2,20
7....	930^m	3419	7420	4001	8012	167	425	2,55
8....		3514	7690	4176	8091	122	279	2,28
9....		3530	7740	4210	8122	120	262	2,18
10....	30^m	3477	7650	4173	8116	132	334	2,53
11....		3538	7770	4232	8158	120	268	2,23
12....	0^m	3700	7930	4230	8201	90	161	1,80

1° L'augmentation de T_0 fait croître la valeur des Δ, mais ne les ramène pas à la valeur qu'ils ont dans le premier parcours : l'effet de celui-ci est permanent. On se reportera aux parcours 3, 7 et 10;

2° Inversement, une diminution de T_0 diminue les Δ, comme il résulte de l'expérience 12;

3° L'influence de la variation de T_0 est grande quand T_0 est petit; elle diminue à mesure que T_0 augmente. Ainsi, l'effet de 140^m sous P_0 ou de 930^m est à peu près le même. Le passage de T_0 de 5^m à 0^m produit un effet considérable.

4° La colonne L_0 nous montre que L_0 est plus petit à mesure que T_0 augmente; ce qui est évident, puisqu'on laisse au fil le temps de se raccourcir. Mais, phénomène qui ne pouvait plus se prévoir, la différence $L_1 - L_0$ se trouve elle-même diminuée. Le repos sous charge P_0 rend le fil moins extensible pour le parcours suivant.

5° Étudions les rapports $(\Delta_1 + \Delta) : (L_1 - L_0)$. Un accroissement de T_0 augmente ce rapport. Une diminution de T_0 produit l'effet inverse.

Étudions, d'autre part, les rapports $\Delta : \Delta_1$; un accroissement de T_0 augmente ce rapport. Ces deux résultats rentrent dans la même formule; les phénomènes sont retardés.

Comparons, par exemple, les expériences 6 et 7; appelons 1000 l'allongement initial $L_1 - L_0$, on a

	$L_1 - L_0$.	Δ_1.	Δ.
Expérience 6...........	1000	0,0288	0,0635
Expérience 7......... ..	1000	0,0417	0,1062

Autre exemple de l'influence de la variation des temps d'arrêt sous charge P_0. — On effectue avec un fil trois parcours $T_1 = 16^m$, $T_0 = 5^m$, $P_1 = 500$. On attend alors sous P_0 un temps T'_0 et l'on recommence la même série de trois parcours. D'un fil à l'autre on fait varier le temps T'_0 qui sépare les deux séries. On donne dans les Tableaux suivants les allongements sur la courbe de charge $L_1 - L_0$, rapportés au premier et les réactivités Δ (entre 30^s et 16^m) rapportées à la première :

	T'_0.						
$L_1 - L_0$...	5^m	1000	1077	1099	1110	1118	1125
	40^m....	1000	1075	1096	1101	1114	1123
	24^h.......	1000	1080	1101	1086	1115	1127
	Moyennes.		1077	1099		1116	1125
	T'_0.						
Δ.........	5^m	1000	556	501	481	468	461
	40^m....	1000	549	492	598	471	455
	24^h.......	1000	564	504	730	508	477
	Moyennes.		557	499			464

Si les fils étaient parfaitement identiques, les nombres des trois premières colonnes seraient identiques. Le premier Tableau montre que l'influence de T'_0 devient négligeable sur les allongements à mesure qu'on augmente le nombre des cycles fixés. Tandis que les nombres 1110, 1101, 1086 diffèrent beaucoup et systématiquement de leur moyenne, les nombres 1125, 1123, 1127 en diffèrent peu et non systématiquement.

Pour les réactivités, l'influence du temps T'_0 se fait sentir plus fortement et plus longtemps.

5. *Influence de l'arrêt* T_1 *sur la fixation d'un parcours.* — On donne dans le Tableau suivant la longueur L'_0 de retour à P_0, le raccourcissement $L'_0 - L_0$ pendant l'arrêt $T_0 = 5^m$, l'allongement $L_1 - L_0$ pendant la mise en charge ($P_1 = 500^g$), l'allongement Δ_1 entre 0^s et 30^s, l'allongement Δ' entre 30^s et 8^m, enfin, l'allongement Δ entre 30^s et T_1. Sauf indications contraires, $T_1 = 8^m$. La longueur initiale est 3000.

	T_1.	L'_0.	$L'_0 - L_0$.	$L_1 - L_0$.	Δ_1.	Δ'.	Δ.
1............				3520	192	331	
2............		3280	142	3742	111	200	
3............		3300	144	3806	108	180	
4............		3310	146	3844	105	175	
5............		3320	149	3871	103	168	
6............	0	3322	144	3890	0	0	
7............		3280	113	3878	104	179	
8............	256^m	3322	143	3904	103	165	385
9............		3420	173	4008	105	153	
10............		3390	157	4017	99	158	
11............		3380	150	4020	99	158	
12............		3375	147	4022	99	159	
13............	0	3373	146	4023	0	0	
14............		3330	116	4011	102	172	
15............	63^h	3370	149	4024	101	172	540
16............		3580	206	4191	96	150	
17............		3520	167	4197	91	157	
18............		3500	167	4197	92	158	
19............		3490	152	4197	92	157	
20............	0	3483	150	4197	0	0	
21............		3440	121	4176	105	169	
22............		3470	211	4111	108	202	
23............		3430	191	4091	113	209	

Entre les expériences 21 et 22 $T_0 = 80^m$, entre les expériences 22 et 23 $T_0 = 130^m$.

L'augmentation de T_1 diminue les Δ du parcours suivant, une diminution de T_1 les augmente. Une augmentation de T_1 augmente l'allongement $L_1 - L_0$; une diminution de T_1 les diminue. On comparera utilement le Tableau précédent au Tableau du n° 4.

Voici une autre série qui montre bien l'influence de T_1. Chaque expérience est faite sur un fil différent, $P_1 = 500^g$. On impose P_1 pendant le temps T_1, variable d'un fil à l'autre; on revient à P_0 où on attend $T_0 = 5^m$. On réinstalle alors la charge P_1. On compare les Δ pour les différent fils.

Voici d'abord les Δ que l'on obtient quand le fil est la première fois abandonné sous P_1 :

201	78	89	95	95	95	94	88	87	86	84

Voici maintenant les Δ pour les T_1 différents :

T_1.	Δ.								
m									
0.........	141	62	68	82	83	85	87	87	
2.........	121	48	56	61	63	70	70	71	
8.........	118	45	49	55	56	59	65	66	67
780.........	103	38	43	43	40	36	30	25	26

A mesure que T_1 augmente, l'effet de la durée de la charge sur le cycle suivant devient de plus en plus grand. Pour des T_1 limités à quelques minutes il y a tendance au raccordement, c'est-à-dire que les Δ de numéros d'ordre élevés tendent à devenir les mêmes que pour le fil de comparaison qui n'a subi qu'un seul parcours. Il ne semble pas qu'il en soit de même quand T_1 est très grand; mais la comparaison, pour être correcte, devrait alors porter sur des Δ de numéros d'ordre extrêmement élevés.

6. *Influence de la vitesse de mise en charge.* — Chaque expérience est faite sur un fil différent, $L_0 = 3230$. On observe jusqu'à $T_1 = 64^m$ $P_1 = 500$. On donne les valeurs absolues de Δ_1 et de Δ (30^s-64^m). Puis, posant $\Delta_1 = 100$, nous donnons, sous les rubriques Δ'_2, Δ'_3, ..., les Δ_2, Δ_3, ..., Δ_8 en fonction de Δ_1, pour faciliter les comparaisons. Les vitesses d'allongement pendant la mise en charge sont de 1^m en 17^s, 58^s, 173^s, 2400^s.

	Vitesses : 1^m en			
	17^s.	58^s.	173^s.	2400^s.
Δ_1	698	383	237	43
Δ	954	890	780	443
Δ'_2..............	23	35	42	51
Δ'_3..............	22	35	46	88
Δ'_4..............	21	36	48	120
Δ'_5..............	20	33	49	153
Δ'_6..............	18	31	49	186
Δ'_7..............	17	30	46	200
Δ'_8..............	16	40	45	223

Quand la vitesse de charge est très grande, les Δ successifs décroissent. Quand la vitesse diminue, ils croissent d'abord, pour décroître ensuite. Il naît donc un maximum qui se fait d'autant plus tard que la vitesse est plus petite. Donc, pour une vitesse suffisamment petite, les Δ croissent : la position du maximum est reculée au delà des limites de l'expérience.

Nous allons reprendre la même expérience en croisant deux vitesses sur un même fil.

La mise en charge se fait avec une vitesse d'allongement de 1^m en 185^s pour la vitesse v, de 1^m en 32^s pour la vitesse V; $v : V = 5,8$. La décharge se fait toujours à la vitesse v. Les cycles sont croisés aux vitesses v et V. On a uniformément $T_0 = 5^m$, $P_1 = 500^g$. D'une série à l'autre, T_1 varie : les trois séries sont faites sur le même fil.

Dans les Tableaux suivants, L'_0 est la longueur de retour à P_0, L_0 la longueur après l'arrêt T_0; L_1 est la longueur après 30^s sous P_1, L'_1 la longueur après T_1 sous P_1; Δ_2, Δ_3, ... sont les allongements dans les intervalles 30^s à 1^m, 1^m à 2^m, ... après la mise en charge; Δ est l'allongement dans l'intervalle 30^s à T_1. La longueur initiale est 3000. Les résultats qui suivent correspondent à des cycles déjà fixés approximativement.

	v.	V.	v.	V.	v.
L'_0..................	3390	3390	3398	3400	3403
L_0..................	3224	3230	3237	3239	3242
$L_1 - L_0$..............	4924	4895	4965	4931	4997
Δ_2..................	40	63	38	61	38
Δ_3..................	43	60	42	60	42
Δ_4..................	45	52	44	51	42
Δ_5..................	43	46	42	47	42
Δ_6..................	40	42	39	39	39
Δ..................	211	263	205	258	202
$L'_1 - L_0$..............	5135	5158	5170	5189	5199

Les différences entre les $L'_1 - L_0$ successifs sont : 23, 12, 19, 10. Elles indiquaient donc un allongement légèrement plus grand pour les cycles à grande vitesse. Mais il ne faut pas oublier qu'il y a toujours une oscillation notable du poids au moment où il devient libre.

En définitive, nous pouvons admettre que l'allongement total tend à devenir le même, quelle que soit la vitesse de mise en charge. Si la vitesse est grande, $L_1 - L_0$ est plus petit; mais la compensation se fait au moyen des Δ; ils sont d'abord plus grands que ceux qui correspondent à une vitesse petite, mais ils tendent peu à peu vers ces derniers.

Nous avons fait varier la grandeur de l'intervalle T_1. Voici deux séries faites avec $T_1 = 4^m$ et $T_1 = 32^m$:

	$T_1 = 4^m$.			$T_1 = 32^m$.		
	v.	V.	v.	V.	v.	V.
L'_0	3353	3360	3360	3403	3420	3430
L_0.................	3213	3219	3220	3237	3251	3260
$L_1 - L_0$...........	4968	4922	4989	4965	5048	5012
Δ_2................	41	67	40	66	38	63
Δ_3................	47	61	46	59	43	60
Δ_4................	49	56	47	53	42	52
Δ_5................			.	47	41	44
Δ_6................				41	38	38
Δ_7................				40	37	33
Δ	137	184	133	306	239	292
$L'_1 - L_0$	5105	5106	5121	5271	5287	5302

Pour $T_1 = 4^m$, $L'_1 - L_0$ est plus petit pour V que pour v, étant tenu compte, bien entendu, de la variation continue de cette quantité. C'est l'inverse pour $T_1 = 32^m$, ce qui s'explique aisément.

Voici les valeurs moyennes du rapport $\Delta_V : \Delta_v$:

$T_1 = 4^m$..... 1,36 $T_1 = 16^m$.... 1,27 $T_1 = 32^m$.... 1,25.

7. *Influence d'un allongement de courte durée.* — $P_1 = 400$, $L_0 = 2570$, $T_1 = 32^m$. Fil unique.

On décrit des cycles séparés par des temps T_0 sous charge P_0 de très longue durée. On donne, dans le Tableau suivant, les L_0, $L_1 - L_0$, Δ_1, Δ (entre 30^s et 32^m) pour les réactivités de charge et de décharge :

			Charge.		Décharge.	
T_0.	L_0.	$L_1 - L_0$.	Δ_1.	Δ.	Δ_1.	Δ.
	2570	2200	209	463	77	128
17^h..................	2662	2318	159	374	91	127
24^h.	2668	2342	157	353	96	123

On allonge pendant 1 minute à la longueur 11570 ($\Lambda = 4,5$).

h 29..................	2771	2679	168	401	91	130
17..................	2779	2641	180	411	89	142
24..................	2769	2641	171	393	97	133
7..................	2773	2677	162	371	91	128
16..................	2771	2629	177	385	91	131

Donc l'allongement momentané produit un accroissement de réactivité.

A mesure que le nombre des parcours augmente, le cycle se fixe. L'influence de la variation de T_0 apparaît nettement pour $T_0 = 7^h$, $\Delta = 371$; T_0 devenant égal à 16^h, Δ augmente à 385.

La seconde série des Δ_1 et des Δ tend vers des nombres plus grands que la première : l'accroissement produit par l'allongement n'est donc pas seulement momentané.

8. *Modification complète de la loi de réactivité par une disposition convenable des cycles.* — $L_0 = 3200$, $T_0 = 1^m$, $T_1 = 32^m$.

Voici les résultats de l'expérience ; les cycles sont effectués sur un même fil :

P_1.	L_1.	Δ_0	Δ_1.	Δ_2.	Δ_3.	Δ_4.	Δ_5.	Δ_6
200..............	4000	102	30	32	34	32	32	32
300..............	4890	124	39	39	39	39	40	41
400..............	6080	146	53	55	56	57	57	58
500..............	7580	150	57	62	63	66	67	69

Repos sous P_0 pendant 120^m.

P_1.	L_1.	Δ_0.	Δ_1.	Δ_2.	Δ_3.	Δ_4.	Δ_5.	Δ_6.
200..............	4270	90	26	26	28	26	24	23
300..............	5210	111	38	35	35	32	31	31
400..............	6440	130	43	46	43	42	41	41
500..............	7850	120	46	49	49	49	49	50
400..............	6690	110	39	36	30	24	18	16
300..............	5500	106	28	25	17	6	0	− 2
200..............	4570	72	16	10	2	− 3	− 9	−10

Repos sous P_0 pendant 840^m.

P_1.	L_1.	Δ_0.	Δ_1.	Δ_2.	Δ_3.	Δ_4.	Δ_5.	Δ_6.
200..............	4250	97	29	30	29	28	27	21
300..............	5190	122	38	38	35	35	32	31
400..............	6450	129	45	46	43	41	40	40
500..............	7870	126	43	48	47	46	46	45

Les résultats précédents s'expliquent par cette règle générale : les effets des grands parcours antérieurs se font plus longtemps sentir avec une intensité déterminée que les effets des petits parcours plus rapprochés dans le temps. Si l'on passait directement de 400 à 300, la réactivité serait d'abord un raccourcissement; si l'on passe de 0 à 300, la réactivité est un allongement. La superposition des deux effets explique le changement de sens constaté.

9. *Réactivité sur une courbe de décharge.* — Fils de longueur $L_0 = 3040$.

On donne dans le Tableau suivant : dans la première colonne les Δ qui correspondent à une charge de 300^g.

Sur une série d'autres fils, on fait l'expérience suivante : on charge de $P_1 = 500^g$ pendant des temps T_1 variables avec le fil; on revient à $P_2 = 300^g$, et l'on étudie la réactivité; on trouve les résultats dans les autres colonnes du Tableau :

	Fil directement porté à 300^g.	Arrêt T_1 à 500^g.		
		0^m.	8^m.	2^h.
$L_1 - L_0$	»	4880	4245	5595
$L'_1 - L_0$	»	4880	4827	6642
$L_2 - L_0$	2100	2690	2685	3820
$(L_2 - L_0) : (L_1 - L_0)$	»	0,551	0,632	0,686
Δ_1	163	−46	−74	−83
Δ_2	58	−4	−18	−27
Δ_3	62	+5	−19	−29
Δ_4	64	+15	−13	−27
Δ_5	61	+27	−4	−22
Δ_6	61	+33	0	−13
Δ_7	59	+34	+11	0
Δ_8	55	»	»	»
T'	»	1^m	12^m	100^m

Ces résultats sont tout à fait analogues à ceux trouvés par l'un de nous pour la torsion des fils métalliques (réactivité en un point d'une courbe de détorsion, *Mémoire sur les courbes de déformation,* Chap. VII). Voici comment on peut les expliquer.

En définitive, le mouvement doit toujours être un allongement, quelle que soit la charge et quelles qu'aient été les déformations antérieures, pourvu que l'on attende un temps suffisant.

Au début de la réactivité sous 300^g, il doit exister toujours un raccourcissement, puisque l'on arrive à 300^g par charges décroissantes.

Enfin, la partie de la réactivité à 300^g qui est sous la dépendance de la charge 500^g et qui est un raccourcissement d'après ce que nous venons de voir,

augmente à mesure que le temps T_1 passé sous 500^g augmente. *Donc il existe toujours une inversion.*

Le temps T' qui s'écoule entre l'imposition de la charge 300^g et l'inversion augmente à mesure que T_1 augmente; T' est d'abord plus long que T_1; il devient ensuite égal, puis plus petit, à mesure que T_1 augmente.

Les Δ_1 trouvés pour 300^g après que l'on a été à 500^g sont toujours plus petits que ceux que l'on obtiendrait sur un fil neuf en allant directement à 300^g.

Enfin, la longueur L_2 est toujours plus grande sur la courbe de décharge que sur la courbe de charge, ce qui est conforme à ce que nous savons sur la forme de ces courbes. La forme de la courbe de décharge est modifiée par l'arrêt T_1; la longueur L_2 augmente à mesure que T_1 croît.

N.-B. — Si les cordes étaient identiques, les nombres de la première ligne seraient égaux; on voit combien peu il est possible de compter sur un diamètre uniforme, même pour des cordes prises à la suite les unes des autres sur le même paquet.

On pourrait multiplier à l'infini les expériences analogues à la précédente, en faisant varier les divers paramètres P_1, P_2, T_1. Ce qui précède suffit pour en faire prévoir le résultat général.

Il est clair, par exemple, que, si l'on diminue la différence $P_1 - P_2$, on diminuera la tendance au raccourcissement sous P_2 et par conséquent le temps T'.

10. *Réactivité sur une courbe de charge parcourue après une charge et une décharge (seconde courbe de charge).* — Nous allons trouver une double inversion.

$P_1 = 500$, T_1 variable avec le fil. Le reste de l'expérience est le même pour tous les fils. On revient à P_0, $T_0 = 0$; on recharge jusqu'à $P_2 = 300$ et l'on étudie la réactivité.

T_1.	0^m.	16^m.	32^m.	128^m.	760^m.
$L_1 - L_0$	4280	5465	4490	4980	5620
$L'_1 - L_0$	4280	6181	5340	6089	6928
$L'_1 - L_1$	230	390	390	480	590
$L_2 - L_1$	2030	3110	2510	2950	3590
$(L_2 - L_1) : (L_1 - L_0)$	0,474	0,568	0,559	0,590	0,638
$(L_2 - L_1) : (L'_1 - L_0)$	0,474	0,503	0,470	0,483	0,518
Δ_1	87	80	82	79	92
Δ_2	22	21	16	20	22
Δ_3	22	18	10	8	17
Δ_4	24	12	2	4	10
Δ_5	29	9	0	3	0
Δ_6	35	11	0	−1	−7
Δ_7	35	15	0	−4	−13
Δ_8	39	21	6	−7	−17
Δ_9	43	»	»	−3	−16
Δ_{10}	»	»	»	−3	»

Pour $T = 0$, minimum à peine marqué et tout à fait au début. Ce minimum est très net pour $T_1 = 16^m$; il est nul et prolongé pour $T_1 = 32^m$.

Pour $T_1 = 128^m$, on constate deux inversions. Enfin, pour toutes les valeurs de $T_1 > 128$, on constaterait aussi deux inversions, si l'on avait la patience d'attendre un temps suffisant, généralement considérable.

Les résultats précédents pouvaient aisément se prévoir grâce aux principes suivants.

A la fin du phénomène, il doit toujours exister un allongement, puisque l'on parvient à 300^g par charges croissantes. Donc il y a nécessairement pas d'inversion ou deux inversions.

L'influence de la réactivité qui est encore sous la dépendance de 500^g doit produire un raccourcissement, pourvu que l'action de cette charge soit assez prolongée.

Les temps T' et T'' d'inversion sont d'abord confondus ($T_1 = 32^m$), augmentant ainsi que leur différence, à mesure que T_1 croît. L'augmentation de T' est beaucoup plus petite que celle de T''.

La position de la seconde courbe de charge est sous la dépendance de T_1, comme le montre la variation du rapport $(L_2 - L_0):(L_1 - L_0)$. Moyenne, 0,566. Différences avec la moyenne -92, $+2$, -7, $+24$, $+72$.

L'expérience complexe de Kohlrausch rentre dans la définition générale précédente, si on la dépouille de tout ce qu'une technique rudimentaire lui donne de complexe. Elle doit donner deux inversions et non pas une comme l'indique cet auteur.

En effet, Kohlrausch part d'une tension $4^g,1$ (*voir* p. 288) que nous pouvons appeler P_1. Il la ramène à une tension moindre P_0 en deux temps, d'abord en supprimant un poids de $0^g,1$, puis en raccourcissant le fil à la main. Enfin il réinstalle une charge $P_2 = 4^g$ supérieure à P_0, mais inférieure à P_1.

On pourrait varier à l'infini les expériences de ce numéro, puisque l'on a à sa disposition les paramètres P_0, P_1, P_2, T_1, T_0. Ce qui précède suffit à faire prévoir les résultats dans tous les cas.

RÉACTIVITÉ APRÈS RECUIT ET A HAUTE TEMPÉRATURE.

11. *Recuit à* 150°. — On prépare le fil par trois parcours $P_1 = 500$, $T_0 = 5^m$, $T_1 = 16^m$. On le laisse reposer 24 heures, On le recuit pendant 30 minutes et l'on fait une nouvelle série de trois parcours identiques aux premiers, un temps variable après la sortie de l'étuve. Le fil I sert de témoin et n'a pas été recuit, II est essayé 10 minutes après la sortie de l'étuve ; III, 6 heures après ; IV, 24 heures après. Les Tableaux suivants sont construits en appelant 1000 la réactivité

entre 30^s et 16^m pour le premier essai, et en calculant les réactivités des autres parcours par rapport à celle-là. De même, on appelle 1000 l'allongement sur la courbe de charge du premier parcours, quand on impose 500^g; on calcule les autres par rapport à celui-là.

Réactivités.

I................	1000	551	499	710	497	472
II...............	1000	551	495	712	359	319
III..............	1000	574	516	655	357	328
IV..............	1000	556	499	673	356	323

L'effet du recuit est énorme et à peu près indépendant du temps qui s'écoule entre la sortie de l'étuve et l'essai; la réactivité est diminuée. Mais à 150° le fil se transforme notablement, il devient noir; abandonné longtemps à 150°, il devient rugueux, cassant; il se recouvre d'une couche rigide, qu'un allongement gerce.

Allongements.

I................	1000	1089	1110	1077	1117	1126
II...............	1000	1075	1096	998	1037	1041
III..............	1000	1076	1095	943	991	997
IV..............	1000	1083	1105	823	879	891

Le parcours est diminué par le recuit et cette diminution augmente à mesure que le temps qui sépare l'essai de la sortie de l'étuve augmente. On pourra comparer ces résultats avec ceux du Mémoire précédent n° 10. Nous avons vu que l'effet du recuit pouvait être une diminution du parcours et que le temps qui sépare l'essai de la sortie de l'étuve intervient. Il y a donc concordance dans les résultats généraux; les expériences sont effectuées dans des conditions très différentes, et la transformation de la matière à 150° est telle que des comparaisons numériques paraissent impossibles. A mesure que la température du recuit s'abaisse, les résultats donnés par les deux techniques deviennent plus comparables.

12. *Recuit à* 100°. — Même technique. Le fil I sert de témoin, II est essayé 14^m, III est essayé 28^h après la sortie de l'étuve :

Réactivités.

I................	1000	556	487	738	497	466
II...............	1000	543	483	866	535	485
III..............	1000	541	477	916	560	497

Ainsi le recuit augmente les Δ.

L'effet du recuit ne diminue pas avec le temps qui s'écoule entre la sortie de l'étuve et l'essai; il augmente même notablement.

Allongements.

I................	1000	1080	1101	1083	1116	1125
II................	1000	1081	1106	1330	1365	1353
III................	1000	1081	1103	1055	1122	1147

Le parcours est augmenté par le recuit; l'effet diminue quand le temps qui s'écoule entre la sortie de l'étuve et l'essai augmente. C'est de tous points conforme avec ce que nous avons vu dans le Mémoire précédent n° 11.

Mêmes expériences. On opère sur des parcours de diverses amplitudes. — Recuit 30^m à 95°. Les fils I sont essayés 10^m après la sortie de l'étuve, les fils II 24^h après.

Allongements.

300	I...........	1000	1066	1082	1331	1374	1355
	II...........	1000	1065	1086	1082	1137	1158
500	I...........	1000	1077	1098	1321	1350	1331
	II...........	1000	1077	1098	1139	1202	1224
700	I...........	1000	1077	1101	1262	1287	1269
	II...........	1000	1077	1099	1045	1106	1129

Réactivités.

300	I...........	1000	600	553	1105	724	665
	II...........	1000	602	553	1093	698	635
500	I...........	1000	546	495	880	542	504
	II...........	1000	562	505	991	610	551
700	I...........	1000	559	492	867	566	513
	II...........	1000	548	484	904	583	528

Les réactivités, sauf pour $P_1 = 300$, augmentent quand le temps qui sépare l'essai de la sortie de l'étuve augmente, conformément à ce que nous avons dit plus haut. Les allongements diminuent.

On remarque que les parcours de la seconde série (après recuit) ne se fixent pas de même pour les fils I et II. Les allongements ont un maximum pour les fils I et n'en ont pas pour les fils II. Ce résultat peut tenir précisément à la diminution de l'effet du recuit avec le temps : il peut se faire sentir pour les fils I d'un parcours à l'autre, et il est insensible pour les fils II d'un parcours au suivant.

N.-B. — Si les cordes étaient identiques, les lignes I et II des trois premières colonnes seraient identiques pour le même P_1.

13. *Recuit à* 60°. — Même technique. Le fil I sert de témoin, II est étudié 5^m après la sortie de l'étuve; III, 3^h; IV, 48^h. Quatre jours après les premiers parcours de préparation, on fait une troisième série de 3 cycles; enfin, 12 jours après les premiers parcours, on décrit une quatrième série.

Allongements sur la courbe de charge.

P = 500.

I.........	1000	1080	1101	1086	1115	1127	1095	1127	1137	1107	1137	1147
II...	1000	1081	1102	1151	1182	1193	1137	1174	1186	1148	1182	1194
III.......	1000	1076	1096	1105	1151	1165	1124	1156	1168	»	»	»
IV.......	1000	1082	1105	1090	1147	1168	1141	1173	1186	1144	1181	1193
Moyenne..		1080	1101				1134	1168	1180			

La moyenne est celle des nombres des trois dernières lignes.

Le recuit allonge le parcours d'une manière en grande partie permanente. Le temps qui s'est écoulé entre la sortie de l'étuve et le second essai influe très peu sur les résultats des essais suivants. Les trois fils tendent vers des propriétés identiques qui dépendent de la durée du recuit : une partie de la modification due au recuit est subpermanente.

Réactivités.

I.........	1000	564	504	730	508	477	724	499	473	747	506	473
II........	1000	565	504	802	547	506	782	527	489	782	523	487
III.......	1000	549	488	826	533	486	743	503	467	»	»	»
IV.......	1000	582	511	891	566	511	766	523	488	793	523	489
Moyenne..		565	501	840	550	501	762	518	481			

Le recuit augmente la réactivité d'une manière permanente.

Comparons maintenant aux moyennes les nombres qui correspondent aux fils recuits.

Dans la première série (préparatoire), les nombres du fil II sont égaux à la moyenne; ils lui sont inférieurs dans la seconde et supérieurs dans la troisième. Or, cette circonstance ne se présente que pour le fil II essayé 5^m après la sortie de l'étuve. Pour les deux autres fils, les nombres sont tous ou supérieurs ou inférieurs à la moyenne. Donc, si l'effet du recuit est d'accroître la réactivité, cet effet augmente avec le temps à partir du moment où le fil sort de l'étuve.

Autrement dit : admettons deux effets, l'un permanent, l'autre subpermanent qui disparaît peu à peu. Le premier est une augmentation de la réactivité, le second est une diminution plus petite, qui se superpose à l'augmentation et atténue d'abord l'effet du recuit.

14. *Effets non permanents du recuit.* — Nous venons de voir le recuit pro-

duire des effets permanents, transformer plus ou moins la matière. Il peut aussi modifier d'une autre manière la réactivité. Voici une expérience qui le prouve. $T_0 = 0$; $T_1 = 16^m$; $P_1 = 500$. On donne L_0, L_1, Δ_1 et Δ pour une série de parcours accomplis avec le même fil. Le L_0 initial est 3000; les autres sont les longueurs de retour à P_0.

L_0.	L_1	Δ_1.	Δ.
3000	7400	237	535
3380	8070	114	215
3430	8210	97	180
3450	8280	93	158
3450	8320	95	155
3430	8340	96	159

On arrête alors sous P_0 pendant 80^m.

L_0.	L_1.	Δ_1.	Δ.
3157	8040	138	324
3400	8320	96	173
3430	8380	92	158

On porte alors à 69° pendant 25^m; on laisse refroidir 30^m.

L_0.	L_1.	Δ_1.	Δ.
3142	8530	190	470
3500	9020	101	227
3550	9120	96	197
3580	9170	100	188
3590	9210	99	182
3620	9240	100	178

Le recuit produit, à un certain point de vue, l'effet d'un arrêt plus prolongé sous la charge P_0. En moins de 1 heure, Δ se trouve ramené à 470. La limite est d'ailleurs augmentée par le recuit; elle passe de 158 à 178.

15. *Influence de la température actuelle*. — $P = 500$, $T_0 = T_1 = 16^m$. Quand le temps T_0 est écoulé, on chauffe ou l'on refroidit, de manière à faire un essai toutes les heures. On opère à 13° et à 60°. On obtient donc des expériences croisées sur un même fil à ces deux températures. On donne, dans le Tableau suivant, les longueurs L_0 et L_1 de la courbe de charge, les Δ_1 et Δ à P_1 et à P_0. $L_0 = 3200$:

Froid.					
		Charge.		Décharge.	
L_0.	L_1.	Δ_1.	Δ.	Δ_1.	Δ.
3246	7460	170	390	96	123
3321	8410	200	477	109	151
3349	8580	185	449	100	148

Chaud.					
		Charge.		Décharge.	
L_0.	L_1.	Δ_1.	Δ.	Δ_1.	Δ.
3257	8010	147	397	71	107
3313	8230	95	281	56	97

Le parcours avait été déjà en partie fixé à froid avant la première des expériences que nous venons de rapporter. Le premier parcours à chaud recuit le fil; ce n'est donc qu'après ce parcours que la comparaison devient utile. En d'autres termes, nous ne devons considérer dans nos conclusions que les trois derniers parcours.

La réactivité est plus petite à 60° qu'à 13°.

Les allongements $L_1 - L_0$, pendant la charge, sont plus petits à chaud qu'à froid.

La loi de réactivité est modifiée; il y a, à chaud, une importance plus grande des Δ_n à de grands numéros d'ordre. Pour les quatre derniers parcours, les rapports $\Delta : \Delta_1$ ont les valeurs suivantes qui prouvent que, à chaud, Δ a plus d'importance devant Δ_1 qu'à froid :

Froid.		Chaud.	
Charge.	Décharge.	Charge.	Décharge.
2,38	1,39	2,70	1,51
2,43	1,48	2,96	1,73

On peut prendre la question autrement. La moyenne des allongements sur la courbe de charge à froid, pour les deux derniers parcours, est 5160; pour le second parcours à chaud, l'allongement est 4917; la différence est 243. Ajoutons à ces allongements l'allongement pendant les 16^m sous charge P_1. La moyenne pour les deux derniers parcours à froid est $5160 + 463 = 5623$; pour le second, il est $4717 + 281 = 5198$; la différence est 425.

Elle a donc augmenté, contrairement à l'affirmation de Kohlrausch qui veut que les allongements tendent l'un vers l'autre. Mais cette augmentation est plus grande pour les premiers Δ que pour des Δ de numéros d'ordre élevé.

Mêmes expériences sur un nouveau fil et pour des charges différentes. — $T_0 = T_1 = 16^m$; $P_1 = 500$. Essai toutes les heures. Températures : 60° et 10°.

On donne les allongements sur les courbes de charge produites par l'imposition de la charge P_1, et les Δ_1 et Δ pour la charge et la décharge :

	Froid.					Chaud.				
		Charge.		Décharge.			Charge.		Décharge.	
P_1.	Allongements.	Δ_1.	Δ.	Δ_1.	Δ.	Allongements.	Δ_1.	Δ.	Δ_1.	Δ.
200^g	1123	119	189	73	85	1150	77	134	50	49
	1170	110	180	77	81	1162	61	107	40	47
400^g	4053	172	410	»	»	3668	133	298	57	80
	4136	172	386	91	129	3766	87	235	51	77
600^g	8000	157	423	»	158	7182	133	391	60	90
	8144	143	398	113	158	7408	75	236	53	39
200^g	1329	112	189	76	83	1288	56	90	41	51
	1334	108	182	72	83	1260	61	100	40	57

La réactivité et les allongements pendant la charge sont plus petits à chaud.

L'influence des parcours les uns sur les autres est nettement montrée par la comparaison de la première série et de la dernière. Pour comprendre la première, on n'oubliera pas que le fil n'avait jamais servi.

16. *Influence de la manière de croiser les expériences à deux températures différentes.* — Il est bien entendu que les résultats précédents ne valent que pour l'*ensemble de parcours* que nous avons choisi. Nous pouvons formuler comme suit la technique générale. Nous faisons varier périodiquement la température et la charge, nous cherchons quelle est l'expression de la longueur en fonction de ces variables. Un principe général nous apprend qu'après un petit nombre de périodes, elle sera elle-même périodique. Les phénomènes ne dépendent donc pas seulement des deux températures extrêmes et des charges P_0 et P_1, ils dépendent de la manière suivant laquelle nous combinons ces températures et ces charges : nous aurons donc une infinité d'effets différents du passage d'une des températures à l'autre, suivant la fonction périodique choisie.

Voici une expérience qui fera comprendre ce qui précède.

Nous décrivons des parcours $P_1 = 500$, $T_1 = 16^m$ en croisant les expériences à 16° et à 60°. Nous faisons deux séries d'expériences. Dans la première, les expériences sont distantes de 40^m. On impose P_1, on attend 16^m, on revient à P_0, on attend 2^m et l'on chauffe. Quand 40^m sont écoulées depuis le début de la précédente expérience, soit environ après une chauffe de 15^m, on impose P_1, on attend 16^m, on revient à P_0, on attend 2^m et l'on refroidit. Et ainsi de suite.

Dans la seconde série et à un autre fil on impose P_1, on attend 16^m, on revient à P_0, on attend 2^m et l'on chauffe. On laisse maintenant s'écouler 2^h depuis le début de la précédente expérience, ce qui revient à chauffer $1^h 35^m$. On impose alors P_1, on attend 16^m, on revient à P_0, on attend 2^m et l'on refroidit. On laisse s'écouler 2^h, ..., et ainsi de suite.

L'expérience montre que le rapport des Δ à 16° et à 60° n'est pas le même dans les deux séries. On trouve 1,66 pour la première et seulement 1,40 pour la seconde.

COEFFICIENT DE DILATATION.

17. La question du coefficient de dilatation du caoutchouc est loin d'être éclaircie. Joule et Lord Kelvin ont su déduire de leurs expériences des résultats si fondamentaux, qu'on ne s'inquiète pas de connaître la valeur de ces expériences. Il y a présomption pour que *toutes* soient parfaites. Il est cependant incontestable que celles de Joule sur la dilatation du caoutchouc sont incorrectes et grossièrement; on en jugera par ce qui suit.

Joule prend du caoutchouc (*Phil. Trans.*, 1859, p. 105), le charge n'importe comment d'un poids connu, le chauffe suivant une loi inconnue et le refroidit de même. Il obtient dans le plan des longueurs-températures une certaine courbe dont les branches ascendantes et descendantes ne sont ni superposées ni rectilignes. Il prend la moyenne générale des coefficients angulaires et donne le résultat comme coefficient de dilatation. Il espère ainsi éliminer les erreurs qui proviennent de l'allongement permanent du caoutchouc. Il modifie la charge, recommence une nouvelle série sur le même caoutchouc ..., et ainsi de suite.

Cette méthode est grossièrement incorrecte. Voici, en unités arbitraires, les coefficients moyens de dilatation pour la courbe ascendante et pour la courbe descendante :

Poids.	Températures croissantes.	Températures décroissantes.
14 livres	31	290
7 livres	237	— 20
21 livres	80	232
28 livres	509	796
35 livres	954	1250
42 livres	1160	1630

Joule remarque lui-même que les résultats incohérents obtenus pour 14 et 7 livres doivent tenir à ce que la charge de 7 livres a été imposée après celle de 14 livres. Mais de cette remarque il aurait dû conclure qu'il n'y avait aucune raison pour que les autres parcours n'influassent pas aussi les uns sur les autres, la particularité qui se présente pour 14 et 7 livres ayant simplement décelé un phénomène qui aurait pu rester inaperçu.

Il n'en prend pas moins des moyennes entre 31 et 290, entre 237 et —20, et trouve ensuite des résultats numériques qu'il dit conformes avec la Thermodynamique.

La colonne du Tableau d'où résulterait cette concordance (p. 107) est assez singulière. Elle a pour titre : *Résultat expérimental, corrigé de l'allongement du caoutchouc produit par l'usage*. C'est à cette correction, dont nous n'arrivons pas à saisir la base, que sont dues les concordances; car les deux colonnes où se trouvent inscrits les résultats théoriques et les résultats expérimentaux déjà corrigés, comme on l'a vu, donnent les nombres suivants (en unités arbitraires) :

Théorie..........	—2	4	9	18	35	50
Expérience.......	4	3	15	39	42	42

ce qui est discutable comme vérification. On peut tout au plus dire que les deux séries de nombres sont l'une et l'autre croissantes.

18. Tant s'en faut d'ailleurs que les formules classiques de la Thermodynamique soient applicables au caoutchouc. Elles supposent essentiellement que la longueur est une fonction bien déterminée de la température et de la charge. Soit $dL = \alpha\, dt + \varepsilon\, dP$; elles reposent sur l'hypothèse que α et ε sont des fonctions déterminées des variables P et t, satisfaisant de plus à la condition $\frac{\partial\alpha}{\partial P} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$. Nous savons, de reste, que les courbes de traction ne peuvent pas être tracées à l'avance et une fois pour toutes dans le plan longueur-charge; il est donc bien certain que la fonction ε n'existe pas. L'expérience de Joule suffirait à montrer que la fonction α n'existe pas davantage; en d'autres termes, que l'on ne saurait déduire des courbes tracées dans le plan longueur-température le coefficient de dilatation. Ces courbes ont, d'ailleurs, été jusqu'à présent fort peu et fort mal étudiées, et nous nous proposons de revenir sur elles dans un prochain Mémoire.

Nous ne voulons pas dire, dans les lignes précédentes, qu'il est impossible de définir un coefficient de dilatation et un module d'élasticité, mais simplement qu'il y a une convention préliminaire à faire sur la forme et la nature des cycles qui serviront à ces définitions, et qu'il n'est pas plus permis de déduire le *coefficient de dilatation sous une charge donnée,* de l'allongement moyen entre deux températures données quand la charge reste constante, qu'il n'est légitime de déduire le *module d'élasticité à température constante,* de l'allongement moyen entre deux charges données, quand la température est constante. Il serait d'ailleurs tout aussi incorrect, dans l'un ou l'autre cas, de déduire ces coefficients de la valeur des coefficients angulaires en un point d'une courbe du plan longueur-charge, ou du plan longueur-température, puisque nous savons que, par

un point quelconque de ces plans, on peut faire passer une infinité de lignes d'inclinaisons différentes.

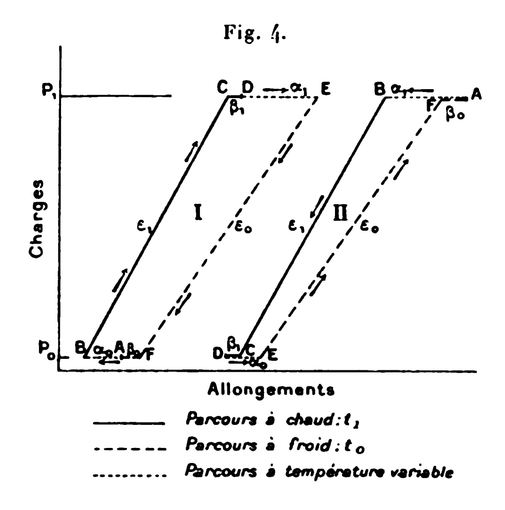
Dire toutes les conséquences absurdes qu'on a voulu déduire de la formule

$$\frac{\partial \alpha}{\partial P} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{1}$$

n'est pas ici dans notre sujet. Nous nous bornerons à prouver, d'une manière indiscutable, que la longueur n'est pas une fonction bien déterminée de la température et de la charge, même comme première approximation. *En d'autres termes, suivant la technique, on obtient des coefficients moyens α et ε à peu près quelconques.*

19. Nos expériences consistent à décrire un cycle en fonction des deux variables, charge et température. Nous suivons exactement, dans les opérations, le procédé par lequel les mathématiciens démontrent que la relation (2) exprime que dL est une différentielle exacte. Il y a deux techniques, suivant que le cycle est parcouru dans un sens ou dans le sens inverse. Soient P_0, P_1 les charges extrêmes; t_0, t_1 les températures extrêmes. La première technique (*fig.* 4, I)

Fig. 4.



consiste à faire croître à chaud (température t_1) la charge de P_0 à P_1 (parcours BC); à attendre un certain temps à charge et température constantes P_1, t_1 (parcours CD); à refroidir jusqu'à t_0 et à attendre un certain temps sous P_1, t_0 (parcours DE); à diminuer la charge de P_1 à P_0, à température constante t_0 (parcours EF); à attendre un certain temps sous P_0, t_0 (parcours FA); à réchauffer jusqu'à t_1 et à attendre un certain temps (parcours AB). Nous désignerons par α_0 et α_1 les allongements à charge constante le long des parcours DE

et AB; par ε_0 et ε_1 les allongements à température constante le long des parcours EF et BC; par β_0 et β_1 les allongements à charge et température constantes qui suivent les allongements désignés par ε_0 et ε_1.

La seconde technique (*fig.* 4, II) est identique à la première, mais le parcours se fait en sens inverse. Le long des parcours BC et EF les charges croissent et décroissent, comme pour toutes les expériences de ce Mémoire, de manière que les allongements varient proportionnellement au temps; en réalité, c'est la vitesse d'allongement qu'on impose. Les courbes BC et EF ne sont figurées que schématiquement et ne sont pas effectivement rectilignes. La vitesse d'allongement utilisée est de 1^m en 173^s. On s'arrange pour parvenir aux points B, D, E, A de 15^m en 15^m. Ce temps suffit largement pour amener le caoutchouc de la température t_0 à la température t_1, ou inversement, le long des parcours DE, AB.

L'expérience précédente donnera des coefficients moyens α_0, α_1, ε_0, ε_1 dans des conditions particulières. Nous les comparerons aux mêmes coefficients déterminés en fixant séparément les côtés du cycle. On produit des tractions rythmées de période $T = 134^s$, de telle sorte que la charge oscille entre P_0 et P_1 à température constante. On utilise le mouvement oscillatoire d'une plate-forme mue par un excentrique pour soulever un poids $P_1 - P_0$ suspendu au fil et, par conséquent, décharger le fil d'autant, ou pour l'abaisser et, par conséquent, recharger le fil. L'amplitude de l'oscillation est réglée, par rapport à l'allongement du fil, de manière que les charges P_0 et P_1 ne soient réalisées que pendant une petite fraction de la période. Pendant le reste le fil s'allonge et se raccourcit automatiquement suivant une loi à peu près sinusoïdale par rapport au temps. Nous obtiendrons ainsi deux nouveaux coefficients ε'_0 et ε'_1, suivant que la température constante est t_0 ou t_1.

Nous produirons de même, à charge constante, des cycles de température : la température passe, de 15^m en 15^m, de t_0 à t_1, ou inversement. Nous obtenons ainsi deux nouveaux coefficients moyens α'_0 et α'_1, suivant que la charge est P_0 ou P_1.

Voici maintenant le résultat des expériences; on ne donne que ce qui se rapporte aux cycles à peu près fixés.

20. *Premier fil.* — $P_0 = 250$, $P_1 = 450$, $t_0 = 13°$, $t_1 = 80°$, $L_0 = 2570$.

Technique I.

$$\varepsilon_1 = 2147, \quad \beta_1 = 168, \quad \alpha_1 = 1192,$$
$$\varepsilon_0 = 2690, \quad \beta_0 = 183, \quad \alpha_0 = 567.$$

Le cycle n'est pas encore fermé; on a

$$(2147 + 168 + 1192) - (2690 + 183 + 567) = 67.$$

Technique II.

$$\varepsilon_1 = 2255, \qquad \beta_1 = 87, \qquad \alpha_0 = 461,$$
$$\varepsilon_0 = 2776, \qquad \beta_0 = 237, \qquad \alpha_1 = 1076.$$

Le cycle n'est pas encore fermé, on a :

$$-2255 - 87 + 461 + 2776 + 237 - 1076 = 56.$$

1° $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$. Pour une même variation de charge, l'allongement est plus grand à froid qu'à chaud. Les courbes en traits interrompus sont plus inclinées que les courbes en traits pleins.

2° $\alpha_0 < \alpha_1$. Le raccourcissement, pour une même variation de température, est plus grand sous une forte charge.

3° Pour comprendre les valeurs relatives des réactivités, on se rappellera : *a*, à chaud la réactivité est plus petite qu'à froid; *b*, elle est plus grande quand la charge vient de croître que quand elle vient de décroître.

Dans la technique II les causes précédentes produisent des effets de même sens. Suivant CD, la charge vient de décroître (parcours BC) et l'on est à la température t_1 : on a $\beta_1 = 87$. Suivant FA, la charge vient de croître et l'on est à froid, aussi a-t-on $\beta_0 = 237$.

Dans la technique I, au contraire, les causes produisent des effets de sens inverses. Suivant CD, la charge vient de croître, mais on est à chaud; $\beta_1 = 168$. Suivant FA, la charge vient de décroître, mais on est à froid, $\beta_0 = 183$. On a $\beta_1 < \beta_0$; l'effet de la température, qui est une diminution, l'emporte.

Sur le même fil on a modifié le parcours : $P_0 = 50$, $P_1 = 150$, $t_0 = 13°$, $t_1 = 80°$.

Technique I.

$$\varepsilon_1 = 529, \qquad \beta_1 = 47, \qquad \alpha_1 = 165,$$
$$\varepsilon_0 = 610, \qquad \beta_0 = 79, \qquad \alpha_0 = 42.$$

Technique II.

$$\varepsilon_0 = 579, \qquad \beta_0 = 109, \qquad \alpha_1 = 120,$$
$$\varepsilon_1 = 534, \qquad \beta_1 = 45, \qquad \alpha_0 = 9.$$

On a encore

$$\varepsilon_0 > \varepsilon_1, \qquad \alpha_0 < \alpha_1, \qquad \beta_1 < \beta_0.$$

21. *Expérience complète. Nouveau fil.* — $P_0 = 550$; $P_1 = 650$; $t_0 = 13°$; $t_1 = 80°$; $L_0 = 2100$.

On décrit tout d'abord des cycles à température constante. On donne les tem-

pératures et les heures des essais, ce qui a, comme nous le verrons, une importance considérable.

Cycles isothermes. — Premier jour.

ε'_0	8^{h}	738	$8^{h}.25^{m}$	731
ε'_1 (chauffé à 8^h25^m)...	8.45	977	9.25	998
ε'_0 (refroidi à 9^h25^m)...	9.35	973	9.55	950
ε'_1 (chauffé à 9^h55^m)...	10.10	1004	10.25	1010
ε'_0 (refroidi à 10^h25^m)...	10.40	975	[repos à 10^h50^m sous P_0] 11^h30^m, 959; 11^h40^m, 929; [repos à 11^h40^m sous P_0] 1^h30^m, 875.	

Pour les expériences régulièrement croisées on a $\varepsilon'_1 > \varepsilon'_0$. Mais ε'_0 passe de 975 à 875, simplement en attendant que l'effet du recuit disparaisse peu à peu. La variation de ε'_0 avant et après le recuit est de 731 à 975, soit de 3 à 4.

Technique I. — Premier jour, soir.

$$\varepsilon_1 = 1004, \quad \beta_1 = 93, \quad \alpha_1 = 1158,$$
$$\varepsilon_0 = 981, \quad \beta_0 = 51, \quad \alpha_0 = 1147.$$

On a maintenant

$$\varepsilon_0 < \varepsilon_1, \quad \beta_1 > \beta_0.$$

Technique II.

$$\varepsilon_1 = 1026, \quad \beta_1 = 32, \quad \alpha_0 = 1006,$$
$$\varepsilon_0 = 1028, \quad \beta_0 = 118, \quad \alpha_1 = 1045.$$

Bien entendu $\beta_1 < \beta_0$: nous savons que cette condition est nécessaire pour la technique II.

MÊME FIL : $P_0 = 350$, $P_1 = 450$.

Cycles isothermes. — Deuxième jour, soir.

ε'_0		954		
ε'_1 (chauffé à 1^h45^m)....	2^h	941		
ε'_0 (refroidi à 2^h15^m)....	2^h30^m	1075		
ε'_1 (chauffé à 2^h45^m)....		939		
ε'_0 (refroidi à 3^h15^m)....	3^h30^m	1096	4^h	1081

Abandonné 16^h sous P_0; le lendemain matin du troisième jour : 902.

Maintenant nous avons $\varepsilon'_1 < \varepsilon'_0$ pour des cycles régulièrement croisés. L'influence du recuit et du temps passé à basse température après le recuit se montre à l'évidence; ε'_0 passe de 1096 à 902, soit de 1000 à 839. Les valeurs de ε'_1 sont beaucoup moins variables que les valeurs de ε'_0 : la transformation de la matière à

chaud influe beaucoup moins sur la valeur des paramètres à chaud que sur leur valeur à froid.

Technique I. — Troisième jour, matin.

$$\varepsilon_1 = 926, \qquad \beta_1 = 67, \qquad \alpha_1 = 821,$$
$$\varepsilon_0 = 1055, \qquad \beta_0 = 87, \qquad \alpha_0 = 655.$$

Technique II. — Troisième jour, soir.

$$\varepsilon_1 = 935, \qquad \beta_1 = 55, \qquad \alpha_0 = 580,$$
$$\varepsilon_0 = 1096. \qquad \beta_0 = 120, \qquad \alpha_1 = 793.$$

Cycles isothermes.

ε'_1	4^h	958			
ε'_0 (refroidi à $4^h 15^m$).	$4^h 30^m$	1123	$4^h 37^m$	1119	Abandonné 16^h sous P_0.

Le lendemain, matin du quatrième jour : 929.

Pour compléter l'expérience on refroidit et l'on réchauffe de 15^m en 15^m sous charge constante :

$$\alpha'_0 = 570, \qquad \alpha'_1 = 854.$$

Or nous avions obtenu :

Technique I.

$$\alpha_0 = 655, \qquad \alpha_1 = 821,$$

Technique II.

$$\alpha_0 = 580, \qquad \alpha_1 = 793.$$

Donc α'_0 est plus petit que le plus petit des α_0 et α'_1 est plus grand que le plus grand des α_1. En définitive, suivant la technique choisie, on obtient des coefficients α et ε variables dans de larges limites, sans qu'il soit possible de dire qu'une technique se recommande théoriquement de préférence à une autre. Le cycle se ferme approximativement après un petit nombre de parcours, parce que les variables (charge, température) varient périodiquement en fonction du temps; mais la forme des cycles dépend de cette loi de périodicité.

Nous aurons à revenir longuement sur les modules d'élasticité et les coefficients de dilatation.

EFFET DES TRACTIONS RYTHMÉES SUR LA RÉACTIVITÉ.

22. Nous avons expliqué, au début de ce Mémoire, par quel procédé il est possible de réaliser des tractions rythmées. La méthode consiste essentiellement à imposer à l'extrémité supérieure du caoutchouc une oscillation verticale d'amplitude a et de période connue. Nous étudierons dans un prochain Mémoire l'ensemble du phénomène. Qu'il nous suffise de dire pour l'instant qu'on modifie aisément l'amplitude de l'allongement périodique du caoutchouc en modifiant la période de la traction imposée. Soit A l'amplitude de l'oscillation de l'extrémité inférieure, l'amplitude de l'allongement périodique est une fonction de a, de A et de la différence de phase ε des mouvements oscillatoires des deux extrémités : ε dépend de la période du mouvement imposé et de la période du mouvement propre de la masse suspendue, quand l'extrémité supérieure est immobile et qu'on suppose les frottements nuls. En faisant varier la période du mouvement imposé, on modifie la grandeur de l'allongement périodique du caoutchouc.

Voici maintenant les résultats.

On parcourt des cycles $T_0 = 5^m$, $T_1 = 32^m$, $P_1 = 500^g$. Pour les cycles impairs on maintient immobile l'extrémité supérieure, pour les cycles pairs on lui impose, entre 30^s et $31^m 30^s$ après l'établissement de la charge P_1, des oscillations verticales dont l'amplitude est de $1^{mm},9$. D'un fil à l'autre on fait varier la période de ce mouvement oscillatoire.

Premier fil. — Période 1^s; le nombre des périodes entre 30^s et $31^m 30^s$ est 1860. L'amplitude du mouvement oscillatoire de l'extrémité inférieure est de 1^{mm} environ. La longueur initiale du fil est 3000; l'allongement sous 500^g est naturellement variable d'un cycle à l'autre : il vaut 5700 en moyenne. Le fil a donc alors 8700 environ de longueur et la valeur maxima de l'allongement périodique est voisine de $38 + 20 = 58$, soit $1:150$ de la longueur. Voici maintenant les Δ entre 30^s et 32^m; S signifie sans tractions rythmées, A signifie avec tractions rythmées :

S.	S.	A.	S.	A.
456	286	260	244	240

Si l'effet des tractions était absolument nul, on pourrait tracer une courbe unique où les nombres précédents seraient les ordonnées et où l'on prendrait pour abscisses les numéros d'ordre des cycles. On doit tracer effectivement deux courbes, S et A, dont les ordonnées ne diffèrent pas plus de $1:65$. Voilà l'ordre de grandeur de l'accroissement de Δ produit par 1860 tractions.

Après 2 heures de repos, on reprend la même expérience :

S.	S.	A.	S.	A.
329	242	241	233	236

On trace les deux couches; la différence des ordonnées est de 1 : 50 environ : il y a léger accroissement de Δ quand les tractions rythmées sont imposées.

Second fil. — Période $1^s 46^m$; $a = 19$; $A = 80$, la grandeur maxima de l'allongement périodique est $38 + 160 = 198$. La longueur moyenne du fil sous 500^g étant voisine de 8500, le rapport de la grandeur de l'allongement périodique à la longueur est de 1 : 40 environ :

S.	S.	A.	A.
568	287	266	240

Après une nuit de repos, on reprend :

S.	S.	A.	S.	A.	S.
360	251	248	233	242	229

Si nous traçons les courbes des Δ avec et sans tractions rythmées, en fonction des numéros d'ordre des cycles de chaque série, comme il a été dit plus haut, nous trouvons une augmentation par les tractions rythmées de 1 : 25 environ.

On modifie la période et on l'amène à $0^s,65$. A est immédiatement ramenée à 5. La grandeur maxima de l'allongement est de $2(19 + 5) = 48$, soit 1 : 180 de la longueur. Le nombre de périodes entre 30^s et $31^m 30^s$ est 2860. On trouve pour Δ :

S.	S.	A.	S.	A.	S.
354	248	237	233	232	228

L'effet des tractions rythmées est nul.

Nous laissons de côté des particularités du phénomène sur lesquelles nous aurons à revenir dans un prochain Mémoire; par exemple, une diminution de A du commencement à la fin de l'expérience, c'est-à-dire à mesure que le nombre des tractions subies par le fil augmente, diminution qui semble indiquer un accroissement du frottement intérieur. Voici les conclusions des expériences précédentes.

La réactivité n'a pas pour cause les trépidations. On serait forcé d'admettre dans cette hypothèse que des trépidations très petites et très nombreuses, non mesurables et dont la possibilité d'existence est douteuse, produisent des effets plus de 100 fois plus grands que 2860 oscillations allongeant périodiquement le fil de 5^{mm}. Si d'ailleurs on augmente l'allongement produit par les tractions

rythmées, ce qui revient à augmenter périodiquement la charge P_1, Δ croît d'une quantité toujours petite et du même ordre que l'accroissement qui résulterait d'une augmentation constante et continue de la charge P_1, ce qui explique tout naturellement les effets observés. L'hypothèse qu'en augmentant indéfiniment le nombre des trépidations, on augmente leurs effets, est d'ailleurs insoutenable.

Le lecteur se rapportera au Chapitre IX du Mémoire *Sur les courbes de déformation des fils* de M. Bouasse, où il trouvera développées pour les métaux des considérations analogues.

Donc la réactivité a d'autres causes que les trépidations. Mais il y a plus.

Si, comme le veut M. Duhem, on peut tracer à l'avance et une fois pour toutes dans le plan charge-allongement les courbes d'aller et de retour, elles se coupent *sous des angles finis, excepté sur la ligne des états naturels, les trépidations doivent avoir un effet, distinct de celui de la réactivité* d'après ce qui précède, *et qui ne peut pas être négligeable.* De sorte que le résultat négatif de l'expérience prouve à la fois, *du seul fait qu'il est négatif,* la fausseté des deux hypothèses fondamentales de M. Duhem, c'est-à-dire la fausseté de toute sa théorie.

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

DES

ACTIONS PHOTOGRAPHIQUES,

PAR M. C. CAMICHEL.

INTRODUCTION.

L'étude des actions photographiques présente un grand intérêt par elle-même et par ses applications. Parmi celles-ci, j'ai étudié spécialement la Spectrophotométrie.

La Photographie peut rendre de grands services, pour la photométrie des radiations lumineuses, ultra-violettes et même infra-rouges, comme l'a montré M. A. Cotton dans un travail du plus grand intérêt (*Sur la photométrie chimique et photographique* : Congrès de Montauban de l'Association française pour l'avancement des Sciences, août 1902) (¹).

Pour se rendre compte de la difficulté des méthodes spectrophotométriques dans l'ultra-violet, il suffit de prendre un exemple : M. Soret a fait des recherches très importantes sur l'absorption des rayons ultra-violets (*Archives de Genève*, t. IX, 1883); il détermine l'épaisseur sous laquelle cesse d'être perceptible telle ou telle raie d'un métal, que l'on emploie comme source de lumière, et il obtient ainsi une courbe dont les ordonnées sont les épaisseurs du liquide étudié, qui produisent l'extinction des diverses raies métalliques et les abscisses les longueurs d'onde des radiations correspondantes. Ces courbes donnent de précieuses indications sur les variations de l'absorption avec la réfrangibilité et M. Soret a montré tout le parti qu'on pouvait en tirer; mais il reconnaît lui-même que l'on ne peut pas déduire de ces mesures la valeur absolue des coefficients d'absorption, et il énumère les diverses causes d'erreur :

La lumière produite par les étincelles d'induction est variable. L'intensité de la fluorescence, produite par une lumière de réfrangibilité déterminée, ne peut

(¹) Le Mémoire de M. Cotton est résumé dans le n° 37 de l'*Éclairage électrique*, t. XXXII, septembre 1902.

pas être considérée comme constante en tout temps, au moins lorsqu'on emploie des lames liquides telles que l'esculine. La sensibilité de l'œil varie suivant les circonstances et suivant l'opérateur. Les diverses raies des spectres métalliques sont d'intensités très différentes, d'où résulte qu'à égalité de coefficients d'absorption l'épaisseur amenant l'extinction est plus grande pour les raies très brillantes que pour celles qui le sont moins. L'intensité de la fluorescence est variable suivant la réfrangibilité.

La méthode photographique permet, comme je me propose de le démontrer, de faire des mesures précises dans le spectre ultra-violet; les obstacles à vaincre ne tiennent pas à la méthode, mais à la difficulté de maintenir constantes des sources de lumière ayant un spectre ultra-violet étendu.

Dans le spectre lumineux, pour peu qu'on fasse des mesures photométriques, on constate rapidement la difficulté des mesures dans le bleu et le violet; au contraire, les déterminations se font aisément dans le rouge ([1]), l'orangé, le jaune et surtout le vert. La Photographie sera donc utile pour les radiations lumineuses les plus réfrangibles.

Enfin, dans l'infra-rouge, on peut, comme M. Cotton l'a proposé ([2]), utiliser le phénomène découvert par M. Villard : la destruction par les radiations infra-rouges et lumineuses du voile produit sur la plaque photographique par les rayons X.

Pour bien montrer la difficulté des méthodes qui ont été proposées pour la photométrie des radiations lumineuses et ultra-violettes, je citerai un deuxième exemple : l'emploi du mélange de chlore et d'hydrogène.

Bunsen et Roscoe, dans leur travail classique sur cette question, ont constaté qu'il est nécessaire d'employer au moins 3 jours et même plus pour préparer l'appareil avant de commencer les expériences; qu'il faut maintenir la température des gaz parfaitement constante de manière que les changements de volume dus à la dilatation ne se confondent pas avec les effets de l'action chimique; d'ailleurs la présence d'un excès de chlore ou d'hydrogène ou d'un gaz étranger retarde la combinaison du chlore et de l'hydrogène produite par la lumière : ainsi, il suffit de la présence de quelques millièmes en volume de gaz oxygène, hydrogène ou chlore pour produire un effet marqué; le gaz oxygène surtout donne des retards très grands.

Les difficultés de cette méthode sont manifestes.

La méthode photographique présente au contraire une grande simplicité, mais on lui adresse quelques reproches : d'abord, la loi suivant laquelle l'impression

---

([1]) Dans mon travail sur les indophénols (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1901), j'ai constaté que l'on pouvait faire de très bonnes mesures dans le rouge, sans aucune fatigue.

([2]) A. Cotton (*loc. cit.*).

photographique varie avec l'intensité de la radiation est complexe et d'ailleurs inconnue; cette impression dépend de la plaque employée, du voile qu'elle a pu subir, des circonstances du développement, et même, d'après l'opinion la plus répandue, les diverses régions d'une plaque déterminée possèdent des sensibilités tout à fait distinctes, dont on peut dire seulement qu'elles varient d'une façon continue.

Le travail qui va suivre est destiné à répondre à ces diverses objections; je montre que l'on peut instituer une méthode photométrique, fondée sur l'emploi des plaques photographiques, même de celles dont la sensibilité n'est pas constante par suite de leur fabrication, de la nature de l'émulsion, de son épaisseur variable, ou de circonstances accidentelles qui peuvent comme le voile altérer la sensibilité. Cette méthode exige seulement que l'hétérogénéité soit continue dans un intervalle de quelques millimètres, condition qui est toujours largement réalisée; bien plus, l'expérience montre que les plaques que l'on trouve actuellement dans le commerce, par exemple les plaques Lumière, marque bleue [1], sont sauf de très rares exceptions d'une remarquable homogénéité, si l'on a soin d'éliminer soigneusement différentes causes d'erreurs dont la plus grande est la variation de la source de lumière employée pour faire sur une même plaque diverses impressions voisines. Je puis dire que, chaque fois que sur une plaque non voilée, j'ai trouvé une discontinuité notable dans l'homogénéité, j'ai retrouvé dans la source de lumière employée une variation correspondante.

Le travail dont l'exposé va suivre comprend :

I. Une étude du degré d'homogénéité des plaques photographiques du commerce.

II. La description d'une méthode photométrique fondée sur la Photographie. — Détails expérimentaux :

a. Source de lumière maintenue constante;

b. Obturateur permettant de faire des durées de pose bien connues;

c. Châssis à mouvement micrométrique destiné à un double usage : impressionner la plaque et étudier celle-ci après son développement;

d. Moyens d'atténuation employés, détermination du zéro d'une fente;

e. Précautions à prendre dans le développement, choix de la plaque;

f. Exemple de mesures faites sur une plaque hétérogène ou sur une plaque homogène, par la méthode d'observation directe des noirs et par la méthode de la pile thermo-électrique.

---

[1] La marque violette donne des résultats beaucoup moins bons au point de vue de l'homogénéité.

Cette méthode est due à M. Bouasse, il l'a publiée dans son remarquable Mémoire *Sur les actions photographiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1894). J'ai employé dans mes recherches plusieurs des appareils qui lui avaient déjà servi, en particulier le pendule T (*voir* p. 336), qu'il a mis très gracieusement à ma disposition. On verra que les résultats de M. Bouasse ont été complètement vérifiés par mes expériences.

III. Détermination du degré de précision de la méthode, augmentation de la sensibilité d'une plaque par un voile préliminaire.

IV. Autres méthodes.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DU DEGRÉ D'HOMOGÉNÉITÉ DES PLAQUES PHOTOGRAPHIQUES DU COMMERCE.

J'adopterai les définitions de M. Bouasse, relativement aux noirs d'un cliché :

« Soient I l'intensité du faisceau incident, I_1 l'intensité transmise aux points de pose nulle, I_2 l'intensité en un autre point où l'action lumineuse n'a pas été nulle; le noir de ce point est arbitrairement défini par le rapport

$$\frac{I_1}{I_2} - 1 = N.$$

» Soit I_3 l'intensité transmise à travers le verre dépouillé de sa gélatine, le nombre

$$\frac{I_3}{I_1} - 1 = V$$

donne une idée nette du voile du cliché : on doit tâcher qu'il soit voisin de 0. L'unité avec laquelle on mesure les intensités est arbitraire. » (*Bouasse, loc. cit.*)

Pour étudier l'homogénéité, on peut d'abord employer la méthode suivante : exposer une plaque photographique devant une source de lumière suffisamment éloignée pour produire un éclairement constant en tous les points de la gélatine. La plaque ainsi impressionnée est développée dans un bain obtenu en mélangeant l'oxalate de potasse et le sulfate ferreux; le bain a une épaisseur de 2^{cm} ou 3^{cm} au-dessus de la plaque, il est constamment agité, mais assez légèrement pour éviter de découvrir la gélatine. La plaque fixée, alunée, séchée, est observée

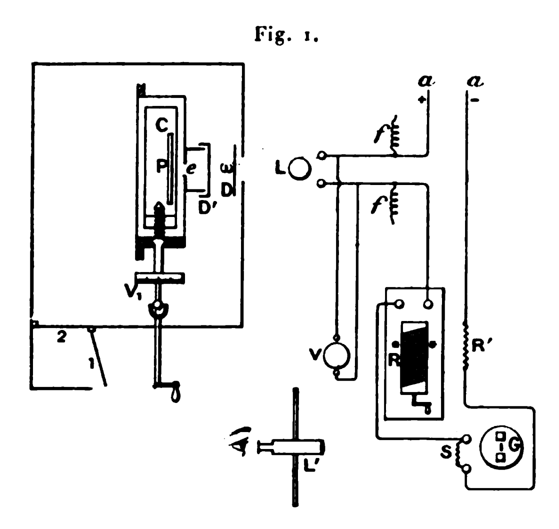
directement, ou au moyen de la pile thermo-électrique, comme nous le verrons plus loin.

Cette méthode, assez rudimentaire, suffit néanmoins pour montrer que les plaques sont presque toujours homogènes, excepté dans le voisinage des bords. Celles qui sont très peu homogènes manifestent déjà leur hétérogénéité sur une bande témoin que l'on prélève dans le sens de la longueur et qu'on développe, sans la soumettre à l'action de la lumière.

Pour étudier d'une façon plus complète l'homogénéité des plaques, j'ai employé un dispositif, que l'on retrouvera plus loin, à propos de la méthode spectrophotométrique.

Une batterie d'accumulateurs de 30 ampères-heures de capacité environ, sous le régime de 15 ampères, produit le courant qui traverse une lampe de Nernst L [modèle de 1 ampère 115 volts (*fig.* 1)].

Fig. 1.



L lampe de Nernst; *ff* fils aboutissant à une deuxième lampe de Nernst (voir *fig.* 3); V voltmètre Weston; *aa* arrivée des fils venant d'une batterie d'accumulateurs; R rhéostat Cance continu; G galvanomètre, L' lunette et règle du galvanomètre G; S shunt du galvanomètre G; ω obturateur (voir *fig.* 8); C chariot mû par V_1; P plaque photographique; D' deuxième obturateur; 1, 2 double porte.

La lampe de Nernst employée (*fig.* 1) est à filament rectiligne; la spirale d'allumage a été supprimée; pour amorcer la lampe, on chauffe le filament légèrement avec une lampe à alcool. On évite de changer le sens du courant, car la durée des filaments se trouve réduite par des intervertissements de polarité: le métal dégagé entraîne (E. Bosc, *Annalen der Physik,* 1902) par ses changements de volume des tensions à l'intérieur du corps incandescent. Les supports du filament et les parties voisines de la lampe sont recouverts de noir de fumée; cette condition est

surtout nécessaire quand on fait varier l'intensité de la lumière pénétrant dans l'appareil, en approchant ou éloignant la lampe de la fente.

Les fils amenant le courant sont isolés avec le plus grand soin par des isolateurs à double cloche. La batterie est chargée complètement; on lui fait débiter, avant de faire l'expérience, un nombre de coulombs suffisant pour que le voltage ne varie plus sensiblement. On se trouve alors dans des conditions correspondant à la branche horizontale de la courbe de décharge, ayant comme abscisses le temps et comme ordonnées le voltage aux bornes. Le courant de cette batterie traverse la lampe de Nernst L, un rhéostat R continu, modèle de Cance, vertical; un galvanomètre Deprez-d'Arsonval, G, convenablement shunté et muni d'une lunette et d'une règle divisée pour observer les déviations, un rhéostat ordinaire R′ qui permet de régler le voltage aux bornes de la lampe par l'observation d'un voltmètre V. La lampe de Nernst est protégée contre les courants d'air qui font varier très notablement l'intensité de la lumière qu'elle émet, puisqu'une lampe fonctionnant un peu au-dessous de son voltage s'éteint quand on souffle sur son filament. On laisse la lampe fonctionner une heure, afin de permettre aux rhéostats, à la lampe et à ses enveloppes de s'échauffer et d'atteindre un régime permanent.

Pendant les opérations, l'observateur maintient constante l'intensité du courant par l'observation du galvanomètre Deprez-d'Arsonval. Avec ces précautions, on obtient une source qui est constante pendant plusieurs heures et qui peut être reproduite identique à elle-même pendant plusieurs jours. La lampe de Nernst n'est pas un étalon photométrique, mais elle constitue une source constante d'un emploi très commode; son éclat intrinsèque est très considérable; elle convient très bien, beaucoup mieux que les lampes à incandescence ordinaires, pour l'éclairage des fentes des spectroscopes.

Voici quelques nombres, indiquant la constante de cette lampe au moyen de l'impulsion galvanométrique produite par le rayonnement de lampe sur une pile thermo-électrique :

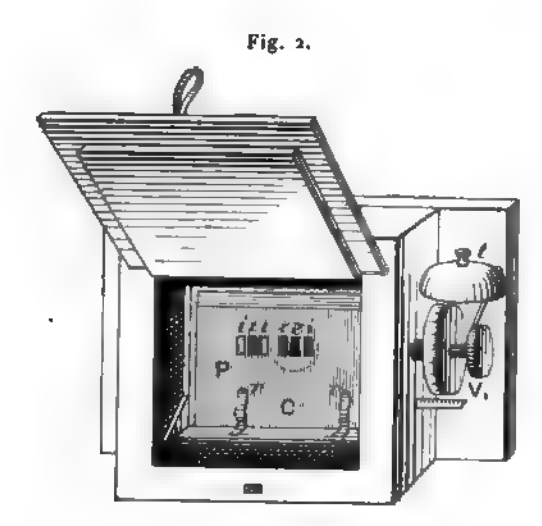
	Zéro du galvanomètre.	Déviation.
3h.25m	227,0	246,1
3.45	229,2	245,3
4	232,0	245,15
4.30	240,4	245,0
5	225,4	245,35
6	217,7	246,2

La lampe de Nernst L éclaire à travers l'ouverture *e* (*fig.* 1) la plaque photographique P, qui est placée sur un chariot micrométrique C, dans un châssis qui sert à un double usage: la plaque s'y impressionne et on la replace

dans le même appareil, plus tard, quand on veut étudier la transparence des noirs.

La plaque est maintenue par des ressorts r (*fig.* 2), un chariot micrométrique mû par une vis V_1 permet de la faire avancer et d'impressionner des régions très voisines. Un timbre t avertit l'opérateur chaque fois que la vis V_1 a fait un certain

Fig. 2.



P plaque photographique portée sur le chariot C et maintenue par les ressorts r; i impressions photographiques; V_1 vis micrométrique manœuvrant le chariot C; t timbre avertisseur.

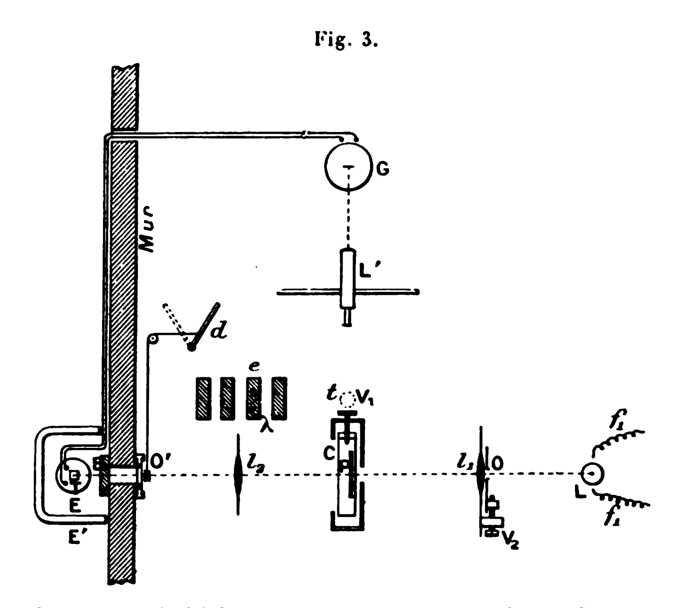
nombre de tours. Au moyen d'une transmission à la Cardan, on peut manœuvrer la plaque à distance. Le châssis contenant la plaque P est disposé dans une chambre, entièrement close, dans laquelle on peut entrer par une double porte 1, 2; toutes les opérations: installation de la plaque, développement, fixage, se font dans l'obscurité la plus complète. La lumière de la lampe L pénètre seulement, quand l'obturateur est dans la position 2 (*voir* p. 336).

Pour supprimer le halo, j'ai employé des plaques antihalo Lumière, mais sans décolorer la plaque après le développement et le fixage. La couleur rouge des plaques n'a pas d'inconvénient pour l'observation des clichés avec la pile thermo-électrique, elle gêne seulement dans les observations directes. Toutefois, j'ai constaté que les plaque antihalo étaient en général assez hétérogènes; j'ai employé le plus souvent des plaques ordinaires, le halo étant supprimé par le procédé qu'indique M. Bouasse : « On noircit avec du vernis noir (noir de fumée dans du vernis copal à l'alcool) du papier calque fin; on le découpe une fois sec à la dimension des clichés. Au moment d'utiliser ceux-ci, on applique sur la face verre un de ces papiers recouvert d'huile. Au moment de développer, on enlève le

papier et l'on essuie le cliché avec un chiffon. » Des expériences multiples m'ont démontré l'efficacité de cette méthode.

Après avoir fait sur la plaque une série de photographies très rapprochées et équidistantes (ayant par exemple $6^{mm} \times 2^{mm}$ et séparées par $0^{mm},5$), on replace la plaque développée et fixée sur le même chariot, dans le châssis déjà employé ; une seconde lampe de Nernst L maintenue constante comme la précédente éclaire une lentille l_1 (*fig.* 3) munie d'un œil de chat ; cette lentille forme sur la plaque

Fig. 3.



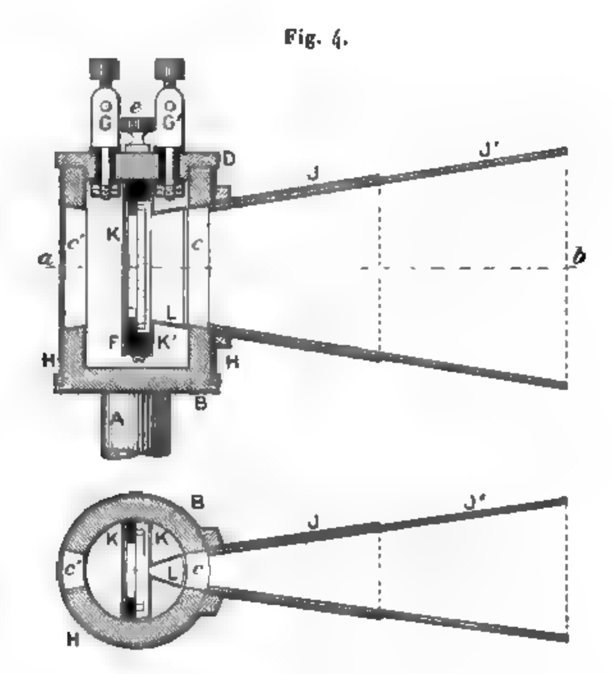
G galvanomètre de faible résistance ; L' lunette et règle pour l'observation des déviations galvanométriques ; T pile thermo-électrique ; E, E' enceintes ; B bloc de verre de $0^m,03$ d'épaisseur ; O' écran double manœuvré par d ; l_1, l_2 lentilles convergentes ; C châssis à vis micrométrique ; P plaque photographique ; V_1 vis micrométrique ; t timbre ; O œil de chat manœuvré par la vis V_2 ; L lampe de Nernst ; f_1, f_1 fils aboutissant en f, f (voir *fig.* 1).

photographique, au centre de l'impression étudiée, une image rectiligne λ, dont on peut faire varier l'intensité en diaphragmant plus ou moins la lentille l_1. La lentille l_2 forme une image réelle de λ sur les soudures d'une pile linéaire T (*fig.* 4), fer constantan, comprenant vingt éléments ayant une masse et une capacité calorifique très faibles. C'est le modèle adopté par M. Rubens, auquel j'adresse tous mes remerciements pour les précieuses indications qu'il a bien voulu me fournir. La figure 4 représente le détail de la pile.

Un bloc de verre B de 3^{cm} d'épaisseur est destiné à éviter les causes d'erreur provenant des irrégularités dans l'épaisseur du verre de la plaque photographique étudiée.

La pile thermo-électrique est protégée par une double enveloppe dont l'exté-

Fig. 4.



rieure E′ est creuse et contient de l'eau. Les bornes de la pile communiquent avec un galvanomètre (modèle Rubens, construit par Keiser et Schmidt) (*fig.* 5); l'équipage mobile du galvanomètre pèse $0^g,09$; les bobines ont chacune 20^{ω} de résistance. La sensibilité de cet appareil est beaucoup réduite dans ces expériences. La période d'oscillation du galvanomètre est 8 secondes. L′ est la lunette d'observation de ce galvanomètre. Un écran *double* O′ maintenu par un ressort et pouvant être manœuvré par une tige *d*, qu'un déclenchement abandonne brusquement à elle-même, permet de protéger la pile et de faire tomber brusquement sur elle le rayonnement de la lampe de Nernst. L'opérateur étudie successivement la transparence de régions *homologues* du cliché, puisque c'est la même vis micrométrique et le même chariot qui supporte la plaque dans la première et dans la seconde partie de l'expérience. Ce dispositif a un grand avantage, surtout quand les plages formées sur la plaque photographique ne sont pas homogènes, et c'est le cas des observations spectrophotométriques même dans les appareils possédant une grande dispersion.

La pile thermo-électrique est placée dans une pièce voisine entièrement close, à l'abri, par conséquent, des perturbations [1].

---

[1] Pour éviter l'échauffement de la pile par conductibilité, je l'ai disposée sur un support analogue à celui qu'on emploie pour les calorimètres Berthelot; cette précaution n'est pas inutile, comme l'on peut s'en assurer par l'expérience.

Exemple. — Pour montrer la nécessité du dispositif adopté et décrit plus haut, il suffit de faire sur une même plaque photographique, dont l'homogénéité a été prouvée déjà grossièrement par l'emploi de bandes témoins, une série d'impressions : les unes, série *a*, en abandonnant la lampe à elle-même ; les autres, *b*, en

Fig. 5.



Galvanomètre M. du Bois et Rubens (*Electrotechnische Zeitschrift*, 1894).

maintenant constante la déviation du galvanomètre G par la manœuvre du rhéostat continu. Dans le premier cas, il se produit des variations *accidentelles*, dans le courant par exemple, dues à des chutes de matière active dans les accumulateurs, et ces variations donnent à la plaque une apparence d'hétérogénéité ; dans le second cas l'homogénéité est très satisfaisante. La figure 6 est la reproduction de la plaque P.

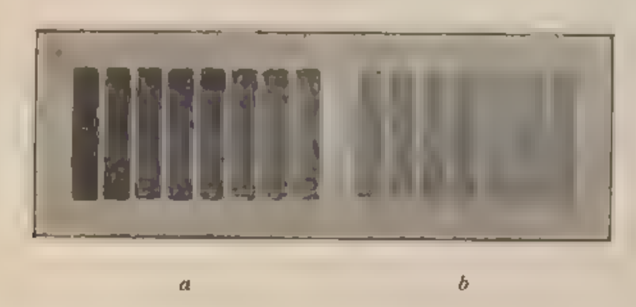
Les déviations galvanométriques pour les huit impressions de la série *a* sont :

351 343 342,5 347 354,5 363 356,5 354,5 ;

le galvanomètre Deprez-d'Arsonval, pendant la durée de ces impressions photo-

graphiques, a manifesté des variations, dans sa déviation, correspondant à celles que le cliché indique ; le courant, traversant la lampe de Nernst, a augmenté et a passé par un maximum au moment où l'on faisait la photographie n° 3, il a varié

Fig. 6.



a *b*

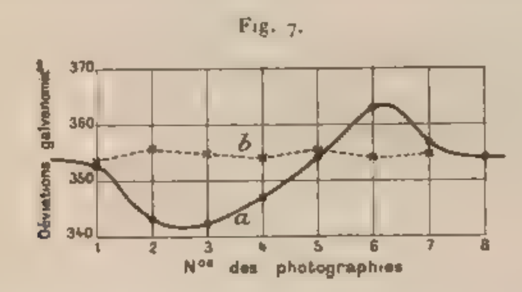
ensuite en sens inverse, a passé par un minimum et il est redevenu ce qu'il était primitivement ; une cause *accidentelle* et *passagère* avait donc fait varier l'intensité de ce courant.

Les impressions photographiques de la série *b* donnent comme déviations :

354 356 354 355 356 354 355.

En faisant de nombreuses expériences avec des plaques Lumière, Jougla, etc.,

Fig. 7.



je suis arrivé à ce résultat que l'homogénéité des plaques photographiques du commerce est très satisfaisante. En particulier les plaques Lumière marque bleue donnent sur une surface de $4^{cm} \times 4^{cm}$ des noirs différant rarement de plus du $\frac{1}{100}$ de leur valeur relative et, en choisissant les plaques employées, la différence des noirs n'atteint pas $\frac{1}{200}$. Ce choix des plaques se fait en développant une bande découpée parallèlement à la grande dimension et impressionnée en une seule fois par une source éloignée.

L'homogénéité est encore bien plus grande si l'on n'utilise qu'une surface de la plaque de 1^{cm^2} ou 2^{cm^2}, surface bien suffisante pour une comparaison spectrophotométrique, comme on le verra plus loin.

Les plaques photographiques employées par M. Bouasse en 1893-1894 étaient certainement différentes de celles que l'on fabrique aujourd'hui. C'est à cette différence que j'attribue l'hétérogénéité que M. Bouasse a constatée dans ses expériences, qui portent sur un trop grand nombre de clichés (3000 épreuves) pour que ses résultats puissent être mis en doute et attribués, par exemple, à une variation continue en fonction du temps de la source de lumière employée. Il est certain, toutefois, que la lampe à pétrole est beaucoup moins constante que la lampe de Nernst employée comme je l'ai indiqué plus haut. Mais la durée des impressions dans les expériences de M. Bouasse était trop courte pour que lampe à pétrole ait le temps de varier notablement. Au contraire, dans mes expériences, qui durent facilement une heure, il fallait adopter une source plus constante; c'est ce que j'ai fait.

CHAPITRE II.

DESCRIPTION D'UNE MÉTHODE SPECTROPHOTOMÉTRIQUE FONDÉE SUR LA PHOTOGRAPHIE.

Il ne faut pas demander à la plaque photographique de mesurer directement l'intensité d'une radiation; il vaut mieux se contenter de l'employer pour constater l'égalité ou l'inégalité de deux radiations de même longueur d'onde. Elle peut alors rendre les plus grands services. C'est la conclusion à laquelle est arrivé M. Bouasse (1) à la suite de ses travaux sur les impressions photographiques; c'est également l'opinion de M. Cotton.

Mes expériences m'ont également conduit à employer une méthode de zéro, où la plaque photographique joue un rôle analogue à celui de l'œil, lorsqu'il apprécie l'égalité de deux plages monochromatiques au contact.

Méthode.

Soient I et I′ les intensités des deux radiations, de même longueur d'onde, à comparer. Sur une même plaque photographique, on fait tomber la première radiation d'intensité I, pendant le temps t, on déplace légèrement la plaque photographique et, dans le voisinage de la première impression, on en produit une seconde au moyen de la deuxième radiation I′ atténuée suivant un rapport connu K_1; la durée de pose étant la même, on fait ensuite, dans le voisinage de

(1) *Loc. cit.*

la seconde impression, une troisième photographie au moyen de la première radiation d'intensité I, puis une quatrième au moyen de la seconde radiation, dont l'intensité I' est atténuée dans le rapport K_2, etc. On a ainsi une série de photographies équidistantes, correspondant à des intensités

$$I, \quad K_1 I', \quad I, \quad K_2 I', \quad I, \quad K_3 I', \quad \ldots;$$

on suppose

$$I' > I, \qquad 1 > K_1 > K_2 > K_3 \ldots,$$

la durée de pose étant maintenue invariable. Le cliché développé est étudié au moyen d'une pile thermo-électrique qui permet de déterminer la transparence pour les rayons calorifiques (*voir* p. 330) des diverses impressions photographiques. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$ les impulsions du galvanomètre relié à la pile, obtenues quand on interpose sur le trajet des rayons calorifiques les diverses impressions photographiques. On construit deux courbes ayant pour abscisses, l'une et l'autre, les positions x des impressions photographiques, et pour ordonnées, l'une les impulsions du galvanomètre correspondant aux photographies de I, la seconde les impulsions du galvanomètre correspondant aux photographies de

$$K_1 I', \quad K_2 I', \quad K_3 I', \quad \ldots;$$

ces deux courbes se coupent en un point A correspondant à un point P de la plaque photographique, dont l'abscisse est x.

Soient $f(I, x)$ la fonction qui représente la variation de la transparence des impressions photographiques avec l'intensité I de la radiation et le point de la plaque, pour la longueur d'onde λ.

On a, pour le point P,

$$f(I, x) = f(K I', x),$$

ce qui donne

$$\frac{I}{I'} = K,$$

les variations K et x étant d'ailleurs liées par une relation simple, linéaire de préférence, et que l'expérimentateur choisit arbitrairement.

Il faut remarquer que cette méthode n'exige nullement l'homogénéité complète de la plaque employée, mais seulement la continuité dans l'hétérogénéité. Or cette continuité est admise par tous les auteurs qui ont étudié cette question. On peut dire en définitive que la méthode précédente revient à constater que deux radiations impressionnent également *le même point* d'une plaque photographique, et qu'elles ont par conséquent la même intensité. L'examen direct de la plaque photographique éclairée uniformément et *faiblement* permet de déter-

miner le rapport $\frac{I}{I'}$ avec une approximation qui est déjà de l'ordre de celle que donnent de bonnes mesures photométriques. On peut s'en contenter dans bien des cas. La valeur $\frac{I}{I'}$ étant ainsi approximativement connue, il est nécessaire de faire seulement un petit nombre d'expériences avec la pile thermo-électrique.

Il est maintenant nécessaire de donner quelques détails expérimentaux :

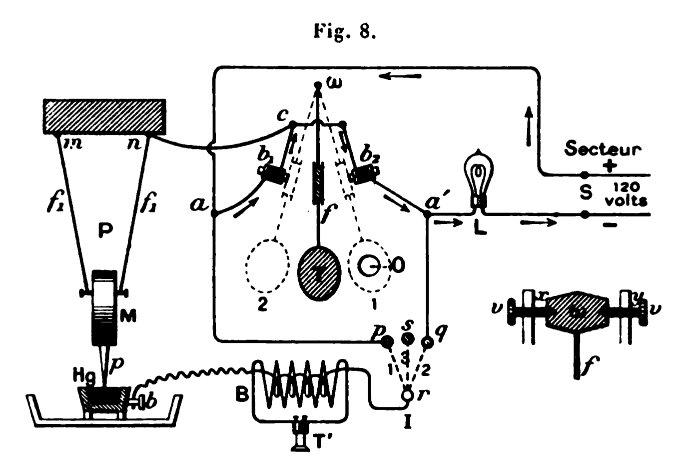
a. Source de lumière maintenue constante (*voir* p. 327);

b. Obturateur permettant de faire des durées de pose bien connues.

Description de l'obturateur (*fig.* 8).

L'obturateur se compose d'un pendule, ωfT, formé par une tige de fer suspendue en ω et pouvant tourner autour d'un axe horizontal, déterminé par les deux

Fig. 8.



Hg cuvette en fer contenant du mercure; p pointe en fer terminant la masse de plomb M du pendule P; f_1 fils de cuivre supportant M; B bobine d'induction dont le primaire est traversé par le courant du secteur quand l'une des bobines b_1 ou b_2 est mise en court-circuit; L rhéostat de lampes; ω axe de suspension du pendule f; f lame de fer doux recouverte de papier; T plaque de zinc qui obture l'ouverture O, dans la position 1, et la découvre complètement dans la position 2; b_1, b_2 bobines, traversées par le courant du secteur S, et qui sont mises en court-circuit par le grand pendule P; P pendule, dont la période à 15°C. est de 3,79 secondes; I interrupteur à double direction; dans la position 1, communication pr établie, la bobine b_1 est mise en court-circuit, dans la position 2 c'est la bobine b_2 qui est mise en court-circuit; T' téléphone branché sur le secondaire de la bobine B.

pointes x et y de deux vis v : le plan d'oscillation du pendule est ainsi bien déterminé. En f se trouve une masse de fer doux recouverte d'une mince feuille

de carton; en T est soudée une plaque de zinc qui vient obturer exactement l'ouverture O, par laquelle pénètre la lumière dans l'appareil. La masse de fer f vient buter, aux extrémités de sa course, contre deux bobines b_1 et b_2, et le carton mince qui l'entoure empêche qu'elle ne se colle d'une façon permanente aux noyaux de ces deux bobines; il est facile de trouver par tâtonnements l'épaisseur d'entrefer nécessaire pour que l'appareil fonctionne régulièrement. Les bobines b_1 et b_2 sont traversées par le courant continu de la ville, elles sont placées en série; comme leur résistance (30$^{\omega}$ par bobine) n'atténuerait pas suffisamment le courant, on place en série, avec elles, deux lampes à incandescence L qui forment rhéostat.

Les bobines b_1 et b_2 permettent *de commander le pendule* T *au moyen d'un deuxième pendule* M. Les poses se font donc automatiquement; leurs durées sont égales à 1, 2, 3, ..., n fois la période d'oscillation du pendule M. Pour obtenir ce résultat, il suffit de suspendre au plafond de la salle où se fait l'expérience, ou dans une salle voisine, une lourde masse de plomb, au moyen de fils de bronze $f_1 f_1$. La masse M est munie à sa partie inférieure d'une pointe en acier qui vient frotter légèrement sur la surface d'un bain de mercure Hg contenu dans une cuvette en fer, placée elle-même dans une cuvette en porcelaine, dont la position peut être réglée vis-à-vis de la pointe p, au moyen d'un support convenable. Si le pendule M est dans une autre salle que l'opérateur, celui ci fait usage d'une bobine d'induction B, dont le circuit secondaire contient un téléphone, qu'il suffit d'écouter pour déterminer le nombre d'oscillations du pendule M. L'opérateur, en même temps qu'il écoute dans le téléphone, doit manœuvrer l'interrupteur I qui permet de fixer la durée de pose, et un rhéostat qui permet de maintenir constante l'intensité du courant qui passe dans la lampe de Nernst.

Les connexions sont établies de la façon suivante : le courant du secteur S passe d'abord dans la bobine b_1 puis dans la bobine b_2 et dans les lampes L, lorsque la manette de l'interrupteur I, à deux directions, se trouve placée sur le plot mort S, dans la position 3. Si la manette de l'interrupteur I est dans la position 1, le pendule M, quand la pointe p touche le mercure Hg, a pour effet de mettre en court-circuit la bobine b_1 ; au contraire, quand la manette de l'interrupteur I se trouve dans la position 2, le pendule M met en court-circuit la bobine b_2. Le circuit primaire de la bobine d'induction B est traversé par les courants ainsi produits et c'est pour cela qu'on peut suivre le mouvement du pendule M sans le voir, en écoutant dans le téléphone T'.

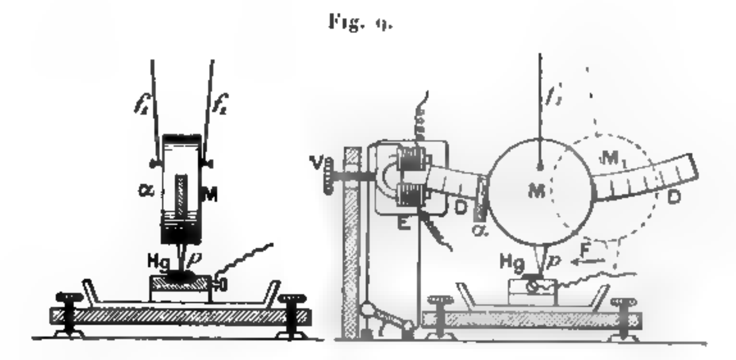
On peut aussi employer une autre méthode, qui consiste à placer les lampes L dans la même salle que l'interrupteur I; l'observateur placé dans cette salle voit l'éclat des lampes L varier périodiquement : à chaque court-circuit, le courant est augmenté, il en résulte une augmentation d'éclairement; pendant une oscillation double de M, il y a deux courts-circuits et, par conséquent, deux maxima d'inten-

sité des lampes L; la période d'oscillation du pendule M est 3,79 secondes à 15° C.; elle est assez longue pour que les lampes puissent indiquer nettement les divers courts-circuits. Cette remarque est nécessaire; on sait, en effet, qu'une lampe à incandescence soumise à un courant variant un peu rapidement aurait un éclat constant : une lampe à incandescence met, en effet, un temps très appréciable pour s'éteindre ou s'allumer.

Si le pendule M est dans l'obscurité, l'observateur placé dans son voisinage peut compter le nombre de ses oscillations en regardant les étincelles qui se produisent quand la pointe p quitte le bain de mercure; il y a deux étincelles à chaque oscillation complète du pendule M, mais il n'en voit qu'une seule, l'autre est cachée. Le nombre des étincelles vues est donc égal au nombre de périodes de M.

La méthode le plus souvent employée a été celle ci : un aide était chargé de faire les poses photographiques (et de maintenir constante la source employée); il observait le pendule M qui oscillait dans une salle éclairée, devant une graduation D; il comptait à haute voix le nombre de périodes. A la fin de chaque période un électro-aimant rattrapait le pendule M, sans lui donner de secousses. Cet électro-aimant E (*fig.* 9) était muni aux extrémités de son noyau de feuilles

Fig. 9.



E électro-aimant : α armature de l'électro-aimant E; i interrupteur permettant de mettre brusquement en court-circuit les bobines de l'électro-aimant E; V vis permettant de rapprocher de M l'électro-aimant E.

Dans la figure 9 M est en équilibre, la pointe p est en contact avec *l'une des extrémités* du bain de mercure.

D graduation permettant de mesurer l'amplitude de l'oscillation du pendule M.

de caoutchouc contre lesquelles l'armature α, portée par le pendule M, venait s'appliquer. Pour mettre le pendule en mouvement, on manœuvrait un interrupteur i, qui met en court-circuit l'électro-aimant. L'amplitude des oscillations de M décroissant légèrement pendant une pose photographique, il est nécessaire de faire avancer au moyen de la vis V la planche sur laquelle est fixé l'électro-aimant; quand on a rattrapé le pendule, on ramène l'électro-aimant dans sa position primitive, afin de maintenir *constante* l'amplitude des oscillations de M.

Réglages divers. — Le pendule ωf T doit être réglé avec soin. Les deux vis v dont les pointes fixent l'axe d'oscillation doivent permettre au pendule d'osciller librement. Les bobines b_1 et b_2 sont bien symétriques par rapport au pendule dans sa position d'équilibre. L'interrupteur I étant dans la position 3, on amène le pendule dans la position 1, l'armature f reste collée contre le noyau de la bobine b_2; on met la manette de l'interrupteur en 2, le pendule fait une oscillation simple et se colle sur b_1. La manette de l'interrupteur est placée en 1, le pendule fait une deuxième oscillation et se colle contre b_2. On répète ces deux manœuvres un grand nombre de fois pour être sûr que le pendule est bien réglé; il suffit de constater que le choc de l'armature f contre les deux noyaux de b_1 et b_2 donne un bruit de même intensité. Si cette condition n'est pas réalisée, on rapproche de la verticale ωf T celle des bobines qui a donné le choc le plus faible.

Pour régler le pendule M, on fait affleurer la pointe f et le bord extrême du bain de mercure Hg, M étant abandonné à lui-même. Le court-circuit qui produira les déplacements du pendule T correspondra au mouvement du pendule M dans le sens F. L'autre court-circuit ne sera pas utilisé pour la commande de T. On voit l'avantage de cette disposition, *le court-circuit utilisé se produira toujours au moment où le pendule* M *passe par la verticale*. La légère diminution d'amplitude du pendule M pendant une pose n'altérera pas la périodicité des courts-circuits. Quand l'appareil est bien réglé, la pointe p trace sur le mercure une ligne très fine à peine perceptible.

Manœuvre de l'obturateur.

Supposons que l'on veuille faire une pose égale à la durée de dix périodes du pendule M; on met celui-ci en mouvement. Le pendule T est dans la position 1, l'ouverture O est obturée. La manette de l'interrupteur I est placée en 2 par un mouvement brusque, au moment où le pendule est en M_1. Le pendule redescend, passe par la verticale, à ce moment la bobine b_2 est mise en court-circuit, le pendule T décrit une demi-oscillation et s'accroche contre b_1; il faut remarquer que la mise en court-circuit de b_2 n'est pas instantanée et que l'armature f met un certain temps pour quitter le noyau de b_2, mais le retard du départ de T par rapport au passage par la verticale est constant; ce retard est le même d'ailleurs quand T quitte b_1 ou b_2, à cause de la symétrie de l'appareil. Le pendule T s'étant accroché au noyau de b_1 on compte les passages de M par la verticale dans le sens de la flèche F. Un peu avant le onzième passage de M par la verticale, quand le pendule se trouve en M_1, on amène brusquement la manette de l'interrupteur I dans la position 1, le onzième court-circuit se produit aux bornes de la bobine b_1

et ramène T dans la position 1; la pose est terminée, elle est exactement égale à dix périodes d'oscillation de M.

Cet appareil m'a rendu les plus grands services, il a fonctionné pendant un an sans se dérégler; il faut seulement tenir compte des variations de température qui altèrent la durée de la période de M. L'effet des variations de la température sur le pendule T est beaucoup moins important et n'intervient que dans le mouvement de T de la position 2 à la position 1.

On peut, au moyen de ce dispositif, faire des poses exactement connues et variables dans de grandes limites (depuis quelques secondes jusqu'à 30 minutes). Le pendule M peut commander à distance et simultanément plusieurs pendules T. Lorsqu'il est nécessaire de faire mouvoir l'obturateur dans un plan quelconque, autre qu'un plan vertical, on remplace le pendule par un obturateur mû par un ressort et actionné par les bobines b_1 et b_2. Un pareil dispositif peut rendre des services dans les observatoires pour la photographie des étoiles, et la détermination de leur grandeur.

c. Châssis à mouvement micrométrique (*voir* p. 329).

d. Moyens d'atténuation employés.

Pour atténuer l'intensité de la lumière, j'ai employé deux méthodes :

1° Celle des variations de distance. L'intensité de la lumière qui tombe sur la plaque photographique varie en raison inverse du carré de la distance du filament de la lampe de Nernst à la fente. Un fil à plomb placé dans le prolongement du filament permet de lire cette distance sur une règle divisée. Ce procédé convient très bien quand il est nécessaire d'obtenir des intensités très faibles; il a l'inconvénient d'entraîner quelquefois des variations dans la source, à cause des courants d'air qui se produisent autour du filament quand on le déplace.

2° L'emploi d'une fente mue par une vis micrométrique donne également de bons résultats, surtout quand on veut mesurer des rapports $\frac{I}{I'}$ peu différents de l'unité. Il est nécessaire de se rendre compte de l'ordre de grandeur des bavures de la fente vis-à-vis de sa largeur. La fente variable ne convient pas quand il faut atténuer beaucoup l'intensité de la lumière qui pénètre dans l'appareil. Il ne faut pas non plus ouvrir trop la fente, surtout si elle est dissymétrique (c'est-à-dire à un seul volet mobile), car, dans ce cas, l'image du filament de la lampe de Nernst ne se forme plus en des *points homologues* des diverses impressions photographiques, lorsqu'on étudie le cliché avec la pile thermo-électrique.

Remarque. — Pour une radiation déterminée, toute la lumière tombant sur la fente doit arriver sur la plaque photographique sans être arrêtée par les diaphragmes qui se trouvent sur les lentilles et les prismes.

Étude de la fente. Détermination du zéro.

On examine au microscope les bords de la fente, afin de chercher la région la meilleure, c'est-à-dire celle où les deux bords sont bien rectilignes et parallèles. On choisit la région où les bavures sont de peu d'importance. Les poussières sont enlevées en essuyant les bords avec un morceau de bois de fusain convenablement taillé et légèrement humecté. Il ne faut pas essuyer la fente avec un linge dont les fils s'attacheraient aux bords de la fente, surtout si elle est en platine, comme l'une de celles que j'ai utilisées.

Il est nécessaire de déterminer le zéro de la fente, c'est-à-dire la division du tambour de la vis micrométrique correspondant au contact des deux bords. Une méthode grossière consisterait à tourner la vis micrométrique de façon à fermer la fente et à s'arrêter au moment où l'on sent une résistance; si la fente est bonne, elle ne doit plus, à ce moment, laisser passer de lumière; mais, si les deux bords ne sont pas parallèles, le contact n'a lieu qu'à une extrémité de la fente, et à l'autre extrémité la lumière passe. Cette méthode ne peut être employée, car elle détériore la fente et sa vis micrométrique. Il est indispensable de ne jamais amener les deux bords de la fente au contact et d'employer pour la détermination du zéro une méthode indirecte, par exemple, celle qui suit :

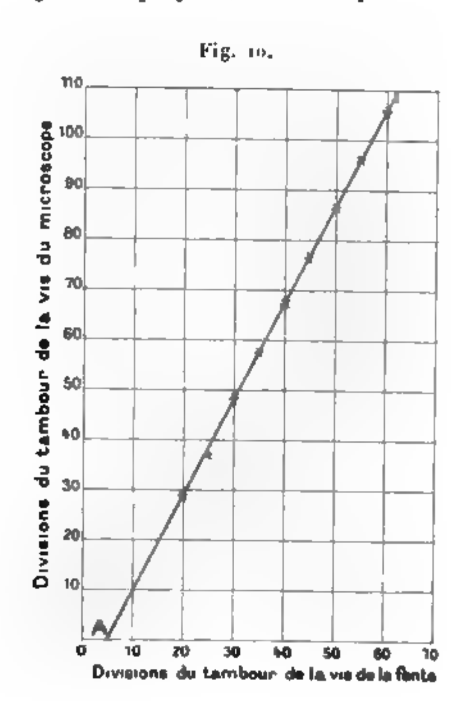
On dispose devant la fente un microscope de grossissement assez faible et possédant un réticule; un chariot micrométrique permet de déplacer le microscope normalement à son axe. On commence par ouvrir largement la fente en tournant convenablement la vis micrométrique dont elle est munie; on tourne ensuite cette vis en sens inverse d'une quantité suffisante pour qu'elle vienne buter contre son écrou et qu'elle l'entraîne. On s'arrête, et l'on détermine alors la largeur de la fente, en pointant avec le microscope successivement les deux bords de celle-ci, c'est-à-dire en amenant successivement l'image de chacun des deux bords en coïncidence avec la croisée des fils du réticule. On recommence la même détermination plusieurs fois, en ayant soin de tourner la vis de la fente toujours dans le même sens, pour éviter le temps perdu. On adopte comme sens de rotation de cette vis celui qui correspond à la fermeture de la fente et l'on peut ainsi amener les deux bords à une très faible distance l'un de l'autre. Au contraire, si l'on choisit l'autre sens de rotation, on ne peut pas approcher les deux bords d'une distance plus faible que le jeu de l'écrou par rapport à la vis : le zéro est moins bien déterminé et l'on risque d'abîmer la fente en amenant accidentellement les deux bords en contact et de changer en même temps le zéro. Il faut donc, dans les déterminations photométriques, adopter comme sens de rotation celui qui correspond à la fermeture de la fente : c'est pour ce sens de rotation que le zéro de la fente a été déterminé.

Voici un exemple de détermination du zéro :

Divisions du tambour de la vis de la fente.	Divisions du tambour de la vis du microscope.
60	106,0
55	96,0
50	87,0
45	76,5
40	68,0
35	57,5
30	48,5
25	37,0
20	29

La courbe (*fig.* 10) construite en prenant comme abscisses les divisions du tambour de la vis de la fente, et comme ordonnées les divisions correspondantes du tambour de la vis du microscope, est une droite; ce qui montre la régularité des deux vis dans les régions employées, on lit le point A où cette droite coupe

Fig. 10.



l'axe des abscisses, point qui indique le zéro; c'est la division 5,0 du tambour de la vis de la fente. La même détermination doit être faite assez souvent pour vérifier que le zéro ne change pas.

On emploie le même microscope pour vérifier la vis micrométrique de la fente;

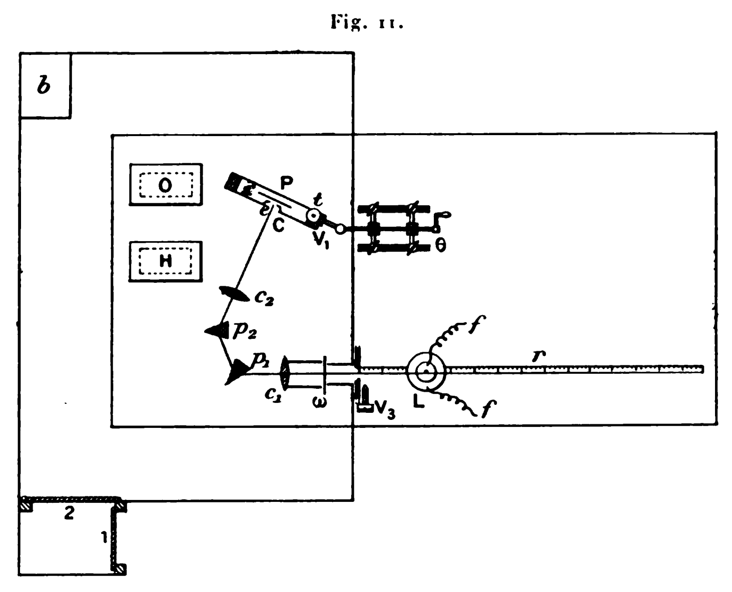
pour cela, on détermine diverses largeurs de la fente en fonction d'une région toujours la même de la vis micrométrique du microscope.

e. Précautions à prendre dans le développement, choix de la plaque (*voir* p. 327).

f. Exemples de mesures.

La figure 11 représente le spectrophotomètre photographique. La légende donne des explications suffisantes. L'appareil étant réglé comme un spectroscope,

Fig. 11.



L lampe de Nernst qui se déplace sur une règle divisée r; V_3 vis micrométrique de la fente; c_1 lentille collimatrice; p_1, p_2 prismes réfringents; c_2 lentille convergente dont le foyer est sur la plaque P; C chariot micrométrique, commandé par la transmission à la Cardan θ; H, O pendules très lourds pour balancer les cuvettes à oxalate et hyposulfite; 1, 2 double porte.

on amène une raie déterminée au milieu de l'ouverture e, qui limite la surface de la plaque qui sera impressionnée, on fixe solidement le châssis dans cette position et la vis V_1 est reliée à la transmission à la Cardan mue de l'extérieur par une manivelle θ.

Premier exemple. — On détermine le coefficient de transmission d'une plaque de verre jaune, pour la radiation de longueur d'onde 5351. La fente variable a son zéro à la division 27 du tambour. Le Tableau suivant et la courbe (*fig*. 12) suffisent pour expliquer la détermination. On remarque que la courbe 1 monte assez rapidement, ce qui prouve que, pendant l'expérience, la lampe à pétrole a baissé d'une façon régulière, sans empêcher de faire les mesures correctement.

Divisions de la règle qui repère le chariot micrométrique mû par V_2.	Tambour de V_2.	Position de c.	Déviations galvanométriques α.
80.....	27 (2 tours de V_2)	lame	298,0
75.....	70 (1 tour $\frac{1}{2}$ environ de V_2)	pas de lame	291,5
70.....	27 (2 tours de V_2)	lame	302,0
65.....	72 »	pas de lame	297,0
60.....	27 »	lame	304,5
55.....	74 »	pas de lame	306,5
50.....	27 »	lame	311,5
45.....	76 »	pas de lame	308,0
40.....	27 »	lame	315,0
35.....	78 »	pas de lame	317,0
30.....	27 »	lame	319,0
25.....	80 »	pas de lame	328,0
20.....	27 »	lame	323,0
15.....	82 »	pas de lame	338,0

c est la vis d'un chariot supportant la lame étudiée.

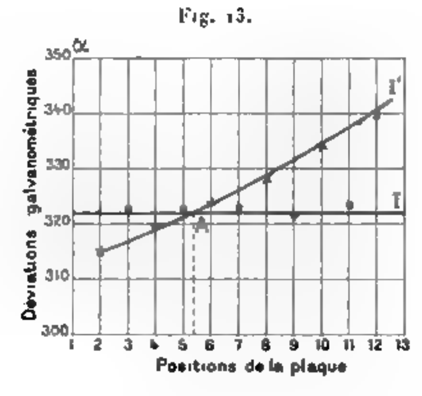
Fig. 12.

Le rapport x cherché (coefficient de transmission) est donné par l'équation

$$x = \frac{149}{200} = 0,745.$$

Même détermination. La lampe de Nernst employée est maintenue constante (*fig.* 13).

Fig. 13.



Numéros des impressions photographiques.	Sources.	k.	α.	
1......	$I \times x$	1	322	
2......	$I' = I \times 0,79$	0,79	315	$I \times 0,79 > I \times x$
3......	$I \times x$	1	323	
4......	$I' = I \times 0,76$	0,76	319	$I \times 0,76 > I \times x$
5......	$I \times x$	1	322,8	
6......	$I' = I \times 0,73$	0,73	324	$I \times 0,73 < I \times x$
7......	$I \times x$	1	323,4	
8......	$I' = I \times 0,70$	0,70	328	$I \times 0,70 < I \times x$
9......	$I \times x$	1	321,7	
10......	$I' = I \times 0,67$	0,67	334	$I \times 0,67 < I \times x$
11......	$I \times x$	1	324	

on trouve

$$x = 0,739.$$

CHAPITRE III.

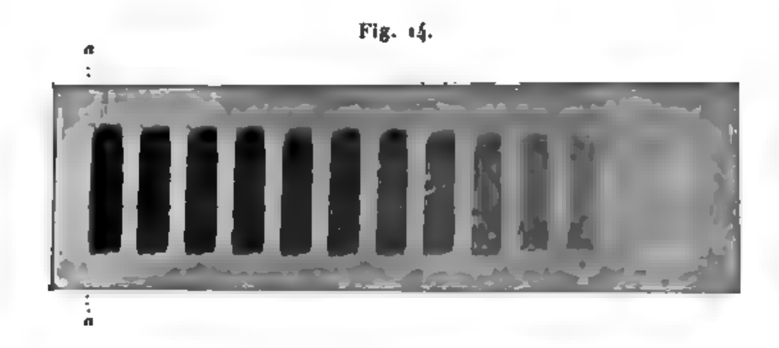
DÉTERMINATION DU DEGRÉ DE PRÉCISION DES EXPÉRIENCES SPECTROPHOTOMÉTRIQUES. AUGMENTATION DE LA SENSIBILITÉ PAR UN VOILE PRÉLIMINAIRE.

Pour se rendre compte du degré de précision des expériences spectrophotométriques fondées sur l'emploi de la plaque photographique et pour rechercher les conditions optima dans lesquelles il faut se placer autant que possible, il suffit de faire pour les diverses radiations l'expérience suivante :

On choisit une plaque photographique 13×18, on découpe dans la région du centre plusieurs bandes parallèles à la grande dimension de la plaque. Une de ces bandes est développée sans avoir été impressionnée, une deuxième est développée après avoir été impressionnée sur toute son étendue par un éclairement uniforme, ce sont les plaques témoins m, n. Si elles paraissent bien homogènes à l'examen direct et à l'examen par la pile thermo-électrique, on emploie les autres bandes à la détermination de la précision. Les bandes extrêmes p et q sont jetées, leur homogénéité étant presque toujours défectueuse, même dans une plaque excellente.

Dans la région centrale de la bande choisie, on fait une série d'impressions photographiques, régulièrement placées; la figure 14 représente en vraie grandeur ce cliché. L'impression numérotée 0 est la plus forte, l'impression 11

Fig. 14.



n'est pas visible directement sur le cliché, mais la pile thermo-électrique manifeste très nettement son existence. La ligne *aa* indique la région où l'on a formé l'image réelle du filament de la lampe Nernst [1].

Le Tableau ci-contre indique les déviations galvanométriques correspondant aux diverses impressions photographiques et à la plaque dans les régions où elle n'a pas reçu de lumière, les noirs varient de 21,5 pour la photographie n° 0, jusqu'à 0,035 pour la photographie n° 11.

Les expériences citées ici se rapportent à la lumière jaune du sodium, la durée de pose était 2 minutes environ (exactement $30 \times 3,79 = 113^s,7$).

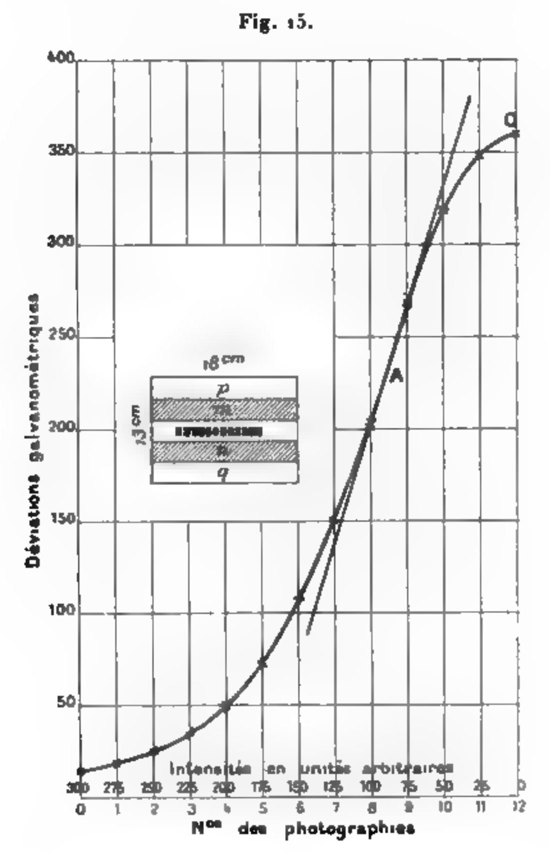
La courbe obtenue est régulière : elle montre que si l'intensité lumineuse varie à partir de zéro, l'impression photographique croît d'abord lentement, la tangente à l'origine 0 est très peu inclinée sur l'axe des abscisses; l'impression photographique s'accélère ensuite : la courbe possède en A un point d'inflexion et, dans cette région, elle se confond assez longtemps avec sa tangente; c'est pour cette région A, comprise entre les intensités 150 et 75, que les conditions expérimentales sont les meilleures. Après le point d'inflexion, la courbe descend moins rapidement, et elle tend vers une asymptote horizontale. Dans l'expérience précédente, les intensités et la durée de pose étaient insuffisantes pour produire le premier renversement. La courbe précédente est intéressante : elle montre que l'impression photographique, d'abord lente, croît ensuite brusquement; à ce moment-là doit se produire un phénomène d'allure explosive, que la température de la gélatine permettrait peut-être d'étudier. (On pourrait déterminer cette température au moyen d'une pile fer-constantan, ayant une capacité calorifique très faible et possédant un grand nombre de soudures, dont les unes seraient

---

(1) *aa* devrait être au milieu de la première impression.

laissées à l'air libre, les autres mises en contact intime avec la gélatine, sur laquelle

Fig. 15.



N^os de photogr.	Intensités en unités arbitraires.	Déviation galvan.
0.....	300	16
1.....	275	20
2.....	250	26
3.....	225	34
4.....	200	48
5.....	175	71
6.....	150	108,5
7.....	125	150,5
8.....	100	204
9.....	75	268
10.....	50	320
11.....	25	348
12.....	0	360

Durée de pose : 2 minutes environ.

$\lambda = 0^{\mu},5891$.

Plaques Lumière, marque bleue.

on ferait tomber des rayons ultra-violets. L'expérience présente des difficultés, je n'ai pas encore eu l'occasion de la réaliser.)

Quand l'intensité de la lumière continue à croître, l'impression photographique se ralentit et finit par ne plus augmenter sensiblement.

En définitive, la courbe des noirs en fonction de l'intensité rappelle, par sa forme, les courbes d'aimantation.

Il faudra se placer, dans le cas cité, dans les conditions expérimentales suivantes : intensité comprise en 100 et 75 (1), pose 112 secondes; il sera facile, par l'emploi de la lampe de Nernst, de reproduire cette intensité avec une exactitude très suffisante. La courbe des noirs montre que l'on a

$$\frac{dI}{I} = \frac{1}{222} \quad \text{pour} \quad d\alpha = 1,$$

c'est-à-dire qu'une différence d'intensité égale à $\frac{1}{222}$ corespond à une variation de 1 division pour la déviation galvanométrique (or, on évalue facilement le quart d'une division). On peut dire, par conséquent, que la précision des mesures sera limitée par la constance de la source, qu'il est difficile de maintenir constante avec une précision de plus du $\frac{1}{300}$.

Si l'expérience photométrique nécessite l'emploi d'intensités notablement différentes des intensités optima, dont on vient de voir la détermination, il sera indispensable, au moins dans des expériences définitives, de voiler la plaque afin d'atteindre la région A. C'est un procédé analogue à celui qui consiste à employer dans les relais des électro-aimants polarisés.

Voici une expérience mettant en évidence directement l'influence du voile : sur une même plaque photographique, on fait 2 impressions différentes, l'une sur une plaque non voilée, l'autre sur une plaque préalablement voilée. On obtient sur la première plaque une impression dont la transparence est représentée par une déviation galvanométrique : $\alpha_1 = 230$, alors que le fond sur lequel se détache cette photographie correspond à une transparence représentée par la déviation galvanométrique $\alpha_2 = 273$.

Sur la plaque préalablement voilée, la même radiation que dans le premier cas produit, avec une durée de pose identique, une impression dont la transparence est représentée par $\alpha'_1 = 96$, alors que le fond correspond à une transparence représentée par $\alpha'_2 = 141$.

Dans le premier cas le noir est 0,18; dans le second cas, sous l'influence du voile, le noir devient 0,47.

(1) Dans cette région, les déviations galvanométriques varient linéairement, en fonction de l'intensité de la lumière, ce qui est avantageux, pour la construction des courbes (*voir* p. 344).

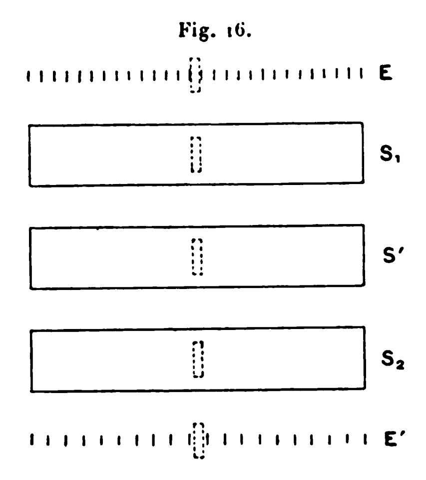
CHAPITRE IV.

AUTRES MÉTHODES.

Emploi du spectrographe de Steinheil.

Cet appareil m'a permis de réaliser la méthode suivante, qui paraît donner de bons résultats, mais sur laquelle j'ai fait peu d'essais ([1]). Le châssis de ce spectrographe est muni d'un mouvement dans un sens parallèle à la fente, c'est-à-dire transversalement à la grande dimension des spectres. On commence par photographier : 1° l'échelle micrométrique E (*fig.* 16); 2° le spectre S_1 de la première

Fig. 16.



source de lumière; 3° le spectre S′ de la source de lumière qu'on veut comparer à la première; 4° le spectre S_2 de la première source; 5° l'échelle micrométrique E′. Le chariot micrométrique est inutile. Ces cinq photographies s'obtiennent en déplaçant le châssis dans la glissière située au fond de la chambre photographique du spectrographe; à chaque déplacement un taquet arrête le châssis dans la position voulue. La plaque photographique replacée dans le même châssis après développement et fixage est observée ensuite avec la pile thermo-électrique. On amène l'image réelle du filament de la lampe sur une division déterminée de la photographie E du micromètre, on vérifie que l'image du filament tombe bien sur

([1]) M. Cotton, dans le Mémoire cité, a indiqué plusieurs méthodes de photométrie photographique, d'ailleurs fort pratiques. Celle que je décris ici a l'avantage d'utiliser un appareil tel qu'il est livré par le constructeur.

la même division de la photographie E′ du micromètre quand on déplace convenablement le cliché de bas en haut. La comparaison au moyen de la pile thermo-électrique des spectres S_1 et S_2 indique le degré d'homogénéité de la plaque. On cherche par tâtonnements sur quelle division du micromètre il faut placer l'image du filament pour que la transparence de S′ soit égale à la moyenne des transparences de S_1 et S_2.

Le noir est-il fonction de l'intégrale $\int_0^\theta I\,dt$, dans laquelle θ désigne le temps de pose?

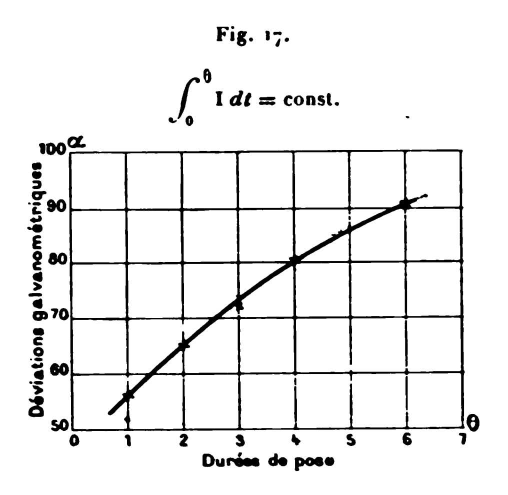
Il y a plusieurs appareils photométriques qui sont fondés sur cette hypothèse : le noir est invariable si : $\int_0^\theta I\,dt$ est constant.

Divers expérimentateurs l'ont admise, en particulier Simon (*Wied. Ann.*, t. LIX, 1896) dans ses recherches sur le spectre ultra-violet.

D'autre part, MM. Bouasse (*loc. cit.*) et Abney (*Phot. Journ.*, t. XVIII) ont trouvé que cette hypothèse était inexacte. M. Bouasse dit : « Le cliché est d'autant

Fig. 17.

$\int_0^\theta I\,dt = \text{const.}$



plus dur que l'intensité est plus grande et le temps de pose plus court... Les clichés obtenus à l'aide d'intensités faibles sont toujours plus ou moins uniformément gris. »

C'est également à cette conclusion que Fizeau et Foucault étaient arrivés dans leurs recherches *sur l'intensité de la lumière émise par le charbon dans l'expérience de Davy*. Fizeau et Foucault formaient sur une couche sensible une série d'images, dont les intensités étaient en raison inverse de la durée de pose. Ils ont trouvé que les images successives ainsi obtenues sont sensiblement

égales tant que les durées de pose et les intensités varient entre les limites 1 et 10, c'est-à-dire tant que les rapports $\frac{i}{i'} = \frac{\theta'}{\theta}$ n'atteignent pas une valeur plus grande que 10. Ils ont trouvé que, si l'on continue à faire varier l'intensité et le temps de pose au delà de cette limite, on s'aperçoit bientôt que les images ne sont plus égales. Pour les valeurs $\theta' = 60\theta$ et $i' = \frac{i}{60}$, l'image obtenue avec l'intensité i' et dans le temps θ' est incontestablement plus faible que celle qui a été produite par l'intensité i et dans le temps θ.

J'ai appliqué la méthode précédemment décrite à l'étude de cette question, pour me rendre compte du degré d'inexactitude de cette hypothèse.

Voici quelques nombres (voir *fig.* 17) :

Numéros des impressions photographiques.	I. — Intensités en unités arbitraires.	θ. — Temps de pose.	α. — Déviations galvanométriques.
	min.		
1	3,0	1	57,0
2	1,5	2	65,5
3	1,0	3	72,0
4	0,75	4	80,0
5	0,50	6	91,0

La courbe représentative montre que les noirs varient beaucoup : la transparence augmente avec la durée de pose.

Il n'est pas possible d'en déduire une méthode de mesure, même approximative.

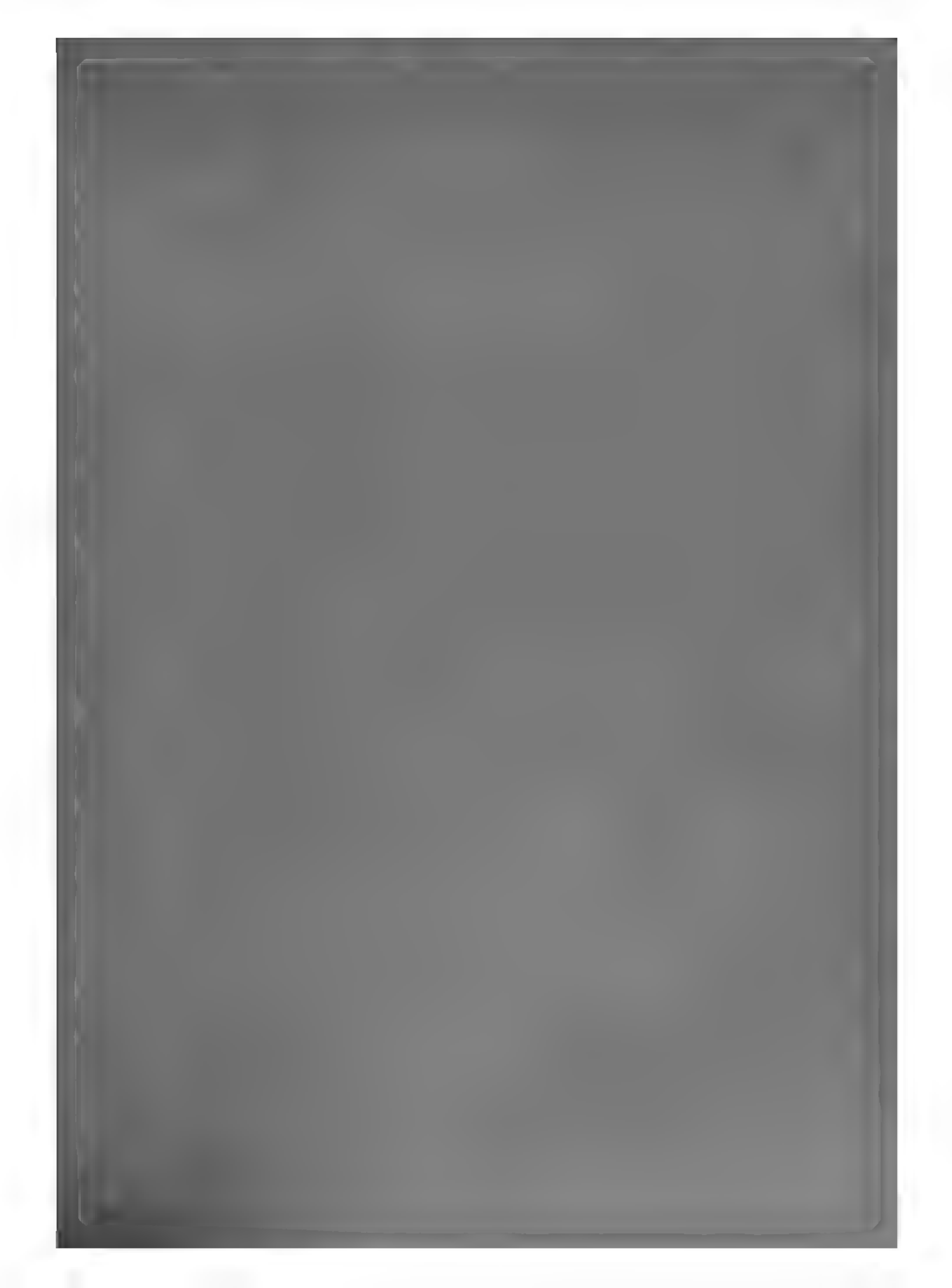


TABLE DES MATIÈRES (Fascicule N° 3, 1905).

31644 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.



DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES,
DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME V. — ANNÉE 1903.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS,
IMPRIMEUR-ÉDITEUR.

TOULOUSE
ED. PRIVAT,
IMPRIMEUR-LIBRAIRE.

1903

(Le Recueil paraît chaque trimestre.)

Quatrième fascicule.

RECHERCHES SUR L'HYDRODYNAMIQUE,

Par M. P. DUHEM.

CINQUIÈME PARTIE.

LE THÉORÈME DE LAGRANGE ET LES CONDITIONS AUX LIMITES.

CHAPITRE I.

LE THÉORÈME DE LAGRANGE ET LES LIQUIDES VISQUEUX.

§ 1. — Extension du théorème de Lagrange aux fluides incompressibles visqueux.

On sait que Lagrange a énoncé, pour les fluides non visqueux, le théorème suivant, auquel il est d'usage de donner son nom :

Si, pour une masse matérielle élémentaire du fluide, les trois quantités

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega_x = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \omega_y = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}, \\ \omega_z = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

sont égales à o *à un instant quelconque du mouvement, elles restent égales à* o *pendant toute la durée du mouvement.*

Tout le monde connaît la belle démonstration que Cauchy a donnée de ce théorème, en prenant pour point de départ les équations hydrodynamiques de Lagrange, et la démonstration non moins élégante qu'en a donnée W. Thomson, au moyen des équations hydrodynamiques d'Euler.

Le théorème de Lagrange s'étend-il aux fluides visqueux? On a longtemps admis qu'il n'en était rien.

En 1869, de Saint-Venant [1] montra le premier que ce théorème pouvait s'étendre aux fluides visqueux; sa démonstration, qu'on pourrait peut-être souhaiter plus rigoureuse, s'étendait à tous les fluides; mais elle supposait que les rapports $\frac{\lambda(\rho, T)}{\rho}$, $\frac{\mu(\rho, T)}{\rho}$ étaient des constantes, ce qui n'est probablement vrai que dans les mouvements isothermiques des fluides incompressibles. En 1880, Bresse [2], sans connaître le travail de Saint-Venant, dont il reconnut bientôt la priorité [3], reprit une démonstration analogue. En 1893, M. H. Poincaré [4] donna, dans le même sens, de brèves indications. Enfin, en 1901, M. Hadamard publia [5] l'énoncé de ce théorème, dont il avait donné la démonstration dans son Cours du Collège de France.

Les démonstrations données par de Saint-Venant et par Bresse laissent peut-être quelque peu à désirer au point de vue de la rigueur.

Les brèves indications de M. Poincaré ne constituent pas une démonstration et M. Hadamard n'a pas publié jusqu'ici la démonstration qu'il a obtenue; nous allons donc faire connaître celle que nous avons donnée dans notre Cours, à la Faculté des Sciences de Bordeaux, pendant l'année scolaire 1900-1901.

Formons $\frac{\partial \omega_x}{\partial t}$.

Selon la première égalité (1), nous aurons

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Mais

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

On a donc

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{dw}{dt} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{dv}{dt} - \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

---

(1) De Saint-Venant, *Problème des mouvements que peuvent prendre les divers points d'une masse liquide, ou solide ductile, contenue dans un vase à parois verticales, pendant son écoulement par un orifice horizontal inférieur* (*Comptes rendus*, t. LXVIII, 1869, p. 221).

(2) Bresse, *Fonction des vitesses, extension des théorèmes de Lagrange au cas d'un fluide imparfait* (*Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 501).

(3) Bresse, *Réponse à une Note de M. Boussinesq* (*Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 857).

(4) H. Poincaré, *Théorie des tourbillons*, p. 193. Paris, 1893.

(5) J. Hadamard, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIX, 1901.

ou bien, en tenant compte des égalités (1) et en posant

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$(2)\qquad \frac{\partial \omega_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{dw}{dt} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{dv}{dt} - \omega_x\theta + \omega_x\frac{\partial u}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial \omega_x}{\partial x} - v\frac{\partial \omega_x}{\partial y} - w\frac{\partial \omega_x}{\partial z}.$$

Les quantités $\frac{\partial \omega_y}{\partial t}$, $\frac{\partial \omega_z}{\partial t}$ sont susceptibles d'expressions analogues.

Ces expressions sont d'origine purement cinématique; elles sont donc entièrement générales.

Nous allons maintenant faire appel à des considérations dynamiques qui restreindront singulièrement la portée de nos raisonnements.

Nous supposerons que le cas étudié est un des cas, définis au Chapitre III de la première Partie, où il existe une fonction $\Lambda(x, y, z, t)$. Les équations de l'hydrodynamique prendront alors la forme [Ire Partie, égalités (157)]

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x} + \dfrac{du}{dt} - \dfrac{q_x}{\rho} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial \Lambda}{\partial y} + \dfrac{dv}{dt} - \dfrac{q_y}{\rho} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial \Lambda}{\partial z} + \dfrac{dw}{dt} - \dfrac{q_z}{\rho} = 0. \end{cases}$$

Supposons tout d'abord que le fluide soit *non visqueux;* on aura

$$q_x = 0, \qquad q_y = 0, \qquad q_z = 0,$$

et les égalités (3) donneront

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{dw}{dt} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{dv}{dt} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{du}{dt} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{dw}{dt} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{dv}{dt} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{du}{dt} = 0. \end{cases}$$

Supposons maintenant que le fluide soit *non visqueux* et *quelconque* ou bien qu'il soit *visqueux,* mais qu'il soit *incompressible* et que *sa température soit, à chaque instant, uniforme;* ρ et T étant, dans ce dernier cas, indépendants

de x, y, z, nous aurons [Ire Partie, égalités (58)]

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{q_x}{\rho} = \dfrac{\lambda+\mu}{\rho}\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \dfrac{\mu}{\rho}\Delta u, \\ \dfrac{q_y}{\rho} = \dfrac{\lambda+\mu}{\rho}\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \dfrac{\mu}{\rho}\Delta v, \\ \dfrac{q_z}{\rho} = \dfrac{\lambda+\mu}{\rho}\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \dfrac{\mu}{\rho}\Delta w \end{cases}$$

et ces égalités peuvent encore s'écrire dans le premier cas, car alors les deux membres sont identiquement nuls.

Les égalités (3) et (5) donnent alors les égalités

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{dw}{dt} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\mu}{\rho}\Delta\omega_x, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{du}{dt} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\mu}{\rho}\Delta\omega_y, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{dv}{dt} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\mu}{\rho}\Delta\omega_z, \end{cases}$$

qui renferment les égalités (4) comme cas particuliers.

En vertu de ces égalités (6), les égalités (2) deviennent

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega_x}{\partial t} = -\theta\omega_x + \dfrac{\partial u}{\partial x}\omega_x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\omega_y + \dfrac{\partial u}{\partial z}\omega_z - u\dfrac{\partial\omega_x}{\partial x} - v\dfrac{\partial\omega_x}{\partial y} - w\dfrac{\partial\omega_x}{\partial z} + \dfrac{\mu}{\rho}\Delta\omega_x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces égalités (7) conduisent immédiatement au théorème suivant :

Si l'on a, à l'instant t_0, pour tout point intérieur à un volume fini E,

$$(8)\quad \omega_x = 0, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = 0,$$

on aura aussi à l'instant t_0, pour tout point intérieur à ce volume E,

$$(9)\quad \frac{\partial\omega_x}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial\omega_y}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial\omega_z}{\partial t} = 0.$$

Il est clair, d'ailleurs, qu'en tout point du domaine E, les dérivées des divers ordres par rapport à x, y, z de $\frac{\partial\omega_x}{\partial t}$, $\frac{\partial\omega_y}{\partial t}$, $\frac{\partial\omega_z}{\partial t}$, sont égales à o.

Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant :

Supposons qu'à l'instant t_0 et pour tous les points intérieurs au volume E,

les quantités

$$\omega_x,\quad \frac{\partial \omega_x}{\partial t},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^n \omega_x}{\partial t^n},$$
$$\omega_y,\quad \frac{\partial \omega_y}{\partial t},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^n \omega_y}{\partial t^n},$$
$$\omega_z,\quad \frac{\partial \omega_z}{\partial t},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^n \omega_z}{\partial t^n},$$

soient toutes égales à o, *cas auquel il en est de même des dérivées de tous ordres de ces quantités par rapport à* x, y, z. *Nous aurons aussi à l'instant* t_0 *et en tout point intérieur au volume* E,

$$(10)\qquad \frac{\partial^{n+1} \omega_x}{\partial t^{n+1}} = 0,\qquad \frac{\partial^{n+1} \omega_y}{\partial t^{n+1}} = 0,\qquad \frac{\partial^{n+1} \omega_z}{\partial t^{n+1}} = 0.$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit de différentier n fois par rapport à t les égalités (7); tandis que les premiers membres deviennent identiques aux premiers membres des égalités (10), les seconds membres deviennent des fonctions linéaires et homogènes des diverses dérivées que nous savons être nulles.

En réunissant les deux théorèmes que nous venons de démontrer, nous parvenons à la proposition suivante :

Si l'on a, à l'instant t_0, *pour tout point intérieur au volume fini* E,

$$(8)\qquad \omega_x = 0,\qquad \omega_y = 0,\qquad \omega_z = 0,$$

les dérivées partielles de tous les ordres, par rapport à x, y, z, t *de* ω_x, ω_y, ω_z *sont nulles à l'instant* t_0, *en tout point intérieur au volume* E.

La formule

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + u\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w\frac{\partial \omega_x}{\partial z}$$

nous montre que $\frac{d\omega_x}{dt}$ s'exprime en fonction linéaire et homogène des dérivées partielles du premier ordre de ω_x.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

Si $\frac{d^n \omega_x}{dt^n}$ *s'exprime en fonction linéaire et homogène des dérivées partielles des* n *premiers ordres de* ω_x, $\frac{d^{n+1} \omega_x}{dt^{n+1}}$ *s'exprime en fonction linéaire et homo-*

g *des* $(n+1)$ *premiers ordres de* ω_x.

On a, en effet,

$$\frac{d^{n+1}\omega_x}{dt^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{d^n\omega_x}{dt^n} + u\frac{\partial}{\partial x}\frac{d^n\omega_x}{dt^n} + v\frac{\partial}{\partial y}\frac{d^n\omega_x}{dt^n} + w\frac{\partial}{\partial z}\frac{d^n\omega_x}{dt^n}.$$

Mais, par hypothèse,

$$\frac{d^n\omega_x}{dt^n} = \sum A_{pqrs}\frac{\partial^{p+q+r+s}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s} \qquad (p+q+r+s \leqq n).$$

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{d^n\omega_x}{dt^n} = \sum\left(A_{pqrs}\frac{\partial^{p+q+r+s+1}\omega_x}{\partial x^{p+1}\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s} + \frac{\partial A_{pqrs}}{\partial x}\frac{\partial^{p+q+r+s}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{d^n\omega_x}{dt^n} = \sum\left(A_{pqrs}\frac{\partial^{p+q+r+s+1}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^{q+1}\,\partial z^r\,\partial t^s} + \frac{\partial A_{pqrs}}{\partial y}\frac{\partial^{p+q+r+s}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{d^n\omega_x}{dt^n} = \sum\left(A_{pqrs}\frac{\partial^{p+q+r+s+1}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^{r+1}\,\partial t^s} + \frac{\partial A_{pqrs}}{\partial z}\frac{\partial^{p+q+r+s}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{d^n\omega_x}{dt^n} = \sum\left(A_{pqrs}\frac{\partial^{p+q+r+s+1}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^{s+1}} + \frac{\partial A_{pqrs}}{\partial t}\frac{\partial^{p+q+r+s}\omega_x}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s}\right).$$

Le théorème énoncé est alors évident.

On en tire de suite la proposition que voici :

Les quantités $\frac{d^n\omega_x}{dt^n}$, $\frac{d^n\omega_y}{dt^n}$, $\frac{d^n\omega_z}{dt^n}$ *s'expriment, quel que soit* n, *en fonctions linéaires et homogènes des dérivées partielles jusqu'à l'ordre* n *de* ω_x, ω_y, ω_z.

Cette proposition, rapprochée de celle que nous avons précédemment démontrée, entraîne cette autre :

Si l'on a à l'instant t_0, *pour tous les points intérieurs à un certain espace* E,

(8) $$\omega_x = 0, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = 0,$$

on a aussi au même instant, pour les mêmes points et quel que soit n,

(11) $$\frac{d^n\omega_x}{dt^n} = 0, \qquad \frac{d^n\omega_y}{dt^n} = 0, \qquad \frac{d^n\omega_z}{dt^n} = 0.$$

Passons maintenant des notations d'Euler aux notations de Lagrange. Soient a, b, c, à l'instant initial t_0, les coordonnées d'un point matériel appartenant au fluide; ses coordonnées x, y, z, à l'instant t, seront des fonctions de a, b, c, t :

$$x = x(a, b, c, t),$$
$$y = y(a, b, c, t),$$
$$z = z(a, b, c, t).$$

Considérons les points matériels qui, à l'instant t_0, se trouvent à l'intérieur du volume E; supposons que pour ces points matériels, entre les instants t_0, t_1, les fonctions $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ soient des fonctions analytiques de a, b, c, t.

Les égalités

$$u = \frac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t}$$

montrent qu'il en est de même de $u(a, b, c, t)$, $v(a, b, c, t)$, $w(a, b, c, t)$.

On a, d'ailleurs,

$$\begin{aligned}\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = {} & \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y} \\ & - \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z}\end{aligned}$$

ou bien, selon les égalités (239) de la deuxième Partie de ces *Recherches*,

$$\begin{aligned}\omega_x = \frac{1}{\varpi}\Bigg[& \frac{D(z, x)}{D(b, c)}\frac{\partial w}{\partial a} + \frac{D(z, x)}{D(c, a)}\frac{\partial w}{\partial b} + \frac{D(z, x)}{D(a, b)}\frac{\partial w}{\partial c} \\ & - \frac{D(x, y)}{D(b, c)}\frac{\partial v}{\partial a} - \frac{D(x, y)}{D(c, a)}\frac{\partial v}{\partial b} - \frac{D(x, y)}{D(a, b)}\frac{\partial v}{\partial c}\Bigg].\end{aligned}$$

De cette égalité et de deux égalités analogues relatives à ω_y, ω_z, il résulte que, pour les points considérés et pendant le temps considéré, ω_x, ω_y, ω_z sont des fonctions analytiques de a, b, c, t.

Cela posé, supposons que, pour chacun des points considérés et à l'instant t_0, nous ayons

$$(8) \qquad \omega_x = 0, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = 0.$$

D'après ce que nous avons vu, nous aurons pour les mêmes points, au même instant et quel que soit n,

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial^n}{\partial t^n}\omega_x(a, b, c, t) = 0, \\ & \frac{\partial^n}{\partial t^n}\omega_y(a, b, c, t) = 0, \\ & \frac{\partial^n}{\partial t^n}\omega_z(a, b, c, t) = 0, \end{aligned}\right.$$

en sorte que, pour ces mêmes points matériels, les égalités (8) demeureront constamment vérifiées entre les instants t_0 et t_1. D'où la proposition suivante :

Si, à un instant donné t_0, les trois rotations sont nulles pour tous les points matériels qui remplissent un certain volume fini, elles demeureront nulles pour ces mêmes points tant que les coordonnées de chacun d'eux s'exprimeront en fonctions analytiques des variables de Lagrange.

Peut-il arriver que, pour un point matériel M, pris parmi ceux que nous venons d'étudier, les quantités ω_x, ω_y, ω_z cessent d'être toutes trois égales à o à partir d'un certain instant t_1, postérieur à t_0? Il faudra pour cela qu'au moment où l'on traverse l'instant t_1, les coordonnées $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ du point M cessent de varier analytiquement avec t; il faudra donc qu'à l'instant t le mouvement de tous les points d'une masse d'étendue finie, dont fait partie le point M, cesse d'être analytique, ou bien que le point M se trouve sur une surface singulière, ou sur une ligne singulière, ou en un point singulier.

Examinons d'abord le cas où, à l'instant t, le point M se trouverait sur une surface singulière.

D'après ce que nous avons vu en la seconde Partie de ces *Recherches*, il existe deux sortes de surfaces singulières. Les surfaces de la première sorte passent sans cesse par les mêmes points matériels : elles peuvent se rencontrer en tous les fluides, sauf au sein des fluides visqueux, incompressibles et bons conducteurs de la chaleur. Les surfaces de la deuxième sorte *se propagent;* elles ne peuvent se rencontrer qu'au sein des fluides compressibles parfaits; ce sont ou bien des ondes de choc ou bien des ondes longitudinales.

Pour que le point M pût se trouver à l'instant t_1 sur une onde de la première sorte, il faudrait qu'il s'y trouvât à l'instant t_0, ce que nous ne supposerons pas; il nous reste donc à supposer que le fluide est compressible et parfait et à examiner ce qui arrive si une surface singulière, en se propageant, rencontre à l'instant t_1 le point M; *nous supposerons, d'ailleurs, qu'aucune onde de choc ne parcoure le milieu,* en sorte que la surface singulière considérée sera une onde au moins du premier ordre par rapport à u, v, w, et longitudinale.

Reprenons les notations employées aux Chapitres III et IV de la première Partie.

Lorsque le temps t s'approche de t_1 par valeurs inférieures à t_1, u, v, w tendent vers des limites u_1, v_1, w_1; ω_x, ω_y, ω_z tendent vers des limites

$$\omega_{x1} = \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}, \qquad \omega_{y1} = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}, \qquad \omega_{z1} = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

Lorsque le temps t s'approche de t_1 par valeurs supérieures à t_1, u, v, w tendent

vers des limites u_2, v_2, w_2; ω_x, ω_y, ω_z tendent vers des limites

$$\omega_{x2} = \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \qquad \omega_{y2} = \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x}, \qquad \omega_{z2} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}.$$

Mais l'onde étant au moins du premier ordre par rapport à u, v, w, il existe un vecteur (l_0, m_0, n_0) tel que l'on ait [I[re] Partie, égalités (211)]

$$\frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial y} = \beta n_0, \qquad \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial z} = \gamma m_0,$$
$$\frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial z} = \gamma l_0, \qquad \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial x} = \alpha n_0,$$
$$\frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial x} = \alpha m_0, \qquad \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial y} = \beta l_0$$

et, par conséquent,

$$\omega_{x2} - \omega_{x1} = \beta n_0 - \gamma m_0,$$
$$\omega_{y2} - \omega_{y1} = \gamma l_0 - \alpha n_0,$$
$$\omega_{z2} - \omega_{z1} = \alpha m_0 - \beta l_0.$$

Mais l'onde étant longitudinale, on a [*loc. cit.*, égalités (223)]

$$\frac{l_0}{\alpha} = \frac{m_0}{\beta} = \frac{n_0}{\gamma}.$$

On a donc

(12) $$\omega_{x2} = \omega_{x1}, \qquad \omega_{y2} = \omega_{y1}, \qquad \omega_{z2} = \omega_{z1}.$$

Comme on a, par hypothèse,

$$\omega_{x1} = 0, \qquad \omega_{y1} = 0, \qquad \omega_{z1} = 0,$$

on aura aussi

(13) $$\omega_{x2} = 0, \qquad \omega_{y2} = 0, \qquad \omega_{z2} = 0.$$

Selon les égalités (12), l'onde considérée est onde au moins du premier ordre pour ω_x, ω_y, ω_z; il existe donc trois quantités Ω_x, Ω_y, Ω_z telles que l'on ait

(14) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial x} = \alpha \Omega_x, \qquad \dfrac{\partial(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial y} = \beta \Omega_x, \qquad \dfrac{\partial(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial z} = \gamma \Omega_x, \\ \dfrac{\partial(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial t} + \mathfrak{N} \Omega_x = 0, \end{array}\right.$$

et deux autres groupes analogues.

D'autre part, comme le fluide considéré est un fluide parfait, l'égalité (7),

vérifiée en tout point du fluide, devient simplement

$$(15)\quad \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + u\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w\frac{\partial \omega_x}{\partial z} = -\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\omega_x + \frac{\partial u}{\partial y}\omega_y + \frac{\partial u}{\partial z}\omega_z.$$

Les égalités (14) et (15) montrent sans peine que l'on a, en tout point de l'onde,

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Omega_x$$
$$= -\left[\frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial y} + \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial z}\right]\omega_x + \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial y}\omega_y + \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial z}\omega_z.$$

Jointe aux égalités (13), cette égalité donne

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Omega_x = 0.$$

Or, l'onde considérée se propage, en sorte que $(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})$ est assurément différent de o; on a donc

$$\Omega_x = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (14),

$$(16)\quad \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial x} = \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial x},\qquad \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial y} = \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial y},\qquad \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial z} = \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial z},\qquad \frac{\partial \omega_{x2}}{\partial t} = \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial t},$$

et comme on a, par hypothèse,

$$\frac{\partial \omega_{x1}}{\partial x} = 0,\qquad \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial y} = 0,\qquad \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial z} = 0,\qquad \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial t} = 0,$$

on obtient le premier groupe d'égalités

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{\partial \omega_{x2}}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial \omega_{x2}}{\partial y} = 0, & \dfrac{\partial \omega_{x2}}{\partial z} = 0, & \dfrac{\partial \omega_{x2}}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial \omega_{y2}}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial \omega_{y2}}{\partial y} = 0, & \dfrac{\partial \omega_{y2}}{\partial z} = 0, & \dfrac{\partial \omega_{y2}}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial \omega_{z2}}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial \omega_{z2}}{\partial y} = 0, & \dfrac{\partial \omega_{z2}}{\partial z} = 0, & \dfrac{\partial \omega_{z2}}{\partial t} = 0. \end{array}\right.$$

Les deux autres groupes se démontrent d'une manière analogue.

Nous allons étendre ces égalités aux valeurs prises, à l'instant t_1 et au point M, par les dérivées partielles d'ordre quelconque de ω_x, ω_y, ω_z.

Supposons, en effet, qu'elles soient démontrées pour les dérivées partielles de ω_x, ω_y, ω_z jusqu'à l'ordre n inclusivement, et proposons-nous de les étendre aux dérivées partielles d'ordre $(n+1)$ des mêmes quantités.

Considérons l'équation (15), qui est vérifiée en tout point du milieu, et diffé-

rentions-la P fois par rapport à x, Q fois par rapport à y, R fois par rapport à z, P, Q, R vérifiant l'égalité

$$P + Q + R = n.$$

Elle nous donnera une égalité de la forme

$$\frac{\partial^{n+1} \omega_x}{\partial t\, \partial x^{P}\, \partial y^{Q}\, \partial z^{R}} + u \frac{\partial^{n+1} \omega_x}{\partial x^{P+1}\, \partial y^{Q}\, \partial z^{R}} + v \frac{\partial^{n+1} \omega_x}{\partial x^{P}\, \partial y^{Q+1}\, \partial z^{R}} + w \frac{\partial^{n+1} \omega_x}{\partial x^{P}\, \partial y^{Q}\, \partial z^{R+1}} = f,$$

f étant une fonction linéaire et homogène de ω_x, ω_y, ω_z et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement; d'après ce que nous supposons démontré, la valeur de f au point M tend vers o lorsque le temps t s'approche de t_1 soit par valeurs inférieures à t_1, soit par valeurs supérieures à t_1.

Nous aurons donc, au point M et à l'instant t_1,

$$(18) \quad \frac{\partial^{n+1}(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial t\, \partial x^{P}\, \partial y^{Q}\, \partial z^{R}} + u \frac{\partial^{n+1}(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial x^{P+1}\, \partial y^{Q}\, \partial z^{R}} + v \frac{\partial^{n+1}(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial x^{P}\, \partial y^{Q+1}\, \partial z^{R}} + w \frac{\partial^{n+1}(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial x^{P}\, \partial y^{Q}\, \partial z^{R+1}} = 0.$$

Mais, d'autre part, d'après ce que nous supposons démontré, l'onde qui passe au point M à l'instant t est une onde persistante dont l'ordre par rapport à ω_x n'est pas inférieur à $(n+1)$. Il existe donc une grandeur Ω_x telle que toutes les dérivées d'ordre $(n+1)$ de $(\omega_{x2} - \omega_{x1})$ soient données, au point M et à l'instant t_1, par la formule

$$(19) \quad \frac{\partial^{n+1}(\omega_{x2} - \omega_{x1})}{\partial x^{p}\, \partial y^{q}\, \partial z^{r}\, \partial t^{s}} = \alpha^{p} \beta^{q} \gamma^{r} (-\mathfrak{N})^{s} \Omega_x \qquad (p+q+r+s = n+1).$$

Selon cette formule, l'égalité (18) devient

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) \alpha^{P} \beta^{Q} \gamma^{R} \Omega_x = 0.$$

L'onde étant une onde qui se propage, $(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})$ n'est pas égal à o; l'égalité précédente exige donc que l'on ait

$$\Omega_x = 0,$$

en sorte que l'égalité (19) devient

$$\frac{\partial^{n+1} \omega_{x2}}{\partial x^{p}\, \partial y^{q}\, \partial z^{r}\, \partial t^{s}} = \frac{\partial^{n+1} \omega_{x1}}{\partial x^{p}\, \partial y^{q}\, \partial z^{r}\, \partial t^{s}}.$$

Mais, selon l'hypothèse faite, toutes les dérivées partielles de ω_{x1} sont nulles au point M et à l'instant t_1; on a donc, en ce point et à cet instant,

$$\frac{\partial^{n+1} \omega_{x2}}{\partial x^{p}\, \partial y^{q}\, \partial z^{r}\, \partial t^{s}} = 0 \qquad (p+q+r+s = n+1).$$

On démontrerait des égalités analogues pour ω_{y2} et ω_{z2}.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Au point M, *lorsque le temps t tend vers* t_1 *par valeurs supérieures à* t_1, *les dérivées partielles d'ordre quelconque de* ω_x, ω_y, ω_z *tendent toutes vers* 0.

Dès lors, en vertu d'un lemme précédemment démontré, *il en est de même, quel que soit n, des quantités*

$$\frac{d^n \omega_x}{dt^n}, \quad \frac{d^n \omega_y}{dt^n}, \quad \frac{d^n \omega_z}{dt^n}.$$

Depuis l'instant t_1 jusqu'à un instant postérieur t_2, les coordonnées $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ du point M redeviendront fonctions analytiques de t. Dès lors, entre les instants t_1, t_2, les trois rotations ω_x, ω_y, ω_z relatives au point M resteront égales à zéro.

Lors donc qu'au sein d'un fluide parfait, une onde longitudinale interrompt le caractère analytique du mouvement, elle n'empêche point le théorème précédemment démontré de demeurer exact.

Dès lors, *considérons un fluide pris dans les conditions qui ont été énumérées au début de ce Paragraphe, et exempt d'onde de choc.*

Mettons à part :

1° *Les points matériels qui forment des surfaces singulières exemptes de propagation;*

2° *Les points matériels qui, pendant la durée du mouvement, seront rencontrés par des lignes singulières; en général, ces points formeront certaines surfaces;*

3° *Les points matériels qui, à un instant quelconque du mouvement, deviendront points singuliers; en général, ces points se succéderont sur certaines lignes.*

Pour tout autre point matériel, si les quantités ω_x, ω_y, ω_z *sont égales à zéro au début du mouvement, elles sont égales à zéro pendant toute la durée du mouvement.*

Dans un fluide en repos, ω_x, ω_y, ω_z sont nuls en tout point; dès lors, le théorème précédent entraîne le corollaire que voici :

Supposons qu'un fluide, pris dans les conditions qui ont été définies au début de ce paragraphe, et partant du repos, soit mis en mouvement sans qu'à aucun moment la vitesse d'aucun point matériel soit discontinue. A aucun instant du mouvement, on ne pourra trouver dans le fluide un volume

d'étendue finie en tout point duquel l'une des trois rotations ω_x, ω_y, ω_z soit différente de zéro.

Les deux propositions que nous venons d'énoncer sont subordonnées à une supposition fondamentale, hors de laquelle elles pourraient être fausses; elles supposent qu'AU COURS DU LAPS DE TEMPS AUQUEL ON LES APPLIQUE, IL N'EXISTE AUCUN INSTANT t POUR LEQUEL LES COORDONNÉES $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ DE TOUS LES POINTS MATÉRIELS QUI COMPOSENT UNE MASSE FINIE CESSERAIENT D'ÊTRE DES FONCTIONS ANALYTIQUES DE t.

Nous verrons dans la suite l'importance de cette restriction.

Cette restriction ne pèse pas sur le théorème de Lagrange lorsqu'on se borne à l'appliquer aux fluides parfaits; dans ce cas, en effet, la démonstration de Cauchy, aussi bien que la démonstration de W. Thomson sont applicables, et ces démonstrations supposent seulement que les dérivées partielles du second ordre de $x(a, b, c, t)$, $y(a, b, c, t)$, $z(a, b, c, t)$ existent et sont finies pour le laps de temps et pour la masse fluide auxquels on applique le théorème.

§ 2. — Forme des actions de viscosité lorsque les rotations sont nulles.

Imaginons un milieu ayant en tout point même densité et même température. Les composantes du champ de viscosité, données par les égalités (58) de la première Partie, deviendront

$$q_x = (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{dx} + \mu\,\Delta u,$$

$$q_y = (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\,\Delta v,$$

$$q_z = (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\,\Delta w,$$

tandis que les composantes, en chaque point de la surface, de la pression de viscosité seront données par les égalités (57) de la première Partie :

$$p_x = \lambda\theta\cos(n_i, x) + \mu\frac{\partial u}{\partial n_i} + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial x}\cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial x}\cos(n_i, z)\right],$$

$$p_y = \lambda\theta\cos(n_i, y) + \mu\frac{dv}{\partial n_i} + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(n_i, z)\right],$$

$$p_z = \lambda\theta\cos(n_i, z) + \mu\frac{\partial w}{\partial n_i} + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial z}\cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial z}\cos(n_i, z)\right].$$

Visiblement, ces six égalités peuvent être remplacées par les suivantes :

$$q_x = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial z} - \frac{\partial\omega_z}{\partial y}\right),$$

$$q_y = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial x} - \frac{\partial\omega_x}{\partial z}\right),$$

$$q_z = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y} - \frac{\partial\omega_y}{\partial x}\right),$$

$$p_x = \lambda\theta\cos(n_i, x) + \mu[\omega_z\cos(n_i, y) - \omega_y\cos(n_i, z)] + 2\mu\frac{\partial u}{\partial n_i},$$

$$p_y = \lambda\theta\cos(n_i, y) + \mu[\omega_x\cos(n_i, z) - \omega_z\cos(n_i, x)] + 2\mu\frac{\partial v}{\partial n_i},$$

$$p_z = \lambda\theta\cos(n_i, z) + \mu[\omega_y\cos(n_i, x) - \omega_x\cos(n_i, y)] + 2\mu\frac{\partial w}{\partial n_i}.$$

Si nous considérons maintenant le fluide visqueux étudié au Paragraphe précédent, nous aurons, en tout point de ce fluide et à tout instant,

$$\theta = 0$$

par hypothèse, et

$$\omega_x = 0, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = 0$$

par démonstration. Alors les égalités précédentes deviendront

$$q_x = 0, \qquad q_y = 0, \qquad q_z = 0 \tag{20}$$

et

$$p_x = 2\mu\frac{\partial u}{\partial n_i}, \qquad p_y = 2\mu\frac{\partial v}{\partial n_i}, \qquad p_z = 2\mu\frac{\partial w}{\partial n_i}. \tag{21}$$

Les égalités (20) nous montrent qu'*au sein d'un fluide visqueux, incompressible, dont tous les points sont à la même température et où les rotations sont nulles, les équations indéfinies du mouvement sont les mêmes que si le fluide était non visqueux.*

ligne fermée quelconque, tracée à la surface du solide, en supposant que u, v, w soient les composantes de la vitesse d'un point matériel appartenant au solide. Voyons si ce dernier résultat est, en général, acceptable.

L'expression $(u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ représente le produit de l'élément dL, appartenant à la courbe L, par la projection sur cet élément de la vitesse d'un point qui en fait partie. Pour obtenir ce produit, on peut décomposer comme l'on veut la vitesse du point M, former pour chacune de ses composantes le produit analogue et ajouter ensemble tous ces produits.

Or, la vitesse de tout point M du solide est la résultante des vitesses du même point en deux autres mouvements du même solide : un mouvement de rotation qui, dans le temps dt, fait tourner le solide d'un angle $\theta\,dt$ autour d'une certaine droite D, et un mouvement de translation par lequel, dans le temps dt, tous les points du solide se déplacent d'une longueur $\lambda\,dt$ parallèlement à la droite D.

Comme courbe fermée L, prenons l'intersection de la surface du solide par un plan perpendiculaire à la droite D. Soient O l'intersection de ce plan avec la droite D; r la distance du point O au point M, origine de l'élément dL; $d\psi$ l'angle sous lequel, du point O, on voit l'élément dL.

Le produit géométrique de l'élément dL et de la vitesse du point M dans le premier mouvement est $\theta r^2\,d\psi$; quant au produit géométrique de l'élément dL et de la vitesse du point M dans le second mouvement, il est nul, car cette vitesse est perpendiculaire au plan de la courbe L.

Nous aurons donc

$$\int_{\mathrm{L}}(u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \theta\int_{\mathrm{L}} r^2\,d\psi = 2\mathcal{A}\theta.$$

$\mathcal{A}$ étant l'aire plane à laquelle la courbe L sert de contour.

Si θ n'est pas nul, l'égalité (22) ne peut être vraie pour la courbe L.

Donc, en général, un fluide dont le mouvement est exempt de rotations et qui baigne un solide en mouvement ne peut adhérer à la surface de ce solide.

§ 2. — Conséquences relatives aux fluides parfaits.

Considérons, en premier lieu, un fluide entièrement dénué de viscosité.

Pour que ce fluide n'adhère pas à un solide qu'il baigne, il faut que le frottement au contact du solide et du fluide soit nul et qu'il en soit de même de la viscosité au contact de ces deux corps. Si ce frottement et cette viscosité ne sont pas nuls tous deux, le fluide adhère certainement au solide, en toutes circonstances, le long de leur commune surface.

Supposons, d'autre part, que le fluide étudié soit un fluide compressible ou non compressible, mais qui se meut dans des conditions telles qu'il existe une fonction $\Lambda(x, y, z, t)$ (*Recherches sur l'Hydrodynamique,* Ire Partie, Chap. III, § 2).

Supposons, enfin, qu'à l'instant initial, le fluide et le solide immergé soient en repos et qu'à partir de cet état de repos, ils se mettent en mouvement sans que la vitesse d'aucun point éprouve de variation brusque. Selon les démonstrations que Cauchy ou W. Thomson ont données du théorème de Lagrange, le fluide prendra un mouvement sans rotation. Donc, d'après le théorème démontré au Paragraphe 1, il ne pourra, en général, adhérer à la surface du solide.

Nous sommes ainsi conduits à la conclusion suivante :

Si un fluide, compressible ou non compressible, mais entièrement dénué de viscosité, se meut de telle sorte qu'il existe une fonction $\Lambda(x, y, z, t)$, *on ne peut admettre, en général, qu'il existe soit un frottement, soit une viscosité au contact de ce fluide et d'un solide qu'il baigne.*

Pour un système formé de pareils fluides, la seule forme logique que l'on puisse donner au problème hydrodynamique consiste à admettre que l'on a simplement, le long de la surface de contact d'un solide et du fluide, ou de deux fluides différents, la relation

$$(u_1 - u_2)\cos(N, x) + (v_1 - v_2)\cos(N, y) + (w_1 - w_2)\cos(N, z) = 0,$$

dont l'origine est purement cinématique.

C'est, en effet, sur ces fondements, logiquement irréprochables, mais souvent incapables de supporter une analyse ayant avec les faits d'expérience une suffisante affinité, que reposent la plupart des écrits classiques relatifs à l'Hydrodynamique.

§ 3. — Les liquides visqueux et l'existence du frottement aux surfaces limites.

Considérons maintenant un fluide visqueux incompressible et assujetti à garder, au cours de ses mouvements, une température invariable. Imaginons que ce fluide baigne certains solides mobiles.

Mettons le système en mouvement sans secousse brusque, de telle sorte que la vitesse de chaque point matériel varie d'une manière continue.

Les quantités p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, en chaque point de la surface de contact S du solide et du fluide, partent de o et varient d'une manière continue avec t; il en est de même de la projection du vecteur p_1 sur la surface S.

Si le frottement au contact du solide et du fluide n'est pas nul, cas auquel

$\Gamma(\rho_1, \rho_2, \varpi, T)$ est assurément négatif, la projection du vecteur p_1 sur la surface S demeure assurément inférieure à $-\Gamma(\rho_1, \rho_2, \varpi, T)$, tant que t ne surpasse pas une certaine limite θ. Donc, *tant que t ne surpasse pas une certaine limite θ, le liquide demeure soudé au solide le long de leur commune surface.*

Supposons, d'autre part, *que les coordonnées des divers points matériels qui constituent le fluide varient analytiquement avec t depuis l'instant initial $t = t_0$ jusqu'à l'instant $t = \tau$, la différence $(\tau - t_0)$ étant finie.* D'après ce qui a été démontré au Paragraphe 1, le théorème de Lagrange s'appliquerait à notre liquide visqueux de l'instant $t = t_0$ à l'instant $t = \tau$; pendant ce temps, le fluide serait sans rotation.

Donc *on pourrait, à partir de l'instant initial t_0, déterminer un laps de temps fini pendant lequel le fluide serait dépourvu de rotation et adhérerait aux solides mobiles; en général, ces deux propositions sont contradictoires,* comme nous l'avons vu au Paragraphe 1.

On ne peut lever cette contradiction qu'en admettant l'une au moins des deux hypothèses suivantes :

1° *Il n'y a pas de frottement le long des surfaces de contact du solide et du fluide.*

2° *Pour $t = t_0$, les coordonnées des points du fluide ne sont pas fonctions analytiques de t.*

§ 4. — Les liquides visqueux et la viscosité le long des surfaces de contact avec les solides immergés.

Supposons que le liquide visqueux n'exerce aucun frottement à la surface des solides qu'il baigne; nous aurons alors, en tout point de la surface de contact du solide et du fluide,

$$\Gamma = 0, \qquad \mathfrak{G} = 0. \tag{23}$$

Supposons, d'ailleurs, que la surface de contact ne soit pas exempte de viscosité, en sorte que l'on ait

$$f < 0. \tag{24}$$

Dans ce cas, le fluide ne demeure plus, en général, soudé au solide et la difficulté que nous avons rencontrée au Paragraphe précédent ne se rencontrera plus. Mais nous allons rencontrer une autre difficulté analogue, en traitant certains problèmes, le suivant par exemple :

Considérons un solide de révolution immergé dans un fluide visqueux

indéfini. Imaginons que le système tout entier soit primitivement au repos, puis que, sans secousse, de manière que les vitesses de tous les points demeurent fonctions continues de t, le solide se mette à tourner autour de son axe de révolution.

Peut-il arriver que le liquide demeure immobile?

Dans ce cas, les actions de viscosité demeureraient nulles en tout point de ce corps; en tout point de la surface de contact du solide et du fluide, on aurait

$$p_{1x}=0, \qquad p_{1y}=0, \qquad p_{1z}=0.$$

Comme on aurait également

(25) $$u_1=0, \qquad v_1=0, \qquad w_1=0,$$

en tenant compte de l'égalité (23), on transformerait les égalités (80) de la troisième Partie en

$$(\Pi_1-\varpi)\cos(n_1,x)=-fu_2,$$
$$(\Pi_1-\varpi)\cos(n_1,y)=-fv_2,$$
$$(\Pi_1-\varpi)\cos(n_1,z)=-fw_2.$$

Multiplions respectivement ces égalités par u_2, v_2, w_2 et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; en tenant compte des égalités (40 *bis*) de la troisième Partie, (24) et (25), nous trouverons l'égalité

$$u_2^2+v_2^2+w_2^2=0,$$

qui est absurde, puisque le solide n'est pas immobile.

Le fluide se mettra donc en mouvement et ce mouvement sera forcément symétrique autour de l'axe de révolution du solide pris pour axe des z.

Rapportons un point quelconque du système à des coordonnées cylindriques r, θ, z.

Continuons à désigner par w la composante parallèle à Oz de la vitesse; soit R la composante centrifuge de la vitesse; soit Θ la composante perpendiculaire aux deux précédentes. Nous aurons évidemment

$$u=\mathrm{R}\cos\theta-\Theta\sin\theta,$$
$$v=\mathrm{R}\sin\theta+\Theta\cos\theta.$$

Les trois quantités R, Θ, w peuvent dépendre de r et de z, mais point de θ.

Nous aurons alors

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\mathrm{R}\sin\theta + \Theta\cos\theta}{r}\sin\theta + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial\Theta}{\partial r}\sin\theta\right)\cos\theta,\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\mathrm{R}\sin\theta + \Theta\cos\theta}{r}\cos\theta + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial\Theta}{\partial r}\sin\theta\right)\sin\theta,\\
\frac{\partial u}{\partial v} &= \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}\cos\theta - \frac{\partial\Theta}{\partial z}\sin\theta,\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\mathrm{R}\cos\theta - \Theta\sin\theta}{r}\sin\theta + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial\Theta}{\partial r}\cos\theta\right)\cos\theta,\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\mathrm{R}\cos\theta - \Theta\sin\theta}{r}\cos\theta + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial\Theta}{\partial r}\cos\theta\right)\sin\theta,\\
\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}\sin\theta + \frac{\partial\Theta}{dz}\cos\theta,\\
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta,\\
\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial r}\sin\theta,\\
\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}\right.$$

Ces relations permettraient d'obtenir les équations du mouvement du fluide.

Proposons-nous simplement de calculer, en chaque point de la surface de contact du solide et du fluide, la composante $p_{i\theta}$ du vecteur p_i dans la direction de la vitesse Θ.

Comme cette composante a évidemment une valeur indépendante de θ, il suffira de la calculer pour $\theta = 0$, c'est-à-dire en un point du plan zOx; elle se réduit alors à p_{iy} ou bien, selon les égalités (21), à

$$2\mu\frac{\partial v}{\partial n_i} = 2\mu\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sin(n_i, z) + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(n_i, z)\right].$$

Les égalités (26), où l'on doit faire $\theta = 0$, transformant l'expression précédente en

$$2\mu\left[\frac{\partial\Theta}{\partial r}\sin(n_i, z) + \frac{\partial\Theta}{\partial r}\cos(n_i, z)\right] = 2\mu\frac{\partial\Theta}{\partial r_i}.$$

On a donc

$$(27)\qquad p_{i\theta} = 2\mu\frac{\partial\Theta}{\partial n_i}.$$

Peut-il arriver que Θ soit nul en tous les points du fluide? S'il en était ainsi, l'équation (27) que nous venons d'obtenir donnerait, en tout point de la surface

de contact du solide et du fluide,

$$p_{i\Theta} = 0,$$

et, par conséquent, en tout point de cette même surface, la vitesse relative du solide et du fluide serait située dans le méridien; mais ceci exigerait, contrairement à l'hypothèse faite, que Θ fût, en chaque point de cette surface, égal à la vitesse avec laquelle le solide tourne autour de Oz.

Θ n'est donc pas nul, en général, au sein du fluide; si nous traçons une circonférence de rayon r ayant son centre sur Oz, Θ aura la même valeur en tous les points de cette circonférence et la circulation le long de cette circonférence aura pour valeur

$$C = 2\pi r \Theta.$$

Supposons maintenant qu'à partir de l'instant initial t_0 et tant que t ne surpasse pas une certaine limite, le fluide se meuve de telle sorte que les coordonnées de chaque point matériel soient des fonctions analytiques de t; nous pourrons faire usage du théorème démontré au Chapitre I, Paragraphe 1, les composantes ω_x, ω_y, ω_z de la rotation seront nulles en tout point du fluide pour toute valeur de t inférieure à la limite considérée.

Les quantités ω_x, ω_y, ω_z étant nulles dans tout le fluide, la circulation C ne peut être différente de o le long d'une courbe fermée que s'il existe une ligne singulière empêchant cette courbe fermée de se réduire à un point. Par raison de symétrie, il ne peut exister ici de ligne singulière aboutissant à la surface du solide autre que l'axe des z. On voit alors sans peine que la circulation le long d'une circonférence ayant son centre sur l'axe des z doit avoir pour valeur

$$C = K(t),$$

$K(t)$ ayant, à un même instant, la même valeur pour toutes les circonférences de ce genre que l'on peut tracer au sein du fluide, au voisinage de la surface du solide. On aurait donc, en tout point pris au sein du fluide,

(28) $$\Theta = \frac{K(t)}{2\pi r}.$$

Considérons un point de la surface de contact du liquide et du solide; en ce point, l'égalité (7) serait applicable au liquide, tandis que la vitesse de rotation du solide serait $\Omega(t)r$, en désignant par $\Omega(t)$ sa vitesse angulaire de rotation à l'instant t; dès lors, les égalités (80) de la quatrième Partie, jointes aux égalités (2) et (7), donneraient, en tout point de la surface de contact du solide et du liquide, l'égalité

$$2\mu \frac{\partial \Theta}{\partial n_i} = -f[\Theta - \Omega(t) r]$$

que l'égalité (28) transforme en

$$\frac{\mu}{\pi}\frac{K(t)}{r^2}\cos(n_i, r) - f\frac{K(t)}{2\pi r} + f\,\Omega(t)r = 0. \tag{29}$$

Il est clair qu'une telle égalité ne saurait être, en général, vérifiée en tous les points du solide; voici, entre autres, un moyen de faire éclater aux yeux cette impossibilité :

Supposons que le solide présente plusieurs parallèles de rayon maximum ou minimum; soient $r_1, r_2, r_3, \ldots$, les rayons de ces parallèles, rayons que l'on peut se donner arbitrairement; en tout point d'un tel parallèle, on aurait $\cos(n_i, r) = 1$, et l'égalité (29) donnerait les égalités

$$\left(\frac{\mu}{\pi r_1^2} - \frac{f}{2\pi r_1}\right)\frac{K(t)}{\Omega(t)} + f r_1 = 0,$$
$$\left(\frac{\mu}{\pi r_2^2} - \frac{f}{2\pi r_2}\right)\frac{K(t)}{\Omega(t)} + f r_2 = 0,$$
$$\left(\frac{\mu}{\pi r_3^2} - \frac{f}{2\pi r_3}\right)\frac{K(t)}{\Omega(t)} + f r_3 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

auxquelles, en général, il est impossible de satisfaire en disposant du seul rapport $\frac{K(t)}{\Omega(t)}$.

La difficulté que nous venons de rencontrer en étudiant le mouvement d'un liquide visqueux exempt de frottement à la surface des solides qu'il baigne ne peut admettre que deux solutions :

1° *Ou bien les surfaces de contact du liquide et des solides sont exemptes de viscosité :*

$$f = 0. \tag{30}$$

2° *Ou bien les coordonnées des points matériels qui constituent le fluide ne peuvent, à partir de l'instant inital t_0 du mouvement, s'exprimer en fonctions analytiques de t.*

§ 5. — Examen des résultats obtenus aux deux paragraphes précédents.

Si nous réunissons les résultats obtenus au Paragraphe 3 et au Paragraphe 4, nous pouvons énoncer la proposition que voici:

Lorsqu'un système formé de solides mobiles et d'un liquide visqueux, de

température uniforme et invariable, part du repos et se met en mouvement sans secousse brusque, les lois de ce mouvement prêtent à contradiction, à moins que l'on admette l'une ou l'autre des hypothèses suivantes:

1° *Les surfaces de contact des solides et du liquide ne sont affectées ni de viscosité, ni de frottement;*

2° *Il est impossible, à partir de l'instant initial t_0 du mouvement, d'exprimer les coordonnées de chacun des points matériels qui composent le fluide en fonction analytique de t.*

Examinons successivement ces deux hypothèses.

Si nous admettons la première hypothèse, nous devrons imaginer que le mouvement d'un liquide visqueux est assujetti, le long des parois fixes ou mobiles auxquelles il confine, à la seule condition

$$(31)\qquad (u_1 - u_2)\cos(N, x) + (v_1 - v_2)\cos(N, y) + (w_1 - w_2)\cos(N, z) = 0,$$

qui est d'origine purement cinématique.

Mais un autre point est également hors de doute. La considération de la viscosité intrinsèque des liquides serait impuissante à fournir des équations comparables aux faits d'expérience les mieux constatés si l'on se bornait à l'emploi, le long des surfaces terminales, de la condition (31). Il pourrait même arriver que la solution de certains problèmes essentiels devînt alors indéterminée.

Examinons, par exemple, le célèbre problème de Poiseuille :

Un liquide, parvenu à l'état de régime permanent, s'écoule par filets parallèles à l'intérieur d'un conduit cylindrique (*Recherches*, IVe Partie, Chap. III, § 4).

Nous pourrons encore établir que la vitesse w vérifie l'équation aux dérivées partielles [*loc. cit.*, équation (132 *bis*)]

$$(32)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = K^2.$$

Mais la vitesse w étant, en chaque point, tangente à la paroi solide, la condition (31) sera vérifiée d'elle-même; nous n'aurons donc, pour déterminer w, que l'équation (32), qui ne saurait suffire à cette objet.

La première des deux hypothèses énoncées doit donc être rejetée et nous sommes contraints d'adopter la seconde, qui peut, plus explicitement, être formulée de la manière suivante :

Au sein d'un liquide visqueux, en contact avec des solides fixes ou mobiles, il existe un domaine fini, contigu aux parois solides, où les coordonnées des

divers points matériels ne sont pas exprimables en fonctions analytiques du temps à partir de l'instant initial du mouvement. Ce domaine peut comprendre tout le fluide. S'il comprend seulement une partie du fluide, cette partie se compose des mêmes masses pendant toute la durée du mouvement.

Cette proposition fondamentale a été découverte par M. Boussinesq (¹); dans un cas très simple, M. Boussinesq a pu donner, sous forme finie, les lois du mouvement d'un liquide qui part du repos et qui demeure adhérent à une paroi solide; la solution obtenue est, en effet, non analytique pour la valeur de t qui correspond au début du mouvement.

Il est permis de remarquer qu'aux difficultés que nous avons signalées une solution, différente de celle qu'a proposée M. Boussinesq, aurait pu se présenter comme acceptable. On aurait pu imaginer que les coordonnées de chacun des points matériels du fluide situés à distance finie des parois solides s'expriment en fonctions analytiques de t, à partir de l'instant initial du mouvement, et jusqu'à un certain instant; mais qu'en même temps, à l'instant initial du mouvement, une onde se détache de la paroi solide et se propage dans le fluide. Les rotations seraient alors, à un instant donné, nulles pour les points matériels que l'onde n'a pas encore atteints, et différentes de zéro pour les points matériels qu'elle a dépassés. En prouvant, dans la seconde Partie de ces *Recherches,* qu'une onde ne pouvait se propager au sein d'un fluide visqueux, nous avons rendu cette opinion inacceptable et, partant, mis hors de doute l'interprétation proposée par M. Boussinesq.

Mais une grave question se présente maintenant. Sera-t-il toujours possible de trouver, pour les équations du mouvement d'un fluide visqueux qui part du repos, des intégrales non analytiques à l'instant initial? Le problème que M. Boussinesq a pu résoudre dans un cas particulier admettra-t-il une solution en général? Il semble malaisé de répondre à cette question. Il est permis de se demander si l'étude du mouvement des fluides visqueux ne conduira pas, dans certains cas, à d'insurmontables contradictions.

(¹) J. Boussinesq, *Sur la manière dont les frottements entrent en jeu dans un fluide qui sort de l'état de repos, et sur leur effet pour empêcher l'existence d'une fonction des vitesses* (*Comptes rendus,* t. XC, 1880, p. 736). — *Quelques considérations à l'appui d'une Note du 29 mars sur l'impossibilité d'admettre, en général, une fonction des vitesses dans toute question d'Hydrodynamique où les frottements ont un rôle notable* (*Comptes rendus,* t. XC, 1880, p. 967).

SIXIÈME PARTIE.

SUR LES DEUX COEFFICIENTS DE VISCOSITÉ ET LA VISCOSITÉ AU VOISINAGE DE L'ÉTAT CRITIQUE.

CHAPITRE I.

DES DEUX COEFFICIENTS DE VISCOSITÉ $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$.

---

§ 1. — Examen des diverses hypothèses qui ont été faites touchant les coefficients de viscosité $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$.

Au cours des *Recherches sur l'Hydrodynamique des fluides visqueux*, que nous avons développées dans les précédentes Parties, nous avons toujours traité les deux fonctions $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$ qui déterminent la viscosité d'un fluide comme n'ayant entre elles aucune relation forcée, et comme assujetties seulement aux deux conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu(\rho, T) \geqq 0, \\ 3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) \geqq 0, \end{cases}$$

hors desquelles la fonction dissipative pourrait devenir négative.

Or, certains auteurs, en traitant de la viscosité des fluides, ont fait des suppositions qui restreignent l'indétermination des deux fonctions $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$; entre ces deux fonctions, ils ont admis qu'il existait une relation nécessaire; d'ailleurs, comme nous l'avons déjà remarqué (*Recherches sur l'Hydrodynamique*, Ire Partie, Chap. I, § 3), cette relation varie suivant les auteurs, qui ont hésité entre les trois formes suivantes :

$$(2) \qquad \lambda(\rho, T) = \mu(\rho, T),$$

$$(3) \qquad \lambda(\rho, T) = 0,$$

$$(4) \qquad 3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) = 0.$$

Il importe que nous passions en revue les raisons invoquées en faveur de chacune de ces trois relations, afin de nous assurer qu'aucune de ces raisons n'est assez forte pour entraîner notre adhésion.

On dit souvent, dans les Traités, que la théorie de Navier est indépendante de

toute hypothèse sur la valeur du coefficient $\lambda(\rho, T)$, car elle traite des fluides incompressibles, en sorte que le coefficient λ disparaît des équations. Une telle opinion découle d'une lecture superficielle de l'œuvre de Navier.

Il est exact qu'à la fin de son Mémoire, Navier, traitant seulement des fluides incompressibles, simplifie ses équations en biffant tous les termes qui contiennent en facteur la dilatation en volume ou ses dérivées partielles; mais cette opération a été précédée d'une analyse générale, qui ne suppose pas le fluide incompressible; cette analyse conduit à une expression du travail virtuel de la viscosité [1] et, avec nos notations, cette expression s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} d\tau_v = & \int \mu(\rho, T)\left[\left(2\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \Delta u\right)\delta x + \left(2\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + \Delta v\right)\delta y + \left(2\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \Delta w\right)\delta z\right] d\varpi \\ & + \int \mu(\rho, T)\left\{ \left[\left(\theta + 2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(n_i, x) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos(n_i, y) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos(n_i, z)\right]\delta x \right. \\ & \qquad + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos(n_i, x) + \left(\theta + 2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos(n_i, y) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos(n_i, z)\right]\delta y \\ & \qquad \left. + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos(n_i, x) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n_i, y) + \left(\theta + 2\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cos(n_i, z)\right]\delta z \right\} dS. \end{aligned}$$

Cette expression coïncide avec celle que donnent les égalités (47) et (51) de la première Partie, pourvu que l'on fasse, en ces dernières,

$$\lambda(\rho, T) = \mu(\rho, T). \tag{2}$$

On doit donc regarder cette dernière relation comme exprimant l'opinion de Navier.

C'est au moyen d'hypothèses sur les actions moléculaires, assimilées à des forces centrales, que Navier est parvenu à la relation (3).

On sait du reste que l'hypothèse des forces centrales, introduite par Poisson dans l'étude de l'élasticité des corps solides, conduit à poser, entre les deux coefficients d'élasticité des corps isotropes, une relation semblable à l'égalité (2).

La relation ainsi introduite par Poisson dans l'étude de l'élasticité des corps isotropes n'est point, tant s'en faut, confirmée par l'expérience; de plus, elle est visiblement inapplicable aux liquides [2], alors que rien, dans le développement des théories élastiques, ne permet d'exclure logiquement les liquides du nombre des corps isotropes. Aussi la nécessité d'éviter cette relation inacceptable est-elle

---

(1) *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, par M. NAVIER, lu à l'Académie des Sciences le 18 mars 1822 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 2e série, t. VI, 1823, p. 389).

(2) P. DUHEM, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. II, p. 241. Paris, 1891.

une des raisons qui ont amené le rejet de l'hypothèse des forces centrales. Ainsi convaincue d'erreur et rejetée de l'étude de l'élasticité, cette hypothèse semble singulièrement aventureuse dans le domaine de la viscosité; et s'il est une de ses conséquences que l'on doive révoquer en doute, c'est bien la relation (2), homologue, en cette théorie, de l'égalité condamnée par la théorie de l'élasticité.

Cette égalité (2), on la retrouve d'ailleurs d'une manière nécessaire toutes les fois qu'on fait usage de l'hypothèse des forces centrales pour traiter de la viscosité; c'est ainsi qu'elle a été obtenue de nouveau par M. O.-E. Meyer (1).

Dans le Mémoire de M. O.-E. Meyer, l'analogie entre l'égalité (2) et l'égalité qui, selon Poisson, caractérise les corps élastiques isotropes est d'autant plus évidente que l'auteur y traite de la viscosité non pas au sein des milieux fluides, mais au sein des milieux élastiques isotropes et peu déformés; le même calcul lui donne alors, pour les actions élastiques, la relation de Poisson et, pour les actions de viscosité, la relation (2).

Cette relation (2), M. O.-E. Meyer l'a retrouvée plus tard (2) en se fondant sur la théorie cinétique des gaz, alors que, de cette théorie, d'autres auteurs ont, comme nous le verrons, tiré d'autres relations.

La relation

$$\lambda(\rho, T) = 0 \qquad (3)$$

se trouve seulement dans un Mémoire inédit que Cauchy avait présenté à l'Académie des Sciences en 1822 et dont il a reproduit les résultats, en 1828, dans les *Anciens Exercices de Mathématiques* (3); mais, aussitôt après avoir reproduit ces résultats, Cauchy remarque qu'on peut leur en substituer d'autres, plus généraux, où les coefficients $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$ ont des valeurs quelconques; l'illustre analyste n'attache donc aucune importance à la relation (3).

L'existence de deux coefficients de viscosité, indépendants l'un de l'autre, résulte également de la très curieuse théorie de la viscosité développée par Poisson en 1829 (4); les deux coefficients qu'il considère et qu'il désigne par β et β' sont

---

(1) O.-E. MEYER, *Zur Theorie der inneren Reibung* (*Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. LXXVIII, 1874, p. 130).

(2) O.-E. MEYER, *Die kinetische Theorie der Gase*, p. 325. Breslau, 1877.

(3) CAUCHY, *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique*, § 3. *Sur le mouvement intérieur d'un corps solide non élastique* (*Exercices de Mathématiques*, III[e] année, p. 183. Paris, 1828).

(4) POISSON, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, lu à l'Académie des Sciences le 12 octobre 1829 (*Journal de l'École Polytechnique*, XX[e] Cahier, t. XIII, 1831, p. 1-174).

liés à nos coefficients λ et μ par les relations

$$\lambda(\rho, T) = -\beta',$$
$$\mu(\rho, T) = -\beta.$$

Poisson laisse entièrement quelconques les deux coefficients β et β'.

Cette opinion est aussi celle de Barré de Saint-Venant, bien que sa courte Note sur ce sujet (¹) ait parfois été regardée comme favorable à la relation (4). Cette Note, en effet, prouve simplement qu'il doit exister une grandeur ϖ, définie en chaque point du fluide en mouvement, telle que l'on ait

$$\nu_x = -\varpi - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \nu_y = -\varpi - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \nu_z = -\varpi - 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\tau_x = -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \qquad \tau_y = -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \qquad \tau_z = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

En terminant, Saint-Venant fait remarquer que ces formules conviennent aussi bien à la théorie de Navier qu'à la théorie de Poisson.

C'est Stokes (²) qui, le premier, a proposé la relation

$$3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) = 0. \tag{4}$$

Cette relation signifie, comme nous l'avons vu (Iʳᵉ Partie, Chap. I, § 2) que le travail des actions de viscosité serait nul si chacun des éléments du fluide se dilatait en restant semblable à lui-même. Voici les brèves considérations par lesquelles Stokes la justifie :

« Il nous reste, dit-il, à considérer l'effet de la dilatation. Supposons, tout d'abord, qu'aucune déformation n'accompagne cette dilatation ; il est aisé de voir que le mouvement relatif du fluide au point considéré sera le même en toute direction. Par conséquent, une telle dilatation ne peut avoir pour effet que d'ajouter à la pression que produisent les actions des molécules, supposées dans leur position d'équilibre relatif, une autre pression normale p', la même en tout sens. Mais cette pression p' provient uniquement de l'ensemble des actions moléculaires mises en jeu par les déplacements que les molécules ont subi par rapport à leur position d'équilibre relatif; comme d'ailleurs, en moyenne, ces déplacements

(¹) BARRÉ DE SAINT-VENANT, *Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides, présenté à l'Académie des Sciences le 14 avril 1834* (*Comptes rendus*, t. XVII, 1843, p. 1240).

(²) STOKES, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids*, n° 3, lu le 14 avril 1845 à la Société philosophique de Cambridge (*Transactions of the Cambridge philosophical Society*, Vol. VIII, p. 287. — *Mathematical and physical Papers*, Vol. I, p. 87).

se produisent indifféremment en toute direction, il en résulte que les actions qui concourent à former p' se neutralisent les unes les autres et que $p' = 0$. On tirerait la même conclusion de l'hypothèse cinétique, en regardant, comme il est naturel de le faire, chaque secousse mise en action comme liée à un accroissement de pression en certaines directions et à une diminution de pression dans d'autres directions. »

Il est à peine besoin de faire remarquer l'insuffisance d'un tel raisonnement, dont un calcul plus complet eût démenti les conclusions. D'ailleurs, Stokes lui-même paraît avoir attaché à la conclusion ainsi obtenue une médiocre confiance; voici, en effet, ce qu'il écrit quelques lignes plus loin : « On peut poser $3\lambda + 2\mu = 0$ si l'on suppose que, dans le cas d'un mouvement de dilatation uniforme, la pression à chaque instant dépend exclusivement de la densité et de la température à cet instant et nullement de la vitesse avec laquelle la première varie d'un instant à l'autre. Dans la plupart des cas auxquels il est intéressant d'appliquer la théorie de la viscosité, ou bien la densité du fluide est constante, ou bien l'on peut, sans erreur sensible, la regarder comme constante; elle change lentement de valeur. Les résultats sont exactement les mêmes dans le premier cas, et sensiblement les mêmes dans le second cas, que $(3\lambda + 2\mu)$ soit ou non égal à zéro. Par conséquent, bien que la théorie et l'expérience soient d'accord en ces divers cas, on ne saurait regarder l'expérience comme vérifiant la partie de la théorie qui a trait à l'hypothèse $3\lambda + 2\mu = 0$. »

La relation (4) a été retrouvée par Maxwell (¹) en faisant usage de la théorie cinétique des gaz et en assimilant les molécules gazeuses à des points dont la répulsion est inversement proportionnelle à la cinquième puissance de la distance; son analyse a été ensuite exposée plus rigoureusement par G. Kirchhoff (²) et par M. Boltzmann (³). Mais, alors même que l'on n'opposerait pas une fin de non recevoir aux hypothèses sur lesquelles repose la théorie cinétique des gaz, il est permis de faire observer :

1° Que les mêmes calculs qui fournissent les équations du mouvement d'un fluide visqueux, complétées par la relation (4), exigent que le gaz suive les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, ce qui restreint aux gaz parfaits la portée des résultats obtenus;

(¹) MAXWELL, *The Bakerian Lecture : On the viscosity or internal friction of air and other gases,* lu le 8 février 1868 à la Société Royale de Londres. (*Philosophical Transactions*, vol. CLVI. — *Scientific Papers*, vol. II, p. 69.)

(²) G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über die Theorie der Wärme*, p. 193. Leipzig, 1894.

(³) L. BOLTZMANN, *Vorlesungen über Gastheorie,* I. Theil, p. 169 et p. 180. Leipzig, 1896. — *Leçons sur la Théorie des gaz,* traduites par A. GALLOTTI, Iʳᵉ Partie, p. 159 et p. 171. Paris, 1902. Dans le dernier des deux passages cités, M. Boltzmann signale le caractère arbitraire de plusieurs des hypothèses faites.

2° Que, selon ces mêmes calculs (1), le rapport de la chaleur spécifique C sous pression constante à la chaleur spécifique c sous volume constant a pour valeur

$$\frac{C}{c} = \frac{5}{3} = 1,666, \qquad \ldots,$$

conclusion manifestement fausse puisque, pour tous les gaz parfaits bien étudiés, le rapport $\frac{C}{c}$ a une valeur voisine de 1,40.

Si la théorie dont nous parlons fournit une valeur assurément fausse pour le rapport $\frac{C}{c}$, pourquoi fournirait-elle une valeur assurément juste pour la quantité $(3\lambda + 2\mu)$?

Or, G. Kirchhoff ne trouve (2), à la relation (4), aucun fondement en dehors de la théorie cinétique des gaz.

Enfin, M. L. Natanson, qui a donné récemment une théorie fort originale de la viscosité, termine son exposé par cette déclaration (3) : « En conclusion, nous dirons que la relation de Stokes, $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, s'accorde parfaitement avec l'ensemble de nos hypothèses; mais rien ne nous oblige à les considérer comme un corollaire qui découlerait avec nécessité de notre théorie. »

Il ressort clairement de cet exposé historique qu'aucune raison péremptoire n'impose une relation particulière entre les deux quantités $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$; tout au plus, les physiciens qui regardent comme légitime la théorie cinétique des gaz pourraient-ils, en vertu de cette théorie, regarder la relation (4), proposée par M. Stokes, comme exacte pour les gaz parfaits monoatomiques et, *peut-être,* pour les autres gaz parfaits; ils ne sauraient, en tous cas, la regarder comme établie pour les fluides en général.

Nous allons voir que si l'on avait tenu, dans l'étude de la viscosité, à être rigoureusement conséquent avec la définition du mot *fluide,* on aurait été amené à assujettir les fonctions $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$ à des conditions toutes différentes de celles qui ont été proposées jusqu'ici.

---

(1) G. Kirchhoff, *loc. cit.*, p. 196. — L. Boltzmann, *loc. cit.* (trad. Gallotti), p. 170 et p. 179.

(2) G. Kirchhoff, *loc. cit.*, p. 116.

(3) L. Natanson, *Sur les lois de la viscosité* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie : Classe des Sciences mathématiques et naturelles,* février 1901, p. 110).

§ 2. — Forme nécessaire des actions de viscosité au sein d'un fluide proprement dit. Impossibilité des liquides visqueux.

Revenons à la définition du mot *fluide*.

Un milieu continu est dit *fluide* si l'état de chaque élément est entièrement défini par la connaissance des coordonnées x, y, z d'un point de chaque élément, par la densité ρ de cet élément et par la température T qui y règne. Pour déterminer entièrement la modification réelle ou virtuelle éprouvée par un tel élément, il suffit de connaître le changement réel ou virtuel de la position qu'il occupe dans l'espace, et les variations virtuelles de la température et de la densité; il est totalement inutile de connaître la déformation que cet élément a pu subir durant la modification considérée.

Du moment que l'on convient de tenir compte, pour définir la modification subie par un élément d'un certain milieu, non seulement du changement de densité de cet élément, mais encore des déformations qu'il a éprouvées; du moment que deux états où l'élément a même densité, même température, mais des formes différentes, sont regardés non comme deux états identiques, mais comme deux états distincts, on ne doit plus dire que le milieu considéré est un *milieu fluide;* on doit dire que l'on étudie les propriétés d'un *milieu élastique* (¹).

Dès lors, il est facile de déterminer la forme que doivent avoir les actions de viscosité au sein d'un corps fluide si l'on veut, dans la détermination de cette forme, rester rigoureusement conséquent avec la définition précédente.

Les composantes u, v, w de la vitesse sont supposées fonctions continues de x, y, z; les divers éléments qui composent le fluide sont donc soudés entre eux; dès lors, le travail virtuel $d\mathfrak{T}_v$ des actions de viscosité au sein de la masse fluide est la somme des travaux virtuels des viscosités intrinsèques de chaque élément fluide. Si donc on désigne par $d\tau_v\, d\varpi$ le travail virtuel des viscosités intrinsèques à l'élément de volume $d\varpi$, on aura [Ire Partie, égalité (41)]

$$d\mathfrak{T}_v = \int d\tau_v\, d\varpi, \qquad (4\ bis)$$

l'intégrale s'étendant à tous les éléments $d\varpi$ du volume occupé par le fluide.

Quant à la forme de $d\tau_v\, d\varpi$, elle est bien aisée à déterminer. Indépendamment de sa position absolue dans l'espace et de sa température absolue T, l'élément $d\varpi$ est entièrement déterminé par une seule variable normale, sa densité ρ; dès lors,

(¹) Nous avons déjà insisté sur cette définition dans les feuilles autographiées de notre Cours : *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique* (t. II, p. 205), professé à Lille en 1890-1891.

si l'on fait usage des principes posés au Chapitre I, § 1, de la première Partie de ces *Recherches*, on voit que

$$d\tau_v\, d\varpi = \int f\left(\rho, \mathrm{T}, \frac{d\rho}{dt}\right) \frac{d\rho}{dt}\, \delta\rho\, d\varpi, \tag{5}$$

$f\left(\rho, \mathrm{T}, \frac{d\rho}{dt}\right)$ étant une quantité essentiellement négative. Si l'on admet, en outre, la supposition que nous avons appelée l'*hypothèse approximative*, on devra regarder f comme indépendant de $\frac{d\rho}{dt}$, ce qui donnera

$$d\tau_v\, d\varpi = \int f(\rho, \mathrm{T}) \frac{d\rho}{dt}\, \delta\rho\, d\varpi. \tag{6}$$

Mais on a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \\ \delta\rho &= -\rho\left(\frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta z}{\partial z}\right). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Si donc on pose

$$\rho^2 f(\rho, \mathrm{T}) = -\lambda(\rho, \mathrm{T}),$$

cas auquel, puisque $f(\rho, \mathrm{T})$ est essentiellement négatif, $\lambda(\rho, \mathrm{T})$ est essentiellement positif :

$$\lambda(\rho, \mathrm{T}) > 0, \tag{8}$$

on aura, en vertu des égalités (4) à (7),

$$d\tau_v = -\int \lambda(\rho, \mathrm{T})\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta z}{\partial z}\right) d\varpi. \tag{9}$$

Telle est la forme nécessaire du travail virtuel de la viscosité en un milieu fluide.

Mais, s'il s'agit d'un fluide incompressible, on a constamment, en vertu des égalités (7),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta z}{\partial z} = 0,$$

en sorte que l'égalité (136) devient

$$d\tau_v = 0$$

Le travail virtuel des actions de viscosité, au sein d'un fluide incompressible, est identiquement nul; en d'autres termes, LA SUPPOSITION D'UN LIQUIDE VISQUEUX EST CONTRADICTOIRE AVEC LA DÉFINITION DU MOT FLUIDE.

Dès lors, les difficultés auxquelles nous a conduits l'étude des liquides visqueux cessent d'être surprenantes.

§ 3. — Propriétés des fluides compressibles visqueux.

Mais si la définition du mot *fluide* nous empêche de considérer des fluides incompressibles visqueux, elle nous permet de traiter des *fluides compressibles visqueux* et, par l'égalité (10), elle nous fait connaître la forme qu'affecte nécessairement, en de pareils fluides, le travail virtuel de viscosité.

Si, selon l'usage, nous posons

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

l'égalité (9) pourra s'écrire

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} d\mathfrak{E}_v = & \int \left[\frac{\partial(\lambda\theta)}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial(\lambda\theta)}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial(\lambda\theta)}{\partial z}\,\delta z\right] d\varpi \\ & + \int \lambda\theta[\cos(n_i, x)\,\delta x + \cos(n_i, y)\,\delta y + \cos(n_i, z)\,\delta z]\,dS, \end{aligned}\right.$$

la première intégrale s'étendant au volume occupé par le fluide et la seconde à la surface qui le limite. Cette forme rentre, comme cas particulier, dans celle qui a été donnée en l'égalité (47) de la première Partie, à la condition de faire

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} & \nu_x = \nu_y = \nu_z = -\lambda(\rho, T)\theta, \\ & \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on compare ces égalités aux égalités (51) de la première Partie, on voit qu'elles découlent de ces dernières pourvu que l'on y fasse

$$(12)\quad \mu(\rho, T) = 0.$$

Donc, *la seule théorie des fluides visqueux qui soit compatible avec la définition du mot* fluide *est un cas particulier de la théorie habituellement admise; ce cas particulier est celui où le coefficient* $\mu(\rho, T)$ *est égal à* 0.

Les propriétés de ces fluides sont alors aisées à établir; pour les obtenir, il suffit d'égaler à 0 le coefficient $\mu(\rho, T)$ dans les équations de la théorie classique.

Dès lors, les équations (58), (74) et (75) de la première Partie de ces *Recherches*

nous montrent que l'on a, en tout point de la masse fluide,

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e - \gamma_x) - \dfrac{\partial}{\partial x}[\lambda(\rho, T)\theta] = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial y} - \rho(Y_i + Y_e - \gamma_y) - \dfrac{\partial}{\partial y}[\lambda(\rho, T)\theta] = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial z} - \rho(Z_i + Z_e - \gamma_z) - \dfrac{\partial}{\partial z}[\lambda(\rho, T)\theta] = 0, \end{cases}$$

$$(14)\qquad \Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0.$$

Selon les égalités (57) de la première Partie, les grandeurs p_x, p_y, p_z se réduiront à

$$(15)\qquad \begin{cases} p_x = \lambda(\rho, T)\theta \cos(n_i, x), \\ p_y = \lambda(\rho, T)\theta \cos(n_i, y), \\ p_z = \lambda(\rho, T)\theta \cos(n_i, z). \end{cases}$$

Si un élément dS de la surface qui limite le fluide est soumis à une force dont les composantes sont $P_x\,dS$, $P_y\,dS$, $P_z\,dS$, on devra avoir, en vertu de ces égalités (15) et des égalités (76) de la première Partie,

$$(16)\qquad \begin{cases} \Pi \cos(n_i, x) = P_x + \lambda(\rho, T)\cos(n_i, x), \\ \Pi \cos(n_i, y) = P_y + \lambda(\rho, T)\cos(n_i, y), \\ \Pi \cos(n_i, z) = P_z + \lambda(\rho, T)\cos(n_i, z), \end{cases}$$

ce qui nous apprend que le vecteur P_x, P_y, P_z doit être normal à la surface S.

Enfin, les égalités (15) nous enseignent que le vecteur p_x, p_y, p_z doit être, en tout point, normal à la surface qui limite le fluide; cette proposition simplifie singulièrement la discussion de ce qui se passe à la surface de contact d'un solide et d'un fluide ou à la surface de contact de deux fluides. Il est inutile d'examiner si, le long d'une telle surface, il se produit une viscosité ($f < 0$), mais point de frottement ($\mathfrak{G} = 0$) ou bien, au contraire, si les deux corps au contact frottent l'un sur l'autre ($\mathfrak{G} < 0$). Ce que nous avons vu au Chapitre II de la quatrième Partie nous enseigne que, quelle que soit l'hypothèse faite, les deux corps resteront soudés l'un à l'autre le long de leur surface de contact. Si u_1, v_1, w_1 sont les composantes de la vitesse en un point de l'un des deux corps et u_2, v_2, w_2 les composantes de la vitesse en un point de l'autre corps, on aura, en tout point de leur surface de contact,

$$(17)\qquad u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2, \qquad w_1 = w_2.$$

Les résultats auxquels nous venons de parvenir peuvent se mettre sous une

forme peu différente, mais susceptible d'une interprétation intéressante.

Posons

$$(18) \qquad \mathrm{P} = \Pi - \lambda(\rho, \mathrm{T})\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Les équations (13) deviendront

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} - \rho(\mathrm{X}_i + \mathrm{X}_e - \gamma_x) = 0, \\ &\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} - \rho(\mathrm{X}_i + \mathrm{X}_e - \gamma_y) = 0, \\ &\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} - \rho(\mathrm{X}_i + \mathrm{X}_e - \gamma_z) = 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations (16) deviendront

$$(20) \qquad \mathrm{P}_x = \mathrm{P}\cos(n_i, x), \qquad \mathrm{P}_y = \mathrm{P}\cos(n_i, y), \qquad \mathrm{P}_z = \mathrm{P}\cos(n_i, z).$$

Enfin, l'équation (14) deviendra

$$\mathrm{P} + \rho^2(\mathrm{A}_i + \mathrm{A}_e) - \rho^2\frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho} + \lambda(\rho, \mathrm{T})\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

ou bien, en vertu de la première égalité (7),

$$(21) \qquad \mathrm{P} + \rho^2(\mathrm{A}_i + \mathrm{A}_e) - \rho^2\frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho} - \frac{\lambda(\rho, \mathrm{T})}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Les relations (19) et (20) ont exactement la même forme qu'en un fluide parfait où P serait la pression. Seule l'égalité (21) a une forme différente de celle qu'elle aurait en un tel fluide parfait; elle en diffère par la présence, au premier membre, du terme $-\frac{\lambda(\rho, \mathrm{T})}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$. On peut donc, si l'on veut, énoncer la proposition suivante :

Les équations du mouvement d'un fluide visqueux ne diffèrent des équations du mouvement d'un fluide parfait que par la forme de l'équation dite de compressibilité et de dilatation; *l'équation relative aux fluides visqueux se tire de l'équation relative aux fluides parfaits en retranchant de la pression le terme* $\frac{\lambda(\rho, \mathrm{T})}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$.

Bornons-nous à considérer le cas où les actions qui s'exercent sur le fluide sont newtoniennes; on a alors

$$\mathrm{A}_i = 0, \qquad \mathrm{A}_e = 0,$$

et l'équation (21) se réduit à la forme

$$P - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - \frac{\lambda(\rho, T)}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{22}$$

Les lois du mouvement d'un fluide compressible, visqueux, soumis à des actions newtoniennes, ne diffèrent qu'en un point des lois du mouvement d'un fluide compressible, parfait, soumis aux mêmes actions; il n'existe plus de relation en termes finis entre la densité ρ, *la pression* P *et la température* T; *cette relation est remplacée par une équation différentielle qui, à la densité* ρ, *à la pression* P *et à la température* T, *relie la vitesse* $\frac{d\rho}{dt}$ *avec laquelle varie la densité.*

A cette manière de concevoir les fluides visqueux nous étions parvenus dès 1898 [1].

Discutons l'égalité (22).

Soit ρ_0 la densité qu'aurait le fluide sous la pression P, à la température T, si la viscosité n'existait pas; cette densité ρ_0, donnée par l'égalité

$$P - \rho_0^2 \frac{\partial \zeta(\rho_0, T)}{\partial \rho_0} = 0, \tag{23}$$

est la densité que prendrait le fluide *en équilibre* sous la pression P, à la température T.

En désignant par ρ' une certaine valeur de ρ comprise entre ρ et ρ_0, on peut écrire, en vertu des égalités (22) et (23),

$$(\rho_0 - \rho) \frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'} \right] - \frac{\lambda(\rho, T)}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{24}$$

Pour maintenir le fluide en équilibre à la température T et avec la densité ρ', il faut le soumettre à une pression Π que donne l'égalité

$$\Pi = \rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'}.$$

Cette égalité peut être considérée comme une équation définissant ρ' en fonction de Π et de T; si, sans faire varier T, on fait croître Π de $d\Pi$, cette fonction croît de $\left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_T d\Pi$, et l'on a

$$\left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_T = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial \rho'} \left[\rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'} \right]} = F(\rho', T). \tag{25}$$

---

(1) *Traité élémentaire de Mécanique chimique fondée sur la Thermodynamique*, Livre IV, Chap. I, § 7, t. II, p. 163. Paris, 1898.

Selon l'égalité (25), l'égalité (24) devient

$$(26) \qquad \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{\lambda(\rho, T)F(\rho', T)}(\rho - \rho_0).$$

L'inégalité (18) nous enseigne que $\lambda(\rho, T)$ est essentiellement positif; d'autre part, nous savons que, pour un fluide susceptible d'équilibres stables, la quantité

$$\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T = F(\rho, T)$$

doit être essentiellement positive ([1]).

L'égalité (26) nous enseigne donc que $\frac{d\rho}{dt}$ est constamment de signe contraire à $(\rho - \rho_0)$; d'où la proposition suivante :

En chaque point d'un fluide compressible parfait, où la température est T *et la pression* P, *la densité* ρ *a, à chaque instant du mouvement, la valeur* ρ_0 *qu'elle aurait au sein d'un fluide homogène, en équilibre à la température* T *et sous la pression uniforme* P. *Il n'en est plus de même au sein d'un fluide visqueux en mouvement; mais, pour chaque point matériel et à chaque instant, la vitesse de variation de la densité est d'un sens tel qu'elle tende à rapprocher la densité* ρ *de la valeur de* ρ_0 *qui convient à ce point et à cet instant.*

Supposons que la compressibilité du fluide, mesurée par la fonction $F(\rho, T)$, ne soit pas extrêmement grande dans les conditions où se trouve le fluide étudié et que le coefficient de viscosité $\lambda(\rho, T)$ ait une très petite valeur. Si $(\rho - \rho_0)$ n'a pas une très petite valeur absolue, l'équation (26) donnera pour $\frac{d\rho}{dt}$ une très grande valeur absolue; mais la première égalité (7) montre qu'il n'en peut être ainsi, dans le cas où les composantes u, v, w de la vitesse ne varient pas très rapidement d'un point au point voisin. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Au sein d'un fluide peu visqueux où la vitesse n'éprouve pas de très grandes variations lorsque l'on passe d'un point au point voisin, la densité ρ, *en chaque point et à chaque instant, diffère très peu de la valeur* ρ_0 *qui correspond au même point et au même instant.*

On voit bien ainsi comment les fluides parfaits sont la forme limite des fluides peu visqueux.

Pour établir plus simplement les diverses propositions que nous venons

---

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* [*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 5[e] série, t. III, p. 174, condition (63); 1897].

d'énoncer, nous avons supposé que le fluide était soumis à des actions newtoniennes; mais cette restriction n'est pas essentielle et nous pouvons ne pas la faire.

Considérons les fonctions $\mathcal{A}_i(\mathrm{R}, x, y, z, t)$, $\mathcal{A}_e(\mathrm{R}, x, y, z, t)$ (Ire Partie, Chap. I, § 4) dans lesquelles il suffit de faire

$$\mathrm{R} = \rho(x, y, z, t)$$

pour obtenir les fonctions $\mathrm{A}_i(x, y, z, t)$, $\mathrm{A}_e(x, y, z, t)$.

L'égalité (148) peut s'écrire

$$\mathrm{P} + \rho^2[\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t) + \mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)] - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho} - \frac{\lambda(\rho, \mathrm{T})}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Considérons, d'autre part, la fonction $\rho_0(x, y, z, t)$ que définit l'équation

$$\mathrm{P} + \rho_0^2[\mathcal{A}_i(\rho_0, x, y, z, t) + \mathcal{A}_e(\rho_0, x, y, z, t)] - \rho_0^2 \frac{\partial \zeta(\rho_0, \mathrm{T})}{\partial \rho_0} = 0,$$

lorsqu'on y remplace P et T par leurs expressions en fonctions de x, y, z, t. Retranchons ces deux équations membre à membre. Si nous désignons par $\rho'(x, y, z, t)$ une valeur comprise entre $\rho(x, y, z, t)$ et $\rho_0(x, y, z, t)$, le résultat obtenu pourra s'écrire

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} &2\rho' \left[\mathcal{A}_i(\rho', x, y, z, t) + \mathcal{A}_e(\rho', x, y, z, t) - \frac{\partial \zeta(\rho', \mathrm{T})}{\partial \rho'} \right] \\ &+ \rho'^2 \left[\frac{\partial \mathcal{A}_i(\rho', x, y, z, t)}{\partial \rho'} + \frac{\partial \mathcal{A}_e(\rho', x, y, z, t)}{\partial \rho'} - \frac{\partial^2 \zeta(\rho', \mathrm{T})}{\partial \rho'^2} \right] \end{aligned} \right\} (\rho - \rho_0) - \frac{\lambda(\rho, \mathrm{T})}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Mais nous avons admis, à plusieurs reprises (Ire Partie, Chap. I, § 11), que, pour toute valeur de ρ' comprise parmi celles que peut atteindre la densité du fluide, on avait l'inégalité

$$\begin{aligned} &2\rho' \left[\mathcal{A}_i(\rho', x, y, z, t) + \mathcal{A}_e(\rho', x, y, z, t) - \frac{\partial \zeta(\rho', \mathrm{T})}{\partial \rho'} \right] \\ &+ \rho'^2 \left[\frac{\partial \mathcal{A}_i(\rho', x, y, z, t)}{\partial \rho'} + \frac{\partial \mathcal{A}_e(\rho', x, y, z, t)}{\partial \rho'} - \frac{\partial^2 \zeta(\rho', \mathrm{T})}{\partial \rho'^2} \right] < 0. \end{aligned}$$

Dès lors, il est aisé de déduire de l'égalité (27) des conclusions semblables à celles que nous avons déduites de l'égalité (26).

§ 4. — Retour aux formules générales de la viscosité. Combinaison des considérations précédentes et de l'hypothèse de Stokes

Selon ce que nous avons vu au Paragraphe 2, le physicien qui, dans ses raisonnements, demeurerait fermement attaché à la définition du mot *fluide* serait conduit à cette conséquence : un fluide incompressible ne peut pas être visqueux

Cette conséquence suffit à prouver que les propriétés des corps que l'expérimentateur nomme *fluides visqueux* ne peuvent être représentées par une théorie où l'on regarderait ces corps comme étant rigoureusement fluides. Force nous est de traiter les fluides visqueux comme des milieux élastiques, mais comme des milieux élastiques très aisément déformables.

Sans approfondir ici cette notion, que nous retrouvons en un autre travail, nous remarquerons que l'on peut, sans absurdité, regarder le potentiel interne du système comme différant très peu du potentiel interne d'un fluide proprement dit, tandis que le calcul du travail de viscosité exigerait que l'on tînt compte des déformations de chaque élément. On est alors conduit aux équations qui ont été développées au Chapitre I de la première Partie de ces *Recherches;* mais ces équations apparaissent comme des formules approchées, et non plus comme des lois rigoureuses. Ce caractère entraîne l'illégitimité de certaines déductions, par exemple de la démonstration du théorème de Lagrange donnée en la cinquième Partie de ces *Recherches,* au Paragraphe 1 du Chapitre I.

Ces remarques, qui nous ramènent aux équations générales de la viscosité, ne font cependant pas disparaître l'intérêt des considérations qui ont été développées au Paragraphe précédent.

Posons

$$P = \Pi - \frac{3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{28}$$

et les lois du mouvement des fluides visqueux, développées au Chapitre I de la première Partie de nos *Recherches,* pourront être présentées sous la forme suivante :

1° En tout point de la surface qui limite le fluide, on a [*loc. cit.,* égalités (57) et (76)]

$$\tag{29}\left\{\begin{aligned}
P_x &= P\cos(n,x) - \mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\theta}{3}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,y) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n,z)\right],\\
P_y &= P\cos(n,y) - \mu\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,x) + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\theta}{3}\right)\cos(n,y) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(n,z)\right],\\
P_z &= P\cos(n,z) - \mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n,x) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos(n,y) + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\theta}{3}\right)\cos(n,z)\right];
\end{aligned}\right.$$

2° En tout point du fluide, on a [*loc. cit.,* égalités (49), (51) et (74)]

$$\tag{30}\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial x} - \rho(X_i + X_e - \gamma_x) - 2\frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\theta}{3}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0,\\
&\frac{\partial P}{\partial y} - \rho(Y_i + Y_e - \gamma_y) - \frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - 2\frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\theta}{3}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,\\
&\frac{\partial P}{\partial z} - \rho(Z_i + Z_e - \gamma_z) - \frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial}{\partial z}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\theta}{3}\right) = 0;
\end{aligned}\right.$$

3° En tout point du fluide, également, en vertu de l'égalité (75) de la première Partie de ces *Recherches* et de l'égalité (28) de la présente Partie, on a

$$P + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + \frac{3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (7),

$$(31) \qquad P + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - \frac{3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Pour un instant, faisons abstraction de l'égalité (31) et ne considérons que les égalités (29) et (30); ces égalités sont précisément celles que nous aurions obtenues si nous avions étudié un fluide visqueux pour lequel la fonction $\mu(\rho, T)$ aurait la même valeur que pour le fluide dont nous nous occupons, mais au sein duquel l'hypothèse de Stokes, exprimée par l'égalité (4), serait vérifiée; la pression serait seulement représentée par la lettre P dans nos dernières formules, au lieu d'y être représentée par la lettre Π.

En chaque point de la surface de contact du fluide qui nous occupe et d'une paroi solide nous avons

$$(32) \quad \begin{cases} p_x = \dfrac{3\lambda + 2\mu}{3}\theta \cos(n, x) + \mu\left[2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\theta}{3}\right)\cos(n, x) + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n, y) + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n, z)\right], \\ p_y = \dfrac{3\lambda + 2\mu}{3}\theta \cos(n, y) + \mu\left[\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n, x) + 2\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\theta}{3}\right)\cos(n, y) + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(n, z)\right], \\ p_z = \dfrac{3\lambda + 2\mu}{3}\theta \cos(n, z) + \mu\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n, x) + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(n, y) + 2\left(\dfrac{\partial w}{\partial z} - \dfrac{\theta}{3}\right)\cos(n, z)\right] \end{cases}$$

Que si l'on propose de calculer la projection du vecteur (p_x, p_y, p_z) sur la surface, on obtiendra le même résultat que si l'on avait pris simplement

$$(33) \quad \begin{cases} p_x = \mu\left[2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\theta}{3}\right)\cos(n, x) + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n, y) + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n, z)\right], \\ p_y = \mu\left[\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n, x) + 2\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\theta}{3}\right)\cos(n, y) + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(n, z)\right], \\ p_z = \mu\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(n, x) + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(n, y) + 2\left(\dfrac{\partial w}{\partial z} - \dfrac{\theta}{3}\right)\cos(n, z)\right]. \end{cases}$$

Or ces dernières égalités sont celles que l'on obtiendrait si l'on admettait l'hypothèse de Stokes. D'ailleurs l'étude de l'adhérence ou du glissement du fluide sur la paroi solide dépend uniquement de la projection du vecteur (p_x, p_y, p_z) sur cette paroi; cette étude est donc la même en nos deux problèmes.

Ainsi, *un fluide visqueux quelconque est, de tout point, comparable à un*

fluide au sein duquel la relation de Stokes

$$3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) = 0 \tag{4}$$

serait vérifiée, mais où la densité en chaque point, au lieu de dépendre uniquement de la pression P *et de la température* T *en ce point, et d'en dépendre par la même relation*

$$P + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0 \tag{14 bis}$$

que si le fluide était en équilibre, doit vérifier à chaque instant la relation

$$P + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - \frac{3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{31}$$

Cette relation (31) prête évidemment à toutes les considérations qui ont été développées au sujet de la relation (21).

CHAPITRE II.

LES PHÉNOMÈNES DE VISCOSITÉ AU VOISINAGE DE L'ÉTAT CRITIQUE.

---

§ 1. — Les effets de la viscosité, au voisinage du point critique, en un corps rigoureusement fluide.

La discussion, donnée au Paragraphe 3 du Chapitre précédent, de la relation (21) et des relations (22), (24) et (26) qui s'y rattachent, est liée à cette hypothèse : La quantité $\left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_T$ ne prend pas des valeurs extrêmement grandes. La même restriction pèserait évidemment sur la discussion de l'égalité (31), laquelle devrait être menée exactement comme la discussion de l'égalité (21). Or cette hypothèse n'est pas vérifiée en toutes circonstances; *lorsque la température* T *et la densité* ρ' *du fluide tendent vers la température critique et la densité critique du fluide, la quantité* $\left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_T$ *croît au delà de toute limite.*

Nous sommes donc amenés à compléter l'étude faite au Chapitre précédent en

examinant les propriétés d'un corps compressible visqueux où

$$\left(\frac{d\rho'}{d\Pi}\right)_T = F(\rho', T)$$

a de très grandes valeurs.

Comme au Chapitre précédent, pour rendre cette discussion plus claire, nous imaginerons tout d'abord que le corps étudié se conforme rigoureusement à la définition du mot *fluide*, qui entraîne l'égalité

$$\mu(\rho, T) = 0. \tag{12}$$

Nous étendrons ensuite les résultats obtenus aux corps que l'on traite habituellement comme fluides visqueux.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons qu'en tout point du fluide et à tout instant :

La température T *soit assez voisine de la température critique,*

Les densités ρ, ρ_0 *et, partant, la densité intermédiaire* ρ' *assez voisines de la densité critique,*

Pour que la fonction $F(\rho', T)$ *soit, en chaque point du fluide et à chaque instant, très grande par rapport à* $\frac{1}{\lambda(\rho, T)}$.

Dès lors, le produit $F(\rho', T)\lambda(\rho, T)$ ayant une très grande valeur, à une valeur finie de la différence $(\rho - \rho_0)$ l'égalité (26) fera correspondre une valeur extrêmement petite de $\frac{d\rho}{dt}$.

Ainsi donc, moyennant les suppositions indiquées, *la densité d'un élément fluide varie avec une extrême lenteur bien que sa valeur diffère notablement de la valeur qui conviendrait à l'équilibre dans les conditions de température et de pression où se trouve cet élément.*

Dès lors, rien n'empêche que l'on observe au sein du fluide des ÉTATS DE QUASI-ÉQUILIBRE; *en un tel état, les trois composantes de la vitesse sont très petites en chaque point et à chaque instant; cependant la densité en ce point et à cet instant diffère notablement de celle que l'équation d'équilibre ferait correspondre à la température et à la pression qui règnent en ce point et à cet instant.*

En un tel état, on a approximativement

$$\gamma_x = 0, \qquad \gamma_y = 0, \qquad \gamma_z = 0.$$

D'ailleurs, comme les forces agissantes sont supposées newtoniennes, il existe

deux fonctions $V_i(x, y, z, t)$, $V_e(x, y, z, t)$ telles que

$$X_i = -\frac{\partial V_i}{\partial x}, \qquad Y_i = -\frac{\partial V_i}{\partial y}, \qquad Z_i = -\frac{\partial V_i}{\partial z},$$

$$X_e = -\frac{\partial V_e}{\partial x}, \qquad Y_e = -\frac{\partial V_e}{\partial y}, \qquad Z_e = -\frac{\partial V_e}{\partial z}.$$

Les équations (146) se résument alors dans l'égalité approximative

$$dP + \rho\, d(V_i + V_e) = 0.$$

Cette égalité nous montre que l'on a approximativement

$$\rho = f(V_i + V_e).$$

Dans un état de quasi-équilibre, la distribution des densités au sein du fluide est telle que les points situés sur une même surface de niveau aient sensiblement la même densité.

En particulier, si les forces agissantes se réduisent à la pesanteur, le fluide en quasi-équilibre sera formé de couches horizontales dont chacune aura sensiblement la même densité en tout point.

Un tel état ne sera pas un état permanent; la densité qui correspond à chaque élément fluide variera très lentement jusqu'au moment où la densité aura, en chaque point, la valeur ρ_0 que l'équation

$$(23) \qquad P - \rho_0^2 \frac{\partial \zeta(\rho_0)}{\partial \rho_0} = 0$$

fait correspondre à la pression P et à la température T qui règnent en ce point.

Au lieu d'observer le système à l'état de quasi-équilibre, on peut l'observer animé d'un mouvement sensible; les composantes γ_x, γ_y, γ_z de l'accélération doivent alors figurer dans les équations (19), car elles ont des valeurs notables. La densité de chaque élément matériel varie avec une extrême lenteur; si l'on considère deux instants, t_0, t, qui ne sont pas très éloignés l'un de l'autre, un même élément matériel a sensiblement même densité à l'instant t_0 et à l'instant t.

Considérons l'état du fluide à un instant t_0 et, selon le procédé de Lagrange, caractérisons chaque point matériel par ses coordonnées a, b, c à cet instant; à ce même instant, la distribution des densités au sein du fluide est quelconque; $r(a, b, c)$ est la densité du point matériel (a, b, c).

Proposons-nous d'étudier le mouvement du fluide à partir de l'instant t_0, et pendant un laps de temps qui ne soit pas très long. Pour déterminer ce mouvement, nous devons faire usage des équations (19), que nous pourrons mettre sous

la forme employée par Lagrange :

$$\frac{\partial P}{\partial a} + \rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial a} + \frac{\partial V_e}{\partial a}\right) + \rho\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial b} + \rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial b} + \frac{\partial V_e}{\partial b}\right) + \rho\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial c} + \rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial c} + \frac{\partial V_e}{\partial c}\right) + \rho\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = 0.$$

En outre, nous devrons considérer l'équation de continuité, mise également sous la forme de Lagrange,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho D = 0.$$

Enfin, tant que la différence $(t - t_0)$ n'excédera pas une certaine limite, nous aurons sensiblement

$$\rho(a, b, c, t) = r(a, b, c).$$

Cette égalité jouera le rôle d'équation supplémentaire et ramènera l'équation de continuité à la forme

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 0.$$

Il est un problème, très différent du précédent au point de vue de la Physique, mais qui se traduit exactement par des équations de même forme; ce dernier problème peut donc servir à *illustrer* le premier; voici ce problème :

Dans un fluide incompressible, un corps est dissous; la concentration a, pour les divers éléments matériels, des valeurs très différentes et, comme la densité est fonction de la concentration, il en est de même de la densité.

On suppose que le corps dissous se diffuse dans le dissolvant avec une extrême lenteur; si l'on désigne par s la concentration qui correspond à un élément déterminé du dissolvant, $\frac{ds}{dt}$ aura, pour cet élément, une très petite valeur; il en sera de même de $\frac{d\rho}{dt}$.

Considérons le fluide à un instant t_0; soient, à cet instant, a, b, c les coordonnées d'un élément du dissolvant, coordonnées dont la connaissance permettra à tout instant de reconnaître cet élément; la densité, au sein de cet élément, est $r(a, b, c)$ à l'instant t_0 et $\rho(a, b, c, t)$ à l'instant t; si le laps de temps $(t - t_0)$ n'est pas extrêmement grand, $\rho(a, b, c, t)$ diffère très peu de $r(a, b, c)$, et le mouvement au sein de la dissolution est régi par les équations précédemment écrites.

Tous ceux qui ont observé, au sein d'un fluide, les stries et les traînées qui se manifestent au voisinage du point critique; qui ont observé également les mouvements qui se produisent au sein d'une dissolution de concentration très peu uniforme, ont pu remarquer l'extrême ressemblance de ces phénomènes. L'analyse précédente précise cette analogie.

La variation de la densité ρ d'un fluide dont l'état avoisine l'état critique, ordinairement très lente, prend une vitesse notable si l'on agite vivement le liquide. Les considérations précédentes permettent encore de rendre compte de ce fait.

Un certain espace contient un fluide que nous supposons dans un état de quasi-équilibre, en sorte que nous avons sensiblement

$$\gamma_x = 0, \qquad \gamma_y = 0, \qquad \gamma_z = 0.$$

Les équations (19) se réduisent alors à

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho(X_i + X_e), \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho(Y_i + Y_e), \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \rho(Z_i + Z_e).$$

Supposons les sommes $(X_i + X_e)$, $(Y_i + Y_e)$, $(Z_i + Z_e)$ assez petites pour que les variations de P, d'un point à l'autre de l'espace considéré, soient très petites; cela aura lieu, en particulier, si l'espace considéré a les dimensions généralement employées dans les recherches sur le point critique et si le champ agissant se réduit à celui de la pesanteur. Toutes les valeurs de P sont supposées voisines de la pression critique.

La température est également supposée presque uniforme dans l'espace considéré et, partout, très voisine de la température critique.

La densité ρ_0, donnée par l'égalité (23), n'en présente pas moins, au sein de l'espace considéré, des variations notables; mais, visiblement, toutes les valeurs de ρ_0 au sein de cet espace demeurent au nombre de celles pour lesquelles $F(\rho_0, T)$ a une valeur extrêmement grande.

Pour que notre état de quasi-équilibre soit possible il faut que les valeurs de ρ, aux divers points de l'espace considéré, soient aussi telles que $F(\rho, T)$ ait une valeur extrêmement grande; nous supposerons qu'il en soit ainsi.

Si l'on désigne par ε la valeur très petite que prend le produit $\frac{\lambda(\rho, T)}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$, pour un élément matériel donné, en cet état d'équilibre, on a, selon l'égalité (22),

$$P - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = \varepsilon. \tag{34}$$

Supposons qu'on laisse cet état de quasi-équilibre non troublé jusqu'à l'instant t. A partir de ce moment, on produit dans l'espace considéré une vive agitation.

Considérons un instant t', postérieur à t, et tel que la différence $(t'-t)$ ne soit pas très grande.

A l'instant t', les composantes $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ ont, en général, aux divers points du fluide, des valeurs notables que nous supposerons grandes par rapport aux X, Y, Z; si, par exemple, la seule force agissante est la pesanteur, $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ seront supposés grands par l'intensité de la pesanteur; selon les égalités (19), il en sera de même de $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}$; P subira donc, d'un point à l'autre de l'espace, des variations notables; sa valeur ne pourra être partout très voisine de la pression critique.

Dès lors, à l'instant t', pour un élément matériel donné, P a, en général, une valeur P' notablement différente de la valeur prise par la même grandeur, pour le même élément, à l'instant t, cette dernière différant très peu de la pression critique.

Quant à la température T' au sein de l'élément considéré, à l'instant t', nous supposerons qu'elle continue à différer très peu de la température critique et, partant, de T.

S'il en est ainsi, on voit sans peine que $\frac{d\rho}{dt}$ n'a pu, pour l'élément considéré, demeurer sans cesse très petit de l'instant t à l'instant t'.

En effet, nous avons à l'instant t', pour l'élément considéré,

$$P' - \rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial \rho'} = \frac{\lambda(\rho', T')}{\rho'} \frac{d\rho'}{dt'}. \tag{22 bis}$$

Si, à l'instant t', $\frac{d\rho'}{dt'}$ a une valeur notable, la proposition est démontrée, il nous reste donc à examiner le cas où $\frac{d\rho'}{dt'}$ a une très petite valeur, cas auquel $\frac{\lambda(\rho', T')}{\rho'} \frac{d\rho'}{dt'}$ a aussi une très petite valeur que nous désignerons par ε'.

Les égalités (22 *bis*) et (34) nous donnent

$$P' - P + \rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial \rho'} - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = \varepsilon' - \varepsilon.$$

D'ailleurs, T' différant très peu de T, et $\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \, \partial T}$ n'étant jamais extrêmement grand, $\rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial \rho'}$ diffère extrêmement peu de $\rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'}$. Si donc nous désignons par η une très petite grandeur, l'égalité précédente devient

$$P' - P + \rho'^2 \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'} - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = \eta$$

ou bien

$$P' - P + \int_t^{t'} \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho}\right] \frac{d\rho}{dt} dt = \eta.$$

η a une valeur très petite;

$(P' - P)$ a une valeur notable;

$\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho}\right]$ n'a une valeur très grande que pour un fluide très peu compressible, ce qui n'a pas lieu dans le cas étudié;

par hypothèse, $(t' - t)$ n'est pas extrêmement grand;

l'égalité précédente ne saurait avoir lieu si, entre les instants t et t', $\frac{d\rho}{dt}$ était demeuré toujours très petit.

Notre théorème est donc établi.

§ 2. — Extension des résultats précédents aux corps habituellement nommés fluides visqueux. — Comparaison avec les faits d'expérience.

Il n'est pas malaisé d'étendre les considérations précédentes aux corps que l'on nomme habituellement *fluides visqueux;* il suffit, en effet, de suivre la voie qui a été indiquée au Paragraphe 4 du Chapitre précédent. A l'égalité (22) nous devrons substituer l'égalité

$$P - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - \frac{3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{35}$$

qui est la forme prise par l'égalité (31) lorsque les actions sont newtoniennes; cette égalité (35) se discutera d'ailleurs comme l'égalité (22); elle nous montrera encore que, en un fluide dont l'état diffère très peu de l'état critique, la densité de chaque masse élémentaire ne varie qu'avec une extrême lenteur.

Si donc on étudie le mouvement du fluide pendant un laps de temps de peu de durée, on pourra regarder la densité de chacune des masses élémentaires comme sensiblement constante; le fluide se mouvra à peu près comme un fluide hétérogène et incompressible; mais ce dernier fluide, au lieu d'être dénué de viscosité comme il arrivait au Paragraphe précédent, sera ici un fluide visqueux; il sera inutile d'ajouter que les actions de viscosité vérifient, au sein de ce dernier fluide, l'hypothèse de Stokes, car en un fluide incompressible les équations de la viscosité sont indépendantes de la relation qui peut exister entre les fonctions $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$.

Le *modèle* qui nous a servi à *illustrer* le mouvement d'un fluide compressible

dont l'état avoisine l'état critique peut encore être employé, mais il doit être complété; nous devons supposer que notre dissolution mal mélangée et à diffusion lente est, en outre, une dissolution visqueuse. Ainsi complété, ce modèle fournit une image saisissante des stries et des traînées qui apparaissent, en un fluide, au voisinage de l'état critique.

De nombreux observateurs ont remarqué ces stries et ces traînées, ont étudié les états de quasi-équilibre que manifeste un fluide placé en des circonstances peu différentes des conditions critiques, ont remarqué l'extrême lenteur avec laquelle s'établissait l'équilibre proprement dit. Sans détailler tous les faits d'expérience qui ont été signalés, bornons nous à citer ceux qui les ont le plus soigneusement notés : ce sont MM. Cailletet et Colardeau (1), M. de Heen (2); le prince Boris Galitzine, soit seul (3), soit en collaboration avec M. J. Wilip (4); M. Gouy (5), M. F.-V. Dwelshauvers-Déry (6), M. Traube (7). Parmi ces nombreux travaux, ceux de M. Gouy méritent une mention spéciale; seuls, ils ont nettement mis en évidence la notion de *quasi-équilibre*.

Ces phénomènes ont donné lieu à des interprétations diverses et parfois assez étranges. Dès 1898 (8), nous avions indiqué sommairement les principes que nous venons de développer et qui nous paraissent rendre un compte satisfaisant des particularités que présente un fluide au voisinage de l'état critique; mais nous avions cru nécessaire de supposer que $\lambda(\rho, T)$ devenait infini au point critique; on voit, par ce qui précède, que cette supposition est inutile; pour que nos raisonnements vaillent, il suffit que $\lambda(\rho, T)$ (au § 1) ou que $[3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)]$ (au § 2) ne s'annule pas au point critique.

---

(1) CAILLETET et COLARDEAU, *Journal de Physique*, 2e série, t. VIII, 1889, p. 389. — *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XVIII, 1889, p. 269.

(2) DE HEEN, *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, 3e série, t. XXIV, 1892, p. 267. — *Les légendes du point critique*, Liége, 1901. — *Les dernières mésaventures du point critique*, Liége, 1901.

(3) BORIS GALITZINE, *Wiedemann's Annalen*, Bd. L, 1893, p. 251.

(4) BORIS GALITZINE et J. WILIP, *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XI, n° 3. — *Rapports présentés au Congrès international de Physique*, t. I, Paris, 1900, p. 668.

(5) GOUY, *Comptes rendus*, t. CXVI, 1893, p. 1289.

(6) F.-V. DWELSHAUVERS-DÉRY, *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, 3e série, t. XXX, 1895, p. 570.

(7) TRAUBE, *Drude's Annalen*, Bd. VIII, 1902, p. 267. — On trouvera un exposé très complet de ces recherches et des théories, distinctes de la présente explication, auxquelles elles ont donné lieu dans : E. MATHIAS, *Le point critique des corps purs*, Paris, 1904. Chapitre X.

(8) *Traité élémentaire de Mécanique chimique fondée sur la Thermodynamique*, t. II, 1898, p. 163.

Il ne paraît pas que notre explication ait été remarquée de la plupart des physiciens; ceux, en petit nombre, qui l'ont remarquée, ne semblent pas l'avoir comprise; ils ont cru y voir une *viscosité d'un nouveau genre* et l'ont considérée comme étant en désaccord avec la théorie générale de la viscosité; bien au contraire, elle est une conséquence nécessaire de cette théorie; elle ne heurte même pas l'opinion des physiciens qui, sur la foi de la théorie cinétique des gaz, regarderaient la relation de Stokes

$$3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) = 0 \tag{4}$$

comme exacte pour les gaz parfaits.

NOTE.

SUR LA VISCOSITÉ ET LE FROTTEMENT AU CONTACT DE DEUX LIQUIDES PARFAITS (1).

Au Paragraphe 2 du Chapitre II de la cinquième Partie, nous avons établi le théorème suivant :

Un fluide parfait, c'est-à-dire dénué de toute viscosité interne, ne peut, en général, être affecté ni de viscosité, ni de frottement au contact d'une paroi solide.

Nous nous proposons de montrer ici que, *au contact de deux liquides parfaits, il ne peut, en général, se manifester ni viscosité, ni frottement.*

En effet, si la viscosité et le frottement n'étaient pas nuls tous deux le long de la surface par laquelle un fluide parfait confine à un autre fluide, visqueux ou parfait, les deux fluides seraient *soudés* l'un à l'autre le long de la surface de contact (*Recherches*, IVe Partie, Chap. II, § 2); chacune des trois composantes de la vitesse demeurerait continue au travers de cette surface.

Cela posé, considérons deux fluides parfaits et incompressibles 1 et 2, se touchant le long de la surface S; supposons que, jusqu'à l'instant $t = 0$, ces deux fluides soient en équilibre sous l'action de certaines forces extérieures dérivant d'une fonction potentielle; la surface S coïncide alors avec une certaine surface d'égal niveau potentiel.

(1) *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 19 février 1903.

A l'instant $t = 0$, mettons le système en mouvement sans imprimer à aucun élément matériel une variation brusque de vitesse. Le théorème de Lagrange s'appliquera à chacun de nos deux liquides; chacun d'eux admettra une fonction potentielle des vitesses, que nous désignerons par φ_1 pour le fluide 1, et par φ_2 pour le fluide 2. Les composantes de la vitesse seront, au sein du fluide 1,

$$(1) \qquad u_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \qquad v_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \qquad w_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$$

et, au sein du fluide 2,

$$(1\ bis) \qquad u_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \qquad v_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \qquad w_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}.$$

Au sein du fluide 1, la fonction φ_1 vérifiera la condition

$$(2) \qquad \Delta \varphi_1 = 0,$$

tandis que, au sein du fluide 2, la fonction φ_2 vérifiera la condition

$$(2\ bis) \qquad \Delta \varphi_2 = 0.$$

Les deux fluides ne devant, le long de la surface S, ni se compénétrer, ni se séparer l'un de l'autre, on devra avoir, en tout point de cette surface et à tout instant,

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} = 0,$$

n_1, n_2 étant les deux demi-normales à la surface S, respectivement dirigées vers l'intérieur des fluides 1 et 2.

Soit θ une direction quelconque tangente, à l'instant t, à la surface S. La condition nécessaire et suffisante pour que, à cet instant, les deux fluides ne glissent pas l'un sur l'autre, s'exprime par l'égalité

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} = 0.$$

Cette égalité exprime que, à l'instant considéré t, la différence $(\varphi_2 - \varphi_1)$ a même valeur en tout point de la surface S. En d'autres termes, le long de la surface de contact des deux fluides, la différence $(\varphi_2 - \varphi_1)$ a une valeur qui dépend seulement de t :

$$(4) \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = f(t).$$

Mais, à la fonction φ_1, je puis, comme fonction potentielle des vitesses du

fluide 1, substituer la fonction $\varphi_1 + f(t)$, que je désignerai maintenant par φ_1. Les égalités (1), (1 *bis*), (2), (2 *bis*) et (3) subsistent, tandis que l'égalité (4) devient

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{5}$$

Les égalités (2), (2 *bis*), (3) et (5) nous enseignent, selon un théorème bien connu, que *les deux fonctions potentielles* φ_1, φ_2 *forment une fonction analytique unique* φ *dans toute l'étendue du volume occupé par les deux fluides* 1 *et* 2. En d'autres termes, *le mouvement du système sera le même que si ce volume était occupé par un fluide unique ayant partout même densité.* .

Il est clair, sans aucun calcul, que cette conclusion est inadmissible. Nous en serons encore mieux convaincus par un exemple.

Supposons que les deux fluides remplissent en entier un vase clos; soient U, V, W les composantes de la vitesse d'un point M, pris sur la surface interne de la paroi; soit n la normale à cette surface dirigée vers l'intérieur du fluide. Nous aurons, en tout point de la paroi,

$$U\cos(n, x) + V\cos(n, y) + W\cos(n, z) + \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \tag{6}$$

en même temps que nous aurons, en tout point de l'espace que cette paroi circonscrit,

$$\Delta\varphi = 0. \tag{7}$$

Si, pour tout point M de la surface de la paroi et pour tout instant t, on se donne U, V, W, les égalités (6) et (7) déterminent la fonction φ à une fonction près de t et, par conséquent, déterminent complètement le mouvement des deux fluides.

Supposons que le mouvement imprimé au vase se réduise à une translation, d'ailleurs quelconque :

$$U = \xi(t), \qquad V = \eta(t), \qquad W = \zeta(t).$$

Les égalités (6) et (7) nous donneraient

$$\varphi = -[\xi(t)x + \eta(t)y + \zeta(t)z] + \psi(t),$$

$\psi(t)$ étant une fonction arbitraire de t, et ce serait la seule forme possible de φ, en sorte que toutes les parties du fluide subiraient la même translation que la paroi.

Or, on peut choisir les fonctions $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ qui sont, jusqu'ici, entière-

ment arbitraires, de telle sorte que, tout en demeurant continues, elles s'annulent à partir de l'instant $t = t_1$, tandis que les trois quantités

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \xi(t)\,dt, \qquad B = \int_{t_0}^{t_1} \eta(t)\,dt, \qquad C = \int_{t_0}^{t_1} \zeta(t)\,dt$$

auront telles valeurs que l'on voudra. A partir de cet instant t_1, le fluide sera en équilibre; la surface S, qui aura subi une simple translation de composantes A, B, C, devra, à l'instant $t = t_1$, coïncider avec une surface d'égal niveau potentiel.

On parviendrait donc à la conclusion suivante : *Si des forces dérivent d'une fonction potentielle, une portion quelconque d'une surface d'égal niveau potentiel se trouve encore, après une translation quelconque, sur une surface d'égal niveau potentiel.*

Visiblement, cette conclusion est absurde.

SUR UN PROBLÈME

RELATIF A LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE,

PAR M. É. GOURSAT.

Étant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes,

(E) $$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

le problème classique, appelé généralement *problème de Cauchy,* consiste à déterminer une intégrale $z = \Phi(x, y)$, de telle façon que la surface S, représentée par cette équation, passe par une courbe donnée Γ et admette en chaque point de cette courbe un plan tangent déterminé. L'étude de ce problème conduisait tout naturellement à se poser la question plus générale suivante : *Déterminer une surface intégrale de l'équation* (E), *passant par deux courbes données.* Les premières recherches dans cette voie paraissent dues à M. Darboux, auquel on doit la proposition suivante ([1]) :

Étant donnée l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

dont les coefficients a, b, c sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de $x - x_0$, $y - y_0$, il existe une solution de l'équation aux dérivées partielles se réduisant, pour $y = y_0$, à une fonction déterminée $\varphi(x)$ de x, développable suivant les puissances de $x - x_0$, et

([1]) *Leçons sur la Théorie des surfaces,* t. II, 1889, p. 92.

pour $x = x_0$, à une fonction $\psi(y)$ de y, développable suivant les puissances de $y - y_0$.

En restant dans le domaine des fonctions analytiques et en supposant réalisées les conditions habituelles relatives à la convergence des séries entières employées, je démontrais quelques années plus tard que par deux courbes Γ, Γ_1 ayant un point commun O, sans être tangentes en ce point, on pouvait toujours faire passer une surface intégrale et une seule, *pourvu que ces courbes soient tangentes respectivement aux deux directions caractéristiques de l'élément qu'elles déterminent* (1).

Ce théorème avait de nombreuses et importantes conséquences pour la théorie des caractéristiques. Peu après, une modification bien simple de la démonstration primitive me permettait d'étendre la conclusion au cas où *une seule des courbes* Γ, Γ_1 *est tangente à une direction caractéristique* (2).

L'extension de la méthode et des résultats à des cas plus généraux, en conservant l'hypothèse fondamentale ou une hypothèse analogue, ne présentait pas des difficultés bien sérieuses. Parmi les différentes applications ou généralisations, je citerai celles que l'on doit à MM. Beudon (3), Le Roux (4), Hadamard (5), Riquier (6).

Je dois rappeler aussi que M. Picard a traité les mêmes problèmes pour une équation de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$ au moyen d'approximations successives, et en faisant le minimum d'hypothèses sur la fonction f et sur les conditions initiales (7).

Il restait donc à traiter le cas général où aucune des deux courbes données Γ, Γ_1 n'est tangente à une direction caractéristique. La solution complète paraît offrir des difficultés beaucoup plus grandes que les cas particuliers déjà connus. J'ai montré le rôle important que joue dans cette question le rapport anharmonique des tangentes aux deux courbes données Γ_1 Γ_1, et des tangentes caractéristiques

(1) *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Comptes rendus*, t. CXX, 1er avril 1895). — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, Chap. IV.

(2) *Sur la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles, par certaines conditions initiales* (*Comptes rendus*, t. CXXV; 2 novembre 1897). — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t.II, Chap. X.

(3) *Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXV, p. 116.

(4) *Journal de Mathématiques*, t. VI, 5e série, p. 397.

(5) *Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXIX, p. 60. — *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, 1903 (*passim*).

(6) *Acta Mathematica*, t. XXIII; 1900.

(7) Note du Tome IV des *Leçons sur la Théorie des surfaces* de M. Darboux, 1896.

issues du point O dans l'élément déterminé par les tangentes aux deux courbes [1]. Le présent travail est consacré à l'étude du problème pour une équation de la forme

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

les coefficients A, B, C ne dépendant que des variables x et y.

En me bornant d'abord aux solutions analytiques, et *en supposant les courbes données réelles,* je montre que les résultats obtenus sont absolument différents suivant que l'équation proposée appartient au type hyperbolique ou au type elliptique. Tandis que toute équation du type hyperbolique admet une intégrale passant par deux courbes réelles données ayant un point commun O sans être tangentes en ce point (sauf dans un cas exceptionnel), la méthode employée est impuissante à établir le même théorème pour une équation du type elliptique dans le cas le plus général.

Dans un second Mémoire, j'étudierai le même problème pour une équation du type hyperbolique $s=f(x, y, z, p, q)$, en faisant le minimum d'hypothèses sur les conditions aux limites. Les principaux résultats de ce travail et de celui qui le suivra ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 8 juin 1903).

1. Étant donnée une variable complexe x, nous appellerons domaine $\mathfrak{D}(R)$ l'ensemble des valeurs de x dont le module est inférieur à R. Une fonction $f(x)$, holomorphe dans ce domaine, est développable en une série entière ordonnée suivant les puissances positives de x et convergente pour tous les points de ce domaine. Si le module de $f(x)$ reste inférieur à un nombre fixe μ dans $\mathfrak{D}(R)$, le module du coefficient c_n de x^n dans cette série satisfait à l'inégalité

$$|c_n| \leqq \frac{\mu}{r^n},$$

r étant un nombre positif quelconque, *inférieur* à R. On en déduit

$$r \leqq \sqrt[n]{\frac{\mu}{|c_n|}},$$

et cette inégalité doit être vérifiée par tous les nombres inférieurs à R, ce qui exige que l'on ait aussi

$$R \leqq \sqrt[n]{\frac{\mu}{|c_n|}},$$

---

(1) *Sur un problème relatif à la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles* (*Comptes rendus,* t. CXXI, 11 novembre 1895, p. 671).

ou

$$|c_n| \leqq \frac{\mu}{R^n}.$$

La fonction $\dfrac{\mu}{1-\dfrac{x}{R}}$ est donc une fonction majorante pour $f(x)$, et cette conclusion n'exige pas que la fonction $f(x)$ reste continue sur le cercle C de rayon R qui limite le domaine $\mathfrak{D}(R)$.

Soient de même x et y deux variables complexes indépendantes. Nous appellerons domaine $\mathfrak{D}(R, R')$ l'ensemble des systèmes de valeurs de x et de y qui satisfont aux inégalités

$$|x| < R, \qquad |y| < R'.$$

Si une fonction $f(x, y)$ est holomorphe dans ce domaine, et si $|f(x, y)|$ reste inférieur dans $\mathfrak{D}(R, R')$ à un nombre fixe μ, on voit comme tout à l'heure qu'elle admet comme fonction majorante la fonction

$$\frac{\mu}{\left(1-\dfrac{x}{R}\right)\left(1-\dfrac{y}{R'}\right)}.$$

En effet, soit c_{mn} le coefficient de $x^m y^n$ dans le développement de $f(x, y)$. On a toujours, en désignant par r et r' deux nombres positifs, inférieurs à R et à R' respectivement,

$$|c_{mn}| \leqq \frac{\mu}{r^m r'^n},$$

ce qui peut encore s'écrire, en posant $r = R - \varepsilon$, $r' = R' - \varepsilon'$,

$$(R-\varepsilon)^m (R'-\varepsilon')^n \leqq \frac{\mu}{|c_{mn}|}.$$

Cette inégalité ne peut avoir lieu, aussi petits que soient les nombres positifs ε, ε', que si l'on a aussi

$$R^m R'^n \leqq \frac{\mu}{|c_{mn}|}$$

ou

$$|c_{mn}| \leqq \frac{\mu}{R^m R'^n};$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

2. Soit $\pi(x)$ une fonction de la variable complexe x, holomorphe dans un cercle C de rayon R décrit de l'origine pour centre. Proposons-nous de *déter-*

miner une autre fonction $\varphi(x)$, *holomorphe dans le voisinage de l'origine, et satisfaisant à la relation*

$$\varphi(\alpha x) - \varphi(x) = \pi(x), \tag{1}$$

où α *est une constante donnée, dont le module est différent de l'unité.*

Il est permis de supposer $|\alpha| > 1$, car si l'on change x en $\frac{x}{\alpha}$ dans la relation précédente elle devient

$$\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \varphi(x) = -\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right); \tag{2}$$

c'est une relation de même forme que la première, et qui s'en déduit en remplaçant α par $\frac{1}{\alpha}$, et $\pi(x)$ par $-\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Or, si l'on a $|\alpha| < 1$, il est clair qu'inversement $\left|\frac{1}{\alpha}\right|$ est > 1.

Cela posé, soient

$$\pi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{3}$$

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{4}$$

les développements en séries entières de la fonction donnée $\pi(x)$ et de la fonction inconnue $\varphi(x)$.

En remplaçant $\varphi(x)$, $\varphi(\alpha x)$ et $\pi(x)$ par leurs développements dans la relation (1), et en identifiant les deux membres, on obtient une infinité de conditions que l'on peut écrire

$$c_n(\alpha^n - 1) = a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty). \tag{5}$$

La première de ces conditions, qui correspond à $n = 0$, se réduit à $a_0 = 0$. Le terme indépendant de x dans $\pi(x)$ doit donc être nul pour que le problème soit possible, ce qui était évident *a priori*, et le coefficient c_0 de $\varphi(x)$ reste arbitraire. Si $n > 1$, le coefficient c_n est déterminé et a pour expression

$$c_n = \frac{a^n}{\alpha^n - 1}. \tag{6}$$

La fonction cherchée $\varphi(x)$ est donc déterminée à une constante près. Pour fixer les idées, nous supposerons $\varphi(0) = 0$; nous avons alors

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{\alpha^n - 1}. \tag{7}$$

La série ainsi obtenue est convergente dans le cercle de rayon $R|\alpha|$ ayant pour centre l'origine.

En effet, soit r un nombre positif inférieur à R, et soit M un nombre positif supérieur à tous les produits $|a_n| r^n$. La série (7) admet pour fonction majorante la fonction

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M x^n}{r^n(|\alpha|^n - 1)}, \tag{8}$$

car on a toujours

$$|\alpha^n - 1| \geqq |\alpha|^n - 1.$$

Cette série (8) est convergente pourvu que l'on ait $|x| < r|\alpha|$, car si l'on pose $x = r|\alpha| z$, la nouvelle série

$$\sum \frac{M|\alpha|^n}{|\alpha|^n - 1} z^n$$

admet pour cercle de convergence le cercle de rayon *un* ayant pour centre l'origine, le rapport $\frac{|\alpha|^n}{|\alpha|^n - 1}$ ayant pour limite l'unité lorsque n croît indéfiniment. Le nombre r pouvant être pris aussi voisin de R qu'on le voudra, il s'ensuit que la série (7) est convergente dans le cercle C' de rayon $R|\alpha|$ décrit de l'origine pour centre. Elle ne peut être convergente dans un cercle de rayon supérieur à $R|\alpha|$; autrement $\varphi(\alpha x) - \varphi(x)$, et par suite $\pi(x)$, serait une fonction holomorphe dans un cercle de rayon plus grand que R, contrairement à l'hypothèse. La relation (1) est donc vérifiée par la fonction obtenue $\varphi(x)$ pour toutes les valeurs de x de module inférieur à R.

En résumé, *pour que le problème proposé admette une solution, il faut et il suffit que l'on ait* $\pi(0) = 0$. *Toutes les fonctions répondant à la question s'obtiennent en ajoutant une constante arbitraire à la fonction* $\varphi(x)$ *définie par la série* (7).

3. Les calculs précédents ne s'appliquent plus lorsque l'on a $|\alpha| = 1$. Nous avons encore deux cas à distinguer suivant que α est racine de l'unité ou n'est pas racine de l'unité. Supposons α racine de l'unité et soit m le plus petit nombre entier positif tel que $\alpha^m = 1$. Les relations (5) font connaître c_n lorsque n n'est pas multiple de m, mais si $n = pm$, le coefficient de c_n est nul et la relation (5) se réduit à $a_n = 0$. Le problème n'est donc possible que si tous les coefficients a_{pm} de $\pi(x)$ sont nuls. Lorsqu'il en est ainsi, la série $\varphi(x)$ obtenue en supposant nuls tous les coefficients c_{pm} est encore convergente dans le cercle C de rayon R. Il suffit de reprendre le raisonnement qui précède en observant que $\frac{1}{\alpha^n - 1}$ ne peut

prendre que $m - 1$ valeurs différentes lorsque n n'est pas un multiple de m. En ajoutant à cette fonction $\varphi(x)$ une série entière en x^m, soit $\psi(x^m)$, convergente dans le voisinage de l'origine, on obtient encore une fonction vérifiant la relation (1). Le problème admet donc une infinité de solutions lorsque tous les coefficients de $\pi(x)$ dont l'indice est un multiple de m, y compris a_0, sont nuls.

Par exemple, si $\alpha = -1$, l'équation

$$\varphi(-x) - \varphi(x) = \pi(x)$$

n'admet de solutions que si $\pi(x)$ est une fonction impaire et, dans ce cas, elle en admet une infinité.

Lorsque α n'est pas racine de l'unité, $|\alpha|$ étant égal à un, les équations (5) déterminent encore les coefficients c_n, si l'on a $a_0 = 0$. Mais la méthode précédente ne suffit pas pour décider si la série obtenue est convergente, car la limite inférieure de $|\alpha^n - 1|$ est égale à zéro.

Soit $\alpha = e^{\theta i}$, le rapport $\frac{\theta}{\pi}$ étant incommensurable. La relation (5) donne

$$c_n = \frac{a_n}{e^{n\theta i} - 1} = \frac{a_n}{2i\sin\frac{n\theta}{2}\left\{\cos\frac{n\theta}{2} + i\sin\frac{n\theta}{2}\right\}}.$$

Pour savoir si la série $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence différent de zéro, il suffit d'examiner si *la plus grande des limites* de $\sqrt[n]{|c_n|}$, ou de

$$\frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{\left|\sin\frac{n\theta}{2}\right|}},$$

a une valeur finie. Nous supposerons que la plus grande des limites de $\sqrt[n]{|a_n|}$ est égale à L, et que la plus petite des limites de $\sqrt[n]{|a_n|}$ est un nombre *positif l*, de sorte que, à partir d'une valeur assez grande de n, $\sqrt[n]{|a_n|}$ restera compris entre deux nombres positifs m et M. C'est un cas qui se présente fréquemment dans la pratique.

Cela posé, soit μ la plus petite des limites de $\sqrt[n]{\left|\sin\frac{n\theta}{2}\right|}$. Si $\mu = 0$, la série $\sum c_n x^n$ est toujours divergente, sauf pour $x = 0$. En effet, ε étant un nombre positif arbitraire, on a, pour une infinité de valeurs de n,

$$\sqrt[n]{\left|\sin\frac{n\theta}{2}\right|} < \varepsilon \quad \text{ou} \quad \left|\sin\frac{n\theta}{2}\right| < \varepsilon^n.$$

D'autre part, on a, pour ces valeurs de n,

$$\sqrt[n]{|a_n|} > m \qquad \text{ou} \qquad |a_n| > m^n.$$

Le module $|c_n|$ est donc supérieur à $\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^n$ pour une infinité de valeurs de n, aussi petit que soit ε. La série $\sum c_n x^n$ est donc divergente, sauf pour $x = 0$.

Au contraire, si μ est positif, à partir d'une valeur de n assez grande, on aura

$$\sqrt[n]{\left|\sin\frac{n\theta}{2}\right|} > \mu' > 0,$$

μ' étant un nombre positif inférieur à μ. Comme on a, d'autre part,

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \mathrm{M},$$

pourvu que n soit supérieur à un nombre N, on voit qu'à partir d'un certain rang l'on a toujours

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{\mathrm{M}}{\mu'} \qquad \text{et} \qquad |c_n| < \left(\frac{\mathrm{M}}{\mu'}\right)^n.$$

La série $\sum c_n x^n$ sera donc certainement convergente si l'on a

$$|x| < \frac{\mu'}{\mathrm{M}}.$$

Dans le cas général considéré, on voit que la conclusion dépend uniquement de la plus petite des limites de l'expression $\sqrt[n]{\left|\sin\frac{n\theta}{2}\right|}$, c'est-à-dire de l'angle θ, et non de la série donnée $\pi(x)$.

Les remarques suivantes, que je dois à M. Hadamard, permettent de trouver aisément des valeurs de ω pour lesquelles la plus petite des limites de $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$ est égale à zéro, et d'autres pour lesquelles il n'en est pas ainsi.

1° Supposons que l'incommensurable $\frac{\omega}{\pi}$ soit un nombre algébrique de degré d. D'après un théorème dû à Liouville, on a, n et k étant deux nombres entiers quelconques tels que la fraction $\frac{k}{n}$ soit comprise dans un intervalle (α, β) renfermant $\frac{\omega}{\pi}$, l'inégalité

$$(e) \qquad \left|n\frac{\omega}{\pi} - k\right| > \frac{\mathrm{A}}{n^{d-1}},$$

A étant un nombre fixe qui ne dépend que de l'intervalle (α, β). A tout nombre

entier positif n faisons correspondre le nombre entier k compris entre $n\frac{\omega}{\pi} - \frac{1}{2}$ et $n\frac{\omega}{\pi} + \frac{1}{2}$, de façon que l'on ait

$$n\frac{\omega}{\pi} - \frac{1}{2} < k < n\frac{\omega}{\pi} + \frac{1}{2},$$

et par suite

$$\frac{\omega}{\pi} - \frac{1}{2n} < \frac{k}{n} < \frac{\omega}{\pi} + \frac{1}{2n}.$$

La fraction $\frac{k}{n}$ est donc comprise dans l'intervalle $\left(\frac{\omega}{\pi} - \frac{1}{2}, \frac{\omega}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$, et le nombre A qui figure dans l'inégalité (e) est fixé par là même. D'après la façon dont on choisit le nombre k, on a

$$\frac{A}{n^{d-1}} < \left| n\frac{\omega}{\pi} - k \right| < \frac{1}{2}$$

ou

$$\frac{A\pi}{n^{d-1}} < | n\omega - k\pi | < \frac{\pi}{2};$$

on en déduit que l'on a aussi

$$|\sin n\omega| > \sin\left(\frac{A\pi}{n^{d-1}}\right).$$

Lorsque n augmente indéfiniment, $\frac{A\pi}{n^{d-1}}$ tend vers zéro; à partir d'une valeur de n assez grande, on aura donc, λ étant un nombre positif inférieur à l'unité,

$$|\sin n\omega| > \frac{\lambda A\pi}{n^{d-1}}$$

et, par suite,

$$\sqrt[n]{|\sin n\omega|} > \frac{\sqrt[n]{\lambda A\pi}}{n^{\frac{d-1}{n}}}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, $n^{\frac{d-1}{n}}$ tend vers l'unité (car son logarithme tend vers zéro); comme $|\sin n\omega|$ est < 1, on en conclut que $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$ a pour limite l'unité.

Lorsque $\frac{\omega}{\pi}$ est un nombre algébrique non rationnel, la série $\sum \frac{a_n}{\sin n\omega} x^n$ a donc le même rayon de convergence que la série $\sum a_n x^n$.

La même propriété a lieu pour une infinité de nombres transcendants. On sait,

en effet, qu'il existe une infinité de nombres transcendants α tels que l'on ait

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \frac{1}{10\,000\,q^2},$$

quels que soient les nombres entiers p et q (¹). Si le rapport $\frac{\omega}{\pi}$ est égal à un de ces nombres transcendants, les raisonnements qui précèdent s'appliquent sans modification, et l'expression $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$ a pour limite l'unité.

2° Pour que la plus petite des limites de $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$ soit zéro, il faut et il suffit que l'on ait, pour une infinité de valeurs de n,

$$(e') \qquad \left|n\frac{\omega}{\pi} - k\right| < \varepsilon^n,$$

k étant entier et ε désignant un nombre positif arbitraire. On déduit en effet de cette inégalité, en supposant $\varepsilon < \frac{1}{2}$,

$$|\sin n\omega| < \sin(\pi\varepsilon^n) < \pi\varepsilon^n$$

et par suite

$$\sqrt[n]{|\sin n\omega|} < \varepsilon\pi^{\frac{1}{n}}.$$

Supposons $\omega > 0$; si l'incommensurable $\frac{\omega}{\pi}$ est réduit en fraction continue, on a

$$\left|q_\lambda\frac{\omega}{\pi} - p_\lambda\right| < \frac{1}{q_{\lambda+1}},$$

$\frac{p_\lambda}{q_\lambda}$ et $\frac{p_{\lambda+1}}{q_{\lambda+1}}$ étant deux réduites consécutives. Pour que l'inégalité (e') ait lieu pour une infinité de valeurs de n, aussi petit que soit ε, il suffira que l'on ait, pour une infinité de valeurs de l'entier λ,

$$q_{\lambda+1} > A^{q_\lambda},$$

A étant une fonction de λ qui augmente indéfiniment avec λ. On peut évidemment satisfaire à cette condition d'une infinité de manières. Il y a donc une infinité de nombres transcendants β tels que, si l'on pose $\omega = \pi\beta$, la plus petite des limites de $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$ soit égale à zéro. On voit aisément qu'il existe une infinité de nombres transcendants de cette espèce dans tout intervalle.

Pour ces valeurs de ω, la série

$$\sum \frac{a_n}{\sin n\omega} x^n$$

(¹) E. BOREL, *Leçons sur la Théorie des fonctions*, p. 32.

sera divergente, sauf pour $x = 0$, si, à partir d'une valeur assez grande de n, $\sqrt[n]{|a_n|}$ reste supérieur à un nombre fixe $m > 0$.

4. Nous avons encore à traiter deux problèmes préliminaires analogues au premier.

Soit $F(x, y)$ *une fonction holomorphe des variables indépendantes* x *et* y *dans le domaine du point* $x = 0$, $y = 0$. *Déterminer une fonction holomorphe* $\varphi(x)$ *de la variable* x, *et une fonction holomorphe* $\psi(y)$ *de la variable* y, *de telle façon que la fonction*

$$z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$$

se réduise identiquement à zéro quand on y remplace y *par* x *ou par* αx, α *étant une constante dont le module est différent de l'unité.*

Supposons, pour fixer les idées, $|\alpha| > 1$. Choisissons un nombre positif R assez petit pour que la fonction $F(x, y)$ soit holomorphe dans le domaine $\mathcal{D}(R, |\alpha|R)$ ou, plus simplement, $\mathcal{D}(R)$, défini par les inégalités

$$|x| < R, \qquad |y| < R|\alpha|,$$

et que $|F(x, y)|$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|$ restent inférieurs respectivement à trois nombres fixes μ, μ_1, μ_2, lorsque les variables x et y satisfont aux inégalités précédentes. Les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \qquad \psi(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n y^n,$$

doivent satisfaire aux deux équations de condition

$$(9) \qquad F(x, x) \quad + \varphi(x) + \psi(x) \quad = 0,$$

$$(10) \qquad F(x, \alpha x) + \varphi(x) + \psi(\alpha x) = 0.$$

Soient

$$(11) \qquad F(x, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad F(x, \alpha x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n;$$

lorsque l'on a $|x| < R$, $|\alpha x|$ est $< R|\alpha|$, et les deux fonctions $F(x, x)$, $F(x, \alpha x)$ de la seule variable x sont holomorphes dans le cercle C de rayon R décrit de l'origine comme centre. De plus, le module de chacune de ces fonctions

reste inférieur à μ, et l'on a, par conséquent (n° 1),

$$(12) \qquad |a_n| \leqq \frac{\mu}{R^n}, \qquad |b_n| \leqq \frac{\mu}{R^n}.$$

Les conditions (9) et (10) développées conduisent aux relations suivantes, pour déterminer les coefficients inconnus c_n et d_n,

$$c_n + d_n + a_n = 0, \qquad c_n + d_n \alpha^n + b_n = 0.$$

On a évidemment

$$a_0 = F(0, 0) = b_0,$$

et, pour $n = 0$, les deux relations précédentes se réduisent à une seule

$$c_0 + d_0 + a_0 = 0.$$

Or, on ne change pas le problème en retranchant de $F(x, y)$ une constante arbitraire K, à condition d'ajouter à $\varphi(x)$ et à $\psi(y)$ deux autres constantes dont la somme est égale à K. Pour achever de préciser le problème, nous supposerons que les trois fonctions $F(x, y)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$ sont nulles pour $x = y = 0$; on aura donc

$$c_0 = d_0 = 0.$$

Pour $n > 0$, les coefficients c_n et d_n ont les valeurs suivantes :

$$(13) \qquad c_n = \frac{b_n - a_n \alpha^n}{\alpha^n - 1}, \qquad d_n = \frac{a_n - b_n}{\alpha^n - 1}.$$

D'après les formules (12), on a

$$|c_n| \leqq \frac{\mu}{R^n} \frac{|\alpha|^n + 1}{|\alpha|^n - 1}, \qquad |b_n| \leqq \frac{2\mu}{R^n \{|\alpha|^n - 1\}}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, les deux expressions $\frac{|\alpha|^n + 1}{|\alpha|^n - 1}$ et $\frac{|\alpha|^n}{|\alpha|^n - 1}$ tendent vers l'unité puisque nous avons supposé $|\alpha| > 1$. Soit K un nombre positif satisfaisant aux deux conditions

$$\frac{|\alpha|^n + 1}{|\alpha|^n - 1} < K, \qquad \frac{2|\alpha|^n}{|\alpha|^n - 1} < K,$$

pour toutes les valeurs positives du nombre entier n.

Les séries $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ admettent respectivement pour fonctions majorantes

les deux séries

$$(14)\qquad \Phi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mu K}{R^n}x^n,\qquad \Psi(y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mu K}{R^n|\alpha|^n}y^n.$$

La série $\varphi(x)$ est donc convergente dans le cercle de rayon R, et la série $\psi(y)$ dans le cercle de rayon $R|\alpha|$, et la fonction obtenue

$$z=F(x,y)+\varphi(x)+\psi(y)$$

est holomorphe dans le même domaine $\mathcal{D}$ que la fonction $F(x,y)$.

5. Nous aurons besoin pour la suite d'avoir des limites supérieures des modules de ces deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(y)$, et de leurs dérivées $\varphi'(x)$, $\psi'(y)$, dans les domaines précédents. On les obtient aisément, en tenant compte des relations (9) et (10).

Supposons d'abord

$$|x|\leqq\frac{R}{|\alpha|};$$

on a évidemment

$$|\varphi(x)|<\Phi\left(\frac{R}{|\alpha|}\right),$$

c'est-à-dire

$$|\varphi(x)|<\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mu K}{|\alpha|^n}=\frac{\mu K}{|\alpha|-1}.$$

D'autre part, si nous changeons x en αx dans l'équation (9), elle devient

$$F(\alpha x,\alpha x)+\varphi(\alpha x)+\psi(\alpha x)=0,$$

et cette relation a lieu pourvu que l'on ait

$$|\alpha x|<R\qquad\text{ou}\qquad |x|<\frac{R}{|\alpha|}.$$

En retranchant l'équation (10) de cette nouvelle relation, il vient

$$\varphi(\alpha x)=\varphi(x)+F(x,\alpha x)-F(\alpha x,\alpha x).$$

Lorsque $|x|$ est $<\frac{R}{|\alpha|}$, $|\alpha x|$ est $<R$ et les deux fonctions $F(x,\alpha x)$, $F(\alpha x,\alpha x)$ ont leurs modules inférieurs à μ. On a donc

$$|\varphi(\alpha x)|<\frac{\mu K}{|\alpha|-1}+2\mu=\mu\left\{2+\frac{K}{|\alpha|-1}\right\}$$

lorsque $|\alpha x|$ est inférieur à R. Cela revient à dire que l'on a

$$(15) \qquad |\varphi(x)| < \mu \left\{ 2 + \frac{K}{|\alpha| - 1} \right\},$$

lorsque $|x|$ *est plus petit que* R.

On a de même, si $|x| < R$,

$$|\psi(x)| < \Psi(R),$$

c'est-à-dire

$$|\psi(x)| < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu K}{|\alpha|^n} = \frac{\mu K}{|\alpha| - 1}.$$

D'autre part, on tire des relations (9) et (10)

$$\psi(\alpha x) = \psi(x) + F(x, x) - F(x, \alpha x);$$

lorsque $|x|$ est $< R$, $|\alpha x|$ est $< R|\alpha|$, et l'on a encore

$$|\psi(\alpha x)| < \frac{\mu K}{|\alpha| - 1} + 2\mu = \mu \left\{ 2 + \frac{K}{|\alpha| - 1} \right\}.$$

Cela revient à dire que l'on a

$$(16) \qquad |\psi(y)| < \mu \left\{ 2 + \frac{K}{|\alpha| - 1} \right\}$$

lorsque $|y|$ *est inférieur à* $R|\alpha|$.

Cherchons encore une limite supérieure du module de $\varphi'(x)$ et de $\psi'(y)$. La fonction $\varphi'(x)$ a pour fonction majorante

$$\Phi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\mu K}{R^n} x^{n-1},$$

et, par conséquent, si $|x|$ est $< \dfrac{R}{|\alpha|}$,

$$|\varphi'(x)| < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\mu K}{R|\alpha|^{n-1}} = \frac{\mu K}{R} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{|\alpha|^{n-1}} = \frac{\mu K}{R} \frac{|\alpha|^2}{(|\alpha| - 1)^2}.$$

D'autre part, on tire de l'une des relations écrites plus haut

$$\alpha\varphi'(\alpha x) = \varphi'(x) + F'_x(x, \alpha x) + \alpha F'_y(x, \alpha x) - \alpha F'_x(\alpha x, \alpha x) - \alpha F'_y(\alpha x, \alpha x),$$

où $F'_y(x, \alpha x)$ représente la dérivée $F'_y(x, y)$ où l'on aurait remplacé y par αx après la différentiation.

Si l'on suppose $|x| < \frac{R}{|\alpha|}$, $|\alpha|x$ est $<R$, et les modules des fonctions $F'_x(x, \alpha x)$, $F'_x(\alpha x, \alpha x)$ sont inférieurs à μ_1, ceux des fonctions $F'_y(x, \alpha x)$, $F'_y(\alpha x, \alpha x)$ inférieurs à μ_2. On a donc, *pourvu que* $|x|$ *soit* $< |R|$,

$$|\varphi'(x)| < \frac{1}{|\alpha|}\left\{\frac{\mu K}{R}\frac{|\alpha|^2}{(|\alpha|-1)^2} + |x|\left\{2\mu_2+\mu_1\right\} + \mu_1\right\}$$

ou

(17) $$|\varphi'(x)| < \frac{\mu K}{R}\frac{|\alpha|}{(|\alpha|-1)^2} + 2\mu_2 + \mu_1\frac{1+|\alpha|}{|\alpha|}.$$

La fonction $\psi'(x)$ admet de même pour fonction majorante la série

$$\psi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\mu K}{R^n|\alpha|^n}x^{n-1}.$$

Si l'on suppose $|x| < R$, on aura donc

$$|\psi'(x)| < \frac{\mu K}{R}\sum_{1}^{+\infty}\frac{n}{|\alpha|^n} = \frac{\mu K}{R}\frac{|\alpha|}{(|\alpha|-1)^2}.$$

D'autre part, de la relation

$$\psi(\alpha x) = \psi(x) + F(x, x) - F(x, \alpha x)$$

on tire

$$\alpha\psi'(\alpha x) = \psi'(x) + F'_x(x, x) + F'_y(x, x) - F'_x(x, \alpha x) - \alpha F'_y(x, \alpha x).$$

Lorsque $|x| < R$, $|\alpha x|$ est $<|\alpha|R$ et, par suite, *pour toutes les valeurs de* y *telles que* $|y| < |\alpha|R$, on a

$$|\psi'(y)| < \frac{1}{|\alpha|}\left\{\frac{\mu K}{R}\frac{|\alpha|^2}{(|\alpha|-1)^2} + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_2|\alpha|\right\}$$

ou

(18) $$|\psi'(y)| < \frac{\mu K}{R}\frac{|\alpha|}{(|\alpha|-1)^2} + \frac{2\mu_1}{|\alpha|} + \mu_2\frac{1+|\alpha|}{|\alpha|}.$$

La fonction $z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$ est donc holomorphe dans le domaine $\mathfrak{D}$ et l'on a, dans ce domaine,

$$|z| < \mu\left[5 + \frac{2K}{|\alpha|-1}\right],$$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < \frac{\mu K}{R}\frac{|\alpha|}{(|\alpha|-1)^2} + 2\mu_2 + \mu_1\left(2 + \frac{1}{|\alpha|}\right),$$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < \frac{\mu K}{R}\frac{|\alpha|}{(|\alpha|-1)^2} + \frac{2\mu_1}{|\alpha|} + \mu_2\left(2 + \frac{1}{|\alpha|}\right).$$

Ces inégalités peuvent s'écrire sous forme abrégée

$$(19)\qquad \begin{cases} |z| < A\mu, & \left|\dfrac{\partial z}{\partial x}\right| < \dfrac{B\mu}{R} + C\mu_1 + D\mu_2, \\ & \left|\dfrac{\partial z}{\partial y}\right| < E\dfrac{\mu}{R} + F\mu_1 + G\mu_2, \end{cases}$$

A, B, C, D, E, F, G étant des constantes positives dont on a trouvé l'expression, qui ne dépendent que de $|\alpha|$ ([1]).

6. Le second problème préliminaire que nous avons encore à traiter est le suivant :

Soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe dans le domaine du point $x = y = 0$. Déterminer une intégrale de l'équation

$$(20)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y)$$

qui s'annule identiquement quand on y remplace y par x, ou par αx, α étant une constante dont le module est plus grand que l'unité.

Désignons toujours par $\omega(R)$ le domaine défini par les inégalités $|x| < R$, $|y| < |\alpha| R$; nous supposons que la fonction $f(x, y)$ est holomorphe dans ce domaine et que $|f(x, y)|$ reste inférieur à un nombre positif M pour tout point de ω. L'équation (20) admet l'intégrale particulière

$$(21)\qquad F(x, y) = \int_0^x dx \int_0^y f(x, y)\, dy,$$

qui est holomorphe dans le même domaine et qui s'annule pour $x = 0$, quel que soit y, et pour $y = 0$, quel que soit x. De la formule (21) on tire

$$(22)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^y f(x, y)\, dy, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^x f(x, y)\, dx.$$

(1) Lorsque α est de la forme $\alpha = e^{\theta i}$, l'angle θ étant incommensurable avec π, et tel que la limite de $\sqrt[n]{\left|\sin \frac{n\theta}{2}\right|}$ soit l'unité pour n infini, les deux séries obtenues pour $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont encore convergentes dans le cercle de rayon R, mais les formules qui donnent les limites supérieures de $|\varphi(x)|$, $|\varphi'(x)|$, $|\psi(y)|$, $|\psi'(y)|$ dans ce domaine deviennent illusoires.

Si le point (x, y) est situé dans un domaine $\mathcal{D}(r)$ défini par les inégalités $|x| < r$, $|y| < |\alpha| r$, où $r \leqq R$, on a dans ce domaine, d'après les formules (22),

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| < M |\alpha| r, \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < M r$$

et, par suite,

$$|F(x, y)| < M |\alpha| r^2.$$

Toute autre intégrale de l'équation (20) est donnée par la formule

$$z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y), \tag{23}$$

$\varphi(x)$ et $\psi(y)$ étant des fonctions arbitraires, et il n'y a plus qu'à choisir ces fonctions de façon que l'intégrale ainsi obtenue s'annule identiquement quand on y remplace y par x ou par αx : ce qui fait précisément l'objet du problème précédent. Nous avons vu comment on pouvait obtenir une intégrale satisfaisant à ces conditions, et holomorphe dans le même domaine $\mathcal{D}(R)$ que $f(x, y)$. Pour avoir une limite supérieure du module de cette intégrale z dans le domaine $\mathcal{D}(r)$, ainsi que des modules des dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, il suffira de remplacer, dans les formules (19), R, μ, μ_1, μ_2 par r, $M|\alpha|r^2$, $M|\alpha|r$, Mr respectivement. On aura donc, dans le domaine $\mathcal{D}(r)$,

$$|z| < MHr^2, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < MH_1 r, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < MH_2 r, \tag{24}$$

H, H_1, H_2 étant trois constantes positives qui ne dépendent que de $|\alpha|$.

7. Arrivons maintenant au problème qui est l'objet essentiel de cette étude.

Soient $f(x, y, z, p, q)$ une fonction des cinq variables x, y, z, p, q, régulière dans le voisinage des valeurs $x = y = z = p = q = 0$, et α une constante dont le module est supérieur à 1 ; *trouver une intégrale de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{25}$$

qui soit régulière dans le domaine du point $x = y = 0$, et qui s'annule identiquement quand on y remplace y par x ou par αx.

Pour fixer les idées, supposons que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ soit holomorphe dans le domaine défini par les inégalités

$$|x| < R, \qquad |y| < |\alpha| R, \qquad |z| < Z, \qquad |p| < P, \qquad |q| < Q,$$

R, Z, P, Q étant des nombres positifs, et que dans ce domaine le module de $f(x, y, z, p, q)$ reste plus petit qu'un nombre positif M. Posons $z_0 = 0$, et considérons les équations successives

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = f(x, y, 0, 0, 0),$$

$$(26) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z_1, \dfrac{\partial z_1}{\partial x}, \dfrac{\partial z_1}{\partial y}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z_{n-1}, \dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

en imposant à toutes les fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ la condition de s'annuler pour $y = x$ et pour $y = \alpha x$. Supposons que dans le domaine $\mathfrak{D}(R')$, où $R' \leq R$, on ait

$$(27) \qquad |z_{n-1}| < Z, \qquad |p_{n-1}| < P, \qquad |q_{n-1}| < Q,$$

alors la fonction

$$f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})$$

sera holomorphe dans ce domaine $\mathfrak{D}(R')$, et son module restera inférieur à M. Il s'ensuit que la fonction z_n sera elle-même holomorphe dans $\mathfrak{D}(R')$, et l'on aura dans ce domaine

$$|z_n| < MR'^2 H, \qquad |p_n| < MR'H_1, \qquad |q_n| < MR'H_2.$$

Si l'on a choisi R' assez petit pour que l'on ait à la fois

$$MR'^2 H < Z, \qquad MR'H_1 < P, \qquad MR'H_2 < Q,$$

la fonction z_n satisfera aux mêmes inégalités (27) que z_{n-1}; on peut donc imaginer que l'on continue indéfiniment les opérations précédentes, et l'on obtient ainsi une suite indéfinie de fonctions

$$(28) \qquad z_0, \quad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_{n-1}, \quad z_n, \quad z_{n+1}, \quad \ldots,$$

qui sont holomorphes dans le domaine $\mathfrak{D}(R')$, et qui s'annulent identiquement quand on remplace y par x ou par αx. Chacune d'elles satisfait, dans le domaine $\mathfrak{D}(R')$, aux conditions

$$|z_i| < Z, \qquad \left|\frac{\partial z_i}{\partial x}\right| < P, \qquad \left|\frac{\partial z_i}{\partial y}\right| < Q.$$

Pour reconnaître si z_n tend vers une limite lorsque n augmente indéfiniment, il suffit d'examiner si la série

$$z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots$$

est convergente. Or on déduit des équations (26)

$$(29) \qquad \frac{\partial^2 (z_n - z_{n-1})}{\partial x \, \partial y} = f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) - f(x, y, z_{n-2}, p_{n-2}, q_{n-2});$$

le second membre de cette formule est holomorphe dans le domaine $\mathcal{D}(R')$, et il est facile de trouver une limite supérieure de son module. On peut, en effet, d'après le théorème des accroissements finis généralisé, trouver trois nombres positifs constants U, V, W tels que l'on ait

$$\begin{aligned} &|f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) - f(x, y, z_{n-2}, p_{n-2}, q_{n-2})| \\ &\quad \leqq U\,|z_{n-1} - z_{n-2}| + V\,|p_{n-1} - p_{n-2}| + W\,|q_{n-1} - q_{n-2}|, \end{aligned}$$

lorsque $x, y, z_{n-1}, z_{n-2}, p_{n-1}, p_{n-2}, q_{n-1}, q_{n-2}$ satisfont respectivement aux inégalités

$$\begin{array}{llll} |x| < R', & |y| < |\alpha|\,R', & |z_{n-1}| < Z, & |z_{n-2}| < Z, \\ |p_{n-1}| < P, & |p_{n-2}| < P, & |q_{n-1}| < Q, & |q_{n-2}| < Q. \end{array}$$

Soit π_{n-1} une limite supérieure du module des trois différences $z_{n-1} - z_{n-2}$, $p_{n-1} - p_{n-2}$, $q_{n-1} - q_{n-2}$ dans le domaine $\mathcal{D}(R')$. D'après l'inégalité précédente, on a, dans le même domaine,

$$|f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) - f(x, y, z_{n-2}, p_{n-2}, q_{n-2})| < (U + V + W)\,\pi_{n-1}.$$

Or, l'intégrale considérée $z_n - z_{n-1}$ de l'équation auxiliaire (29) est nulle pour $y = x$ et pour $y = \alpha x$. Il s'ensuit que dans un domaine $\mathcal{D}(r)$, où $r \leqq R'$, on a les inégalités

$$\begin{aligned} |z_n - z_{n-1}| &< (U + V + W)\,\pi_{n-1}\, r^2 H, \\ |p_n - p_{n-1}| &< (U + V + W)\,\pi_{n-1}\, r H_1, \\ |q_n - q_{n-1}| &< (U + V + W)\,\pi_{n-1}\, r H_2. \end{aligned}$$

Choisissons r assez petit pour que l'on ait

$$(U + V + W)\, r^2 H < \lambda, \qquad (U + V + W)\, r H_1 < \lambda, \qquad (U + V + W)\, r H_2 < \lambda,$$

λ étant un nombre positif inférieur à l'unité. Alors, en désignant par π_n la limite supérieure des trois différences $|z_n - z_{n-1}|$, $|p_n - p_{n-1}|$, $|q_n - q_{n-1}|$ pour un

point (x, y) du domaine $\mathfrak{D}(r)$, on aura, d'après ce qui précède,

$$\pi_n < \lambda \pi_{n-1}$$

et, par suite,

$$|z_n - z_{n-1}| < \pi_1 \lambda^n, \qquad |p_n - p_{n-1}| < \pi_1 \lambda^n, \qquad |q_n - q_{n-1}| < \pi_1 \lambda^n,$$

π_1 étant le plus grand des trois nombres Z, P, Q définis plus haut. Il en résulte que les quatre séries

$$z_0 + (z_1 - z_0) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots,$$

$$p_0 + (p_1 - p_0) + \ldots + (p_n - p_{n-1}) + \ldots,$$

$$q_0 + (q_1 - q_0) + \ldots + (q_n - q_{n-1}) + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + \ldots + \left(\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y}\right) + \ldots,$$

sont uniformément convergentes dans le domaine $\mathfrak{D}(r)$. Si $\omega(x, y)$ est la somme de la première, les sommes des trois autres sont respectivement $\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$. La relation

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right)$$

devient donc à la limite, quand on fait croître n indéfiniment,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}\right).$$

Cette fonction $\omega(x, y)$ est holomorphe dans le domaine $\mathfrak{D}(r)$, et elle s'annule quand on y remplace y par x ou par αx, puisqu'il en est ainsi de tous les termes de la série

$$z_0 + (z_1 - z_0) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots;$$

elle satisfait donc à toutes les conditions de l'énoncé.

La solution de l'équation (25), dont on vient de démontrer l'existence, est développable en série entière, ordonnée suivant les puissances positives des variables x et y. On peut calculer les coefficients de ce développement par une méthode directe, sans passer par les fonctions intermédiaires $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$. On sait, en effet, que l'équation (25), jointe à celles que l'on en déduit par des différentiations successives, permet d'exprimer toutes les dérivées partielles p_{ik} (où $i > 0$, $k > 0$) au moyen de x, y, z et des dérivées p_{n0} et p_{0n}, où n est au plus égal à $i + k - 1$. Supposons que l'on ait évalué les valeurs initiales pour $x = y = 0$ de toutes les dérivées d'ordre inférieur à n de l'intégrale cherchée.

On connaîtra par là même les valeurs initiales des dérivées $p_{n-1,1}$, $p_{n-2,2}$, ..., $p_{1,n-1}$. Pour calculer p_{n0} et p_{0n}, remarquons que le groupe des termes de degré n dans le développement de l'intégrale cherchée est égal à

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left\{p_{n0}x^n + \frac{n}{1}p_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + p_{0n}y^n\right\},$$

et le coefficient de x^n doit être nul quand on y remplace y par x ou par αx. On a donc deux équations de la forme

$$p_{n0} + p_{0n} = \mathrm{K}, \qquad p_{n0} + \alpha^n p_{0n} = \mathrm{K}_1,$$

K et K_1 ne dépendant que des autres dérivées d'ordre n, $p_{n-1,1}$, $p_{n-2,2}$, ..., $p_{1,n-1}$. Puisque α n'est pas racine de l'unité, on en déduira p_{n0} et p_{0n}. On pourra donc calculer de proche en proche, sans être jamais arrêté, les coefficients du développement.

Il est à remarquer que ce développement existe toujours, et qu'il est unique, pourvu que α ne soit pas racine de l'unité, alors même que l'on aurait $|\alpha| = 1$. Mais la convergence n'est démontrée jusqu'ici que si l'on a $|\alpha| > 1$; nous allons voir tout à l'heure qu'elle l'est aussi si $|\alpha| < 1$.

La démonstration de la convergence par la méthode habituelle des fonctions majorantes présenterait dans ce cas des difficultés spéciales, car les expressions des dérivées p_{0n}, p_{n0} en fonction des précédentes ne s'obtiennent pas par des additions et des multiplications seulement. L'emploi des approximations successives nous a permis d'éviter ces difficultés.

8. Nous allons maintenant généraliser le résultat obtenu, en remplaçant les conditions limites considérées jusqu'ici par d'autres d'un caractère moins particulier. Tout d'abord, on peut se proposer de déterminer une intégrale de l'équation (25), régulière dans le domaine du point $x = y = 0$, et s'annulant identiquement quand on y remplace y par cx ou par $c'x$, c et c' étant deux constantes telles que $\left|\frac{c'}{c}\right|$ soit différent de l'unité. Supposons, pour fixer les idées, $\left|\frac{c'}{c}\right| > 1$; si l'on fait le changement de variable $cx = x'$, l'équation (25) est remplacée par une équation de même forme et l'intégrale de la nouvelle équation doit s'annuler identiquement quand on y remplace y par x' ou par $\frac{c'}{c}x'$; nous sommes donc ramenés au problème particulier qui a été traité.

Soit, en second lieu, à *déterminer une intégrale de l'équation*

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

courbes planes C, C_1

$$C\{y = \pi(x), \qquad C_1\{y = \pi_1(x),$$

soient remplacées par deux lignes droites

$$C'\{y' = \gamma x', \qquad C'_1\{y' = \gamma_1 x',$$

γ, γ_1 étant deux coefficients constants, tels que $\left|\frac{\gamma}{\gamma_1}\right|$ soit différent de l'unité. On peut évidemment, sans diminuer la généralité, supposer $\gamma_1 = 1$.

Pour que la transformation (31) change la courbe C en la courbe C' et la courbe C_1 en la courbe C'_1, il faut et il suffit que l'on ait

$$(32) \qquad \Phi(\pi(x)) = \gamma F(x), \qquad \Phi(\pi_1(x)) = F(x),$$

et, par suite,

$$(33) \qquad \Phi(\pi(x)) = \gamma \Phi(\pi_1(x)).$$

Cette dernière relation ne renferme plus qu'une fonction inconnue Φ, puisque $\pi(x)$ et $\pi_1(x)$ sont des fonctions connues de x; par hypothèse, ces deux fonctions sont développables en séries entières

$$\pi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$
$$\pi_1(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

les deux coefficients a_1 et b_1 n'étant pas nuls. Si nous posons $\pi_1(x) = X$, inversement x est une fonction holomorphe de X dans le voisinage de $X = 0$,

$$x = \frac{1}{b_1} X + \alpha_2 X^2 + \ldots,$$

et $\pi(x)$ se change à son tour en une fonction holomorphe $\omega(X)$

$$\omega(X) = \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \ldots + \beta_n X^n + \ldots$$

le premier coefficient β_1 étant égal à $\frac{a_1}{b_1}$. La relation (33) prend la forme

$$(34) \qquad \Phi(\omega(X)) = \gamma \Phi(X).$$

Nous voulons montrer que l'on peut satisfaire à cette relation en prenant pour $\Phi(X)$ une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine

$$\Phi(X) = A_1 X + A_2 X^2 + \ldots + A_n X^n + \ldots,$$

holomorphe dans le domaine du point $x = y = 0$, se réduisant à une fonction donnée $\varphi(x)$ quand on remplace y par cx et à une autre fonction donnée $\psi(x)$ quand on remplace y par $c'x$.

Les deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont supposées holomorphes dans le voisinage de l'origine et satisfont à la condition $\varphi(0) = \psi(0)$; d' plus nous supposons, comme tout à l'heure, que $\left|\frac{c'}{c}\right|$ est différent de l'ur s valeurs z_0, p_0, q_0 de l'intégrale cherchée et de ses dérivées partiel $= y = 0$ sont fournies immédiatement par les relations

$$z_0 = \varphi(0), \qquad p_0 + q_0 c - \qquad {}_0 c' = \psi'(0);$$

nous supposerons que la fonct régulière dans le voisinage du système de valeurs

$$x = 0, \qquad y - \qquad p = p_0, \qquad q = q_0.$$

Cela étant, la fonction

$$Z = \frac{[\varphi(x) - \varphi(0)](y - c'x)}{(c - c')x} + c' \frac{\left[\psi\left(\frac{y}{c'}\right) - \psi(0)\right](y - cx)}{(c' - c)y} + \varphi(0)$$

est régulière dans le domaine de l'origine, et satisfait aux mêmes conditions que l'intégrale cherchée (¹).

La transformation $z = Z + u$ conduit à une équation de même forme que l'équation proposée

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

où, d'après les hypothèses faites sur la fonction $f(x, y, z, p, q)$, le second membre $F(x, y, u, u'_x, u'_y)$ est régulier dans le voisinage des valeurs

$$x = y = u = u'_x = u'_y = 0.$$

Il suffira encore de déterminer une intégrale holomorphe de la nouvelle équation, s'annulant identiquement quand on y remplace y par cx ou par $c'x$.

L'existence d'une intégrale de l'équation

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

(¹) Il est clair qu'il y a une infinité d'autres fonctions possédant les mêmes propriétés, par exemple

$$\varphi\left(\frac{y - c'x}{c - c'}\right) + \psi\left(\frac{y - cx}{c' - c}\right) - \varphi(0).$$

satisfaisant aux conditions énoncées, sous les hypothèses admises, est donc établie. Pour calculer les coefficients du développement en série entière de cette intégrale, on procédera comme il a été expliqué plus haut. Il suffit de pouvoir calculer les valeurs initiales des dérivées p_{n0}, p_{0n}, au moyen des valeurs initiales des dérivées p_{ik} (où $i+k \leqq n-1$). On a pour cela deux équations linéaires de la forme

$$p_{n0}+c^n p_{0n}=\mathrm{K}, \qquad p_{n0}+c'^n p_{0n}=\mathrm{K}',$$

les seconds membres K, K′ ne dépendant que des dérivées déjà calculées.

9. En langage géométrique, le problème le plus général résolu jusqu'ici peut s'énoncer comme il suit :

Déterminer une surface intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}=f(x, y, z, p, q), \tag{30}$$

connaissant les sections de cette surface par deux plans $y=cx$, $y=c'x$, passant par l'axe des z.

La généralisation s'offre d'elle-même. Au lieu de deux courbes planes dont les plans passent par l'axe Oz, considérons deux courbes quelconques, ayant un point commun, et satisfaisant à certaines conditions qui vont être précisées, et proposons-nous de déterminer une surface intégrale de la même équation passant par ces deux courbes.

Soient

$$y=\pi(x), \qquad z=\varphi(x)$$

les équations de l'une des courbes Γ,

$$y=\pi_1(x), \qquad z=\varphi_1(x)$$

les équations de la seconde courbe Γ_1. Nous supposerons que les fonctions $\pi(x)$, $\varphi(x)$, $\pi_1(x)$, $\varphi_1(x)$ sont holomorphes dans le domaine de l'origine et s'annulent pour $x=0$, que $\pi'(0)$, $\pi'_1(0)$ sont différents de zéro et que le module du rapport $\frac{\pi'(0)}{\pi'_1(0)}$ n'est pas égal à un. La première hypothèse revient à prendre pour origine le point commun aux deux courbes Γ, Γ_1. Les dérivées $\pi'(0)$, $\pi'_1(0)$ représentent les coefficients angulaires des tangentes à l'origine aux projections C, C_1 des deux courbes Γ, Γ_1 sur le plan des xy. Nous supposons par conséquent qu'aucune de ces courbes C, C_1 n'est tangente [1] à l'un des axes Ox, Oy,

---

[1] Les cas où il en est ainsi ont déjà été traités.

et, en outre, que le module du rapport de ces coefficients angulaires est différent de l'unité. Le nouveau problème que l'on se propose peut alors s'énoncer ainsi :

Déterminer une intégrale de l'équation (30), *régulière dans le domaine de l'origine, se réduisant à* $\varphi(x)$ *quand on y remplace* y *par* $\pi(x)$, *et à* $\varphi_1(x)$ *quand on y remplace* y *par* $\pi_1(x)$.

L'existence de cette intégrale étant admise, les coefficients du développement en série entière peuvent encore être calculés de proche en proche. Soit

$$z = \sum a_{ik} x^i y^k$$

le développement cherché; on démontre comme plus haut que les coefficients a_{ik}, où i et k sont positifs, s'expriment au moyen des coefficients a_{10}, a_{01}, ..., a_{n0}, a_{0n}, n étant au plus égal à $i+k-1$. Pour calculer les coefficients a_{n0} et a_{0n}, observons que quand on remplace y par $\pi(x)$ le coefficient de x^n est

$$a_{n0} + a_{0n}[\pi'(0)]^n + \ldots,$$

les termes non écrits étant connus, si l'on a déjà calculé les coefficients a_{10}, a_{01}, ..., $a_{n-1,0}$, $a_{0,n-1}$. Le coefficient de x^n, après la substitution de $\pi_1(x)$ à la place de y, est de même

$$a_{n0} + a_{0n}[\pi'_1(0)]^n + \ldots.$$

En identifiant ces coefficients aux coefficients de x^n dans $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ respectivement, on a deux équations linéaires qui donneront a_{n0} et a_{0n} au moyen des coefficients précédents. En particulier, les coefficients a_{10}, a_{01}, c'est-à-dire les valeurs des dérivées partielles p et q à l'origine, sont déterminés par les deux équations

$$a_{10} + a_{01}\pi'(0) = \varphi'(0), \qquad a_{10} + a_{01}\pi'_1(0) = \varphi'_1(0).$$

Au lieu d'étudier directement la convergence de ce développement, nous montrerons que ce nouveau problème peut se ramener à celui qui précède.

Les transformations ponctuelles effectuées sur les variables x, y, qui changent l'équation (30) en une équation de même espèce, sont de l'une des formes

$$(31) \qquad \begin{cases} x' = F(x), \\ y' = \Phi(y), \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = F(y), \\ y' = \Phi(x), \end{cases}$$

la seconde se déduisant de la première par l'échange des variables x', y'. Cherchons s'il est possible de déterminer les fonctions $F(x)$, $\Phi(y)$ de façon que les deux

courbes planes C, C_1

$$C\{ y = \pi(x), \qquad C_1\{ y = \pi_1(x),$$

soient remplacées par deux lignes droites

$$C'\{ y' = \gamma x', \qquad C'_1\{ y' = \gamma_1 x',$$

γ, γ_1 étant deux coefficients constants, tels que $\left|\frac{\gamma}{\gamma_1}\right|$ soit différent de l'unité. On peut évidemment, sans diminuer la généralité, supposer $\gamma_1 = 1$.

Pour que la transformation (31) change la courbe C en la courbe C' et la courbe C_1 en la courbe C'_1, il faut et il suffit que l'on ait

$$\Phi(\pi(x)) = \gamma F(x), \qquad \Phi(\pi_1(x)) = F(x), \tag{32}$$

et, par suite,

$$\Phi(\pi(x)) = \gamma \Phi(\pi_1(x)). \tag{33}$$

Cette dernière relation ne renferme plus qu'une fonction inconnue Φ, puisque $\pi(x)$ et $\pi_1(x)$ sont des fonctions connues de x; par hypothèse, ces deux fonctions sont développables en séries entières

$$\pi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$
$$\pi_1(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

les deux coefficients a_1 et b_1 n'étant pas nuls. Si nous posons $\pi_1(x) = X$, inversement x est une fonction holomorphe de X dans le voisinage de $X = 0$,

$$x = \frac{1}{b_1} X + \alpha_2 X^2 + \ldots,$$

et $\pi(x)$ se change à son tour en une fonction holomorphe $\omega(X)$

$$\omega(X) = \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \ldots + \beta_n X^n + \ldots$$

le premier coefficient β_1 étant égal à $\frac{a_1}{b_1}$. La relation (33) prend la forme

$$\Phi(\omega(X)) = \gamma \Phi(X). \tag{34}$$

Nous voulons montrer que l'on peut satisfaire à cette relation en prenant pour $\Phi(X)$ une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine

$$\Phi(X) = A_1 X + A_2 X^2 + \ldots + A_n X^n + \ldots,$$

le coefficient A_1 n'étant pas nul. En remplaçant X par $\omega(X)$ dans cette série et en identifiant les deux membres de la relation (34), on a d'abord

$$A_1\beta_1 = \gamma A_1,$$

ce qui montre que le problème n'est possible que si l'on suppose $\gamma = \beta_1 = \frac{a_1}{b_1}$. Ayant pris pour γ cette valeur, le coefficient A_1 est indéterminé; nous prendrons $A_1 = 1$.

Le coefficient de X^n dans le second membre de la relation (34) est γA_n, et, dans le premier membre, il est égal à

$$A_n\gamma^n + P_n(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1};\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

P désignant un polynome dont tous les coefficients sont réels et positifs. On a donc la relation

$$(35)\qquad A_n(\gamma - \gamma^n) = P_n(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1};\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Par hypothèse, γ ou $\frac{a_1}{b_1}$ a son module différent de l'unité. On pourra donc calculer de proche en proche les coefficients $A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ et former une série entière qui satisfait à la relation proposée (34) pourvu qu'elle soit convergente.

La convergence se démontre par la méthode habituelle des fonctions majorantes. Nous pouvons supposer $|a_1| < |b_1|$, c'est-à-dire $|\gamma| = \rho < 1$. Cela étant, on a, quel que soit n,

$$|\beta| \leqq |\beta|^n + |\beta - \beta^n|$$

ou

$$|\beta - \beta^n| \geqq \rho - \rho^n$$

et, par suite,

$$\frac{1}{|\beta - \beta^n|} \leqq \frac{1}{\rho - \rho^n}.$$

Si nous remplaçons, dans la relation (34), γ par ρ et $\omega(X)$ par une fonction majorante de la forme

$$\frac{\rho X}{1 - aX},$$

a étant réel et positif, on obtient une équation de même forme

$$(34)\ bis \qquad F\left(\frac{\rho X}{1 - aX}\right) = \rho F(X),$$

et si l'on cherche à satisfaire à cette relation par une fonction holomorphe

$$F(X) = X + B_2X^2 + \ldots + B_nX^n + \ldots,$$

on obtiendra pour les coefficients B_n des nombres réels et positifs qui, d'après la façon même dont on les obtient, seront supérieurs aux modules des coefficients correspondants de la première série. Or, cette nouvelle série est convergente, car l'équation (34) *bis* admet la solution holomorphe

$$F(X) = \frac{X}{1 - \frac{aX}{1-\rho}}.$$

En remontant aux relations (32), on voit que l'on peut satisfaire à ces relations par des fonctions $F(x)$, $\Phi(x)$, holomorphes dans le domaine de l'origine, s'annulant pour $x = 0$, et dont les dérivées $F'(0)$, $\Phi'(0)$ ne sont pas nulles. Les fonctions F et Φ étant déterminées de cette façon, inversement x et y sont des fonctions holomorphes des variables

$$x' = F(x), \qquad y' = \Phi(y),$$

et l'équation proposée se change en une équation de même forme

$$(36) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} = f_1\left(x', y', z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y'}\right).$$

Quant aux nouvelles conditions initiales, il est bien facile de les énoncer. Soient $\psi(x')$ et $\psi_1(x')$ ce que deviennent les fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ quand on remplace x par son expression en fonction de la nouvelle variable x'. L'intégrale de l'équation (36), qui correspond à l'intégrale cherchée de l'équation (30), doit se réduire à $\psi(x')$ quand on y remplace y' par $\gamma x'$ et à $\psi_1(x')$ quand on y remplace y' par x'. Nous sommes donc ramenés à l'un des problèmes traités précédemment, et la convergence du développement obtenu est assurée dans un certain domaine autour de l'origine, sous les conditions habituelles sur lesquelles nous ne reviendrons pas.

10. Les résultats précédents peuvent être étendus aux équations plus générales

$$(37) \qquad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, p, q),$$

A, B, C étant des fonctions des deux variables x, y. On sait, en effet, que l'on peut ramener ces équations à la forme simple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} = F\left(X, Y, z, \frac{\partial z}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial Y}\right)$$

par une transformation ponctuelle

$$(38) \qquad X = \varphi(x, y), \qquad Y = \psi(x, y),$$

X et Y étant les variables caractéristiques. Nous avons toujours supposé dans ce qui précède que le module du rapport $\frac{a_1}{b_1}$ était différent de l'unité. Pour savoir ce que devient cette condition quand on fait subir aux variables x et y une transformation ponctuelle de la forme (38), observons que a_1 et b_1 représentent les coefficients angulaires des tangentes aux projections des deux courbes données Γ, Γ_1 sur le plan des xy, tandis que les coefficients angulaires des tangentes aux directions caractéristiques issues de l'origine sont o et $+\infty$. Le rapport $\frac{a_1}{b_1}$ est donc égal au rapport anharmonique de ces quatre droites. Comme ce rapport anharmonique se conserve dans toute transformation ponctuelle de la forme (38), on peut énoncer la proposition générale suivante :

Deux courbes Γ, Γ_1 *ayant un point commun* O, *et non tangentes en ce point, déterminent une intégrale et une seule de l'équation* (37), *pourvu que le rapport anharmonique des tangentes à ces deux courbes, et des tangentes aux deux caractéristiques issues du point* O *dans l'élément qu'elles déterminent, ait un module différent de l'unité.*

11. Appliquons ce résultat au cas où les courbes données sont réelles, et où les coefficients A, B, C de l'équation (37) ont des valeurs réelles pour les valeurs réelles des variables x, y, au moins dans un certain domaine. Nous avons deux cas à distinguer, suivant que les caractéristiques sont réelles ou imaginaires.

Si les caractéristiques sont réelles, le rapport anharmonique des quatre droites est réel; le module de ce rapport ne peut être égal à l'unité que si le rapport lui-même est égal à ± 1. Il n'y a donc que deux cas exceptionnels où l'énoncé général est en défaut : 1° le cas où les deux courbes données Γ, Γ_1 sont tangentes; 2° le cas où les tangentes à ces deux courbes forment avec les tangentes aux caractéristiques une division harmonique.

Il n'en est plus de même si les caractéristiques sont imaginaires; dans ce cas, en effet, les coefficients angulaires des tangentes aux deux caractéristiques qui passent par un point sont imaginaires conjuguées, puisque A, B, C sont réels. Les courbes données Γ, Γ_1 étant réelles, le rapport anharmonique considéré est le quotient de deux imaginaires conjuguées; son module est égal à l'unité. Nous sommes donc toujours dans un cas exceptionnel. On voit donc que, si l'on suppose les courbes données réelles, le résultat obtenu n'est vraiment complet que pour les équations du type *hyperbolique*. Pour les équations du type *elliptique*, on est, au contraire, dans un cas d'exception où les méthodes précédentes sont insuffisantes pour décider de la convergence des séries obtenues. L'étude qui a été faite nous apprend seulement que deux circonstances tout à fait différentes peuvent se présenter. Si le rapport anharmonique en question est racine de l'unité, les équa-

tions qui déterminent les coefficients du développement de l'intégrale cherchée deviennent périodiquement incompatibles ou indéterminées. Au contraire, si ce rapport anharmonique n'est pas racine de l'unité, il ne peut y avoir qu'une intégrale holomorphe répondant à la question, mais la série obtenue n'est pas toujours convergente comme dans les cas déjà examinés.

12. Prenons, par exemple, l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{39}$$

et soit à déterminer une intégrale holomorphe dans le domaine de l'origine, se réduisant à une fonction donnée $\varphi(x)$ quand on y remplace y par mx, et à une autre fonction donnée $\varphi_1(x)$ quand on y remplace y par $m_1 x$, les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ étant nulles pour $x = 0$, et holomorphes dans le domaine de ce point.

Les coefficients angulaires des tangentes caractéristiques sont dans ce cas $+i$ et $-i$; le rapport anharmonique r des quatre droites a donc pour expression

$$r = \frac{m-i}{m+i} : \frac{m_1 - i}{m_1 + i} = \frac{mm_1 + 1 + i(m - m_1)}{mm_1 + 1 - i(m - m_1)},$$

ou encore

$$r = \frac{1 + i\operatorname{tang}\theta}{1 - i\operatorname{tang}\theta} = \frac{1 - \operatorname{tang}^2\theta + 2i\operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}^2\theta},$$

θ étant l'angle des deux droites $y = mx$, $y = m_1 x$. Soit α l'argument de r; on déduit de la formule précédente

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\theta}{1 - \operatorname{tang}^2\theta} = \operatorname{tang}2\theta$$

et, par suite, $\alpha = 2\theta$. Pour que r soit racine de l'unité, il faut et il suffit que l'angle θ soit commensurable avec π. Dans ce cas, il est facile de vérifier que le problème est impossible ou indéterminé, tandis qu'il ne peut admettre plus d'une solution, si $\frac{\theta}{\pi}$ est incommensurable.

Supposons que l'on ait fait tourner les axes autour de l'origine de façon que l'axe des x vienne coïncider avec la droite $y = mx$; la droite $y = m_1 x$ aura pour équation, dans ce nouveau système d'axes,

$$y = x\operatorname{tang}\theta,$$

et l'équation (39) ne change pas de forme.

Le problème revient à déterminer une intégrale, holomorphe dans le domaine de l'origine, se réduisant, pour $y = 0$, à une fonction donnée $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n,$$

et, pour $y = x \tang\theta$, à une fonction donnée $\psi(r)$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\psi(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n r^n.$$

La solution cherchée peut s'écrire, en employant les coordonnées polaires ρ, ω,

$$z = \sum_{n=1}^{+\infty} \{ c_n \rho^n \cos n\omega + d_n \rho^n \sin n\omega \}.$$

Pour $\omega = 0$, on a $\rho = x$, et la série se réduit à

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n;$$

on doit donc avoir $c_n = a_n$. Pour $\omega = \theta$, ρ est égal à r; on doit donc avoir

$$a_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta = b_n.$$

Lorsque $\frac{\theta}{\pi}$ est égal à une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, $\sin n\theta$ est nul, toutes les fois que n est un multiple de q, et dans ce cas seulement. Pour que le problème soit possible, il faut donc que l'on ait $b_n = a_n \cos n\theta$, lorsque n est un multiple de q. Si cette condition est remplie, les coefficients d_q, d_{2q}, ..., d_{mq}, ... restent arbitraires.

La série obtenue, en supposant nuls tous ces coefficients, est convergente dans le domaine de l'origine, car la valeur absolue de $\sin n\theta$ reste supérieure à un nombre fixe positif, lorsque n n'est pas un multiple de q. En ajoutant à cette intégrale une série quelconque de la forme

$$g_1 \rho^q \sin q\omega + g_2 \rho^{2q} \sin(2q\omega) + \ldots + g_\nu \rho^{\nu q} \sin(\nu q\omega) + \ldots,$$

pourvu qu'elle soit convergente, on obtient encore une intégrale holomorphe répondant à la question. Le problème proposé est donc impossible ou indéterminé, lorsque $\frac{\theta}{\pi}$ est un nombre rationnel.

Supposons, au contraire, que $\frac{\theta}{\pi}$ soit un nombre irrationnel. Il ne peut y avoir plus d'une intégrale répondant à la question, et cette intégrale, si elle existe, est représentée par la série

$$z = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \rho^n \cos n\omega + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n - a_n \cos n\theta}{\sin n\theta} \rho^n \sin n\omega.$$

La première série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \rho^n \cos n\omega$$

peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (s^n + s_0^n),$$

en posant $s = x + iy$, $s_0 = x - iy$, et représente une fonction holomorphe des variables x et y dans le domaine de l'origine, si la série $\varphi(x)$ a un rayon de convergence différent de zéro, comme nous le supposons.

On peut écrire aussi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n - a_n \cos n\theta}{\sin n\theta} \rho^n \sin n\omega = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n - a_n \cos n\theta}{\sin n\theta} (s^n - s_0^n);$$

lorsque $\frac{\theta}{\pi}$ est un nombre algébrique, ou un nombre transcendant tel que $\sqrt[n]{|\sin n\theta|}$ ait pour limite l'unité, la série du second membre représente aussi une fonction holomorphe des variables x et y dans le domaine de l'origine, puisque nous supposons que la série $\psi(r)$ a aussi un rayon de convergence différent de zéro. Mais lorsque $\frac{\theta}{\pi}$ est un nombre transcendant tel que la plus petite limite de $\sqrt[n]{|\sin n\theta|}$ soit zéro, on ne peut plus rien affirmer sans une étude particulière du numérateur $b_n - a_n \cos n\theta$.

Supposons, par exemple, $a_n = 0$, $b_n = 1$. La série considérée se réduit à

$$\sum \frac{\rho^n \sin n\omega}{\sin n\theta} = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n - s_0^n}{\sin n\theta}.$$

La série $\sum \frac{s^n}{\sin n\theta}$ est divergente, sauf pour $s = 0$, lorsque la plus petite limite de $\sqrt[n]{|\sin n\theta|}$ est égale à zéro. L'équation de Laplace n'admet donc pas d'intégrale holo-

morphe se réduisant à zéro pour $y=0$ et à $\frac{1}{1-r}$ pour $y=x \operatorname{tang}\theta \left(r=\sqrt{x^2+y^2}\right)$, lorsque le rapport $\frac{\theta}{\pi}$ est un de ces nombres transcendants qui ont été définis plus haut (n° 3).

Remarque. — Il est à remarquer que, dans ce cas, la série

$$F(\rho, \omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n \sin n\omega}{\sin n\theta}$$

est cependant convergente pour des valeurs positives de ρ, en choisissant convenablement l'angle ω. Posons en effet $\omega = k\theta$, k étant entier, on a

$$\frac{\sin(nk\theta)}{\sin n\theta} = P(\sin n\theta, \cos n\theta),$$

P étant un polynome en $\sin n\theta$, $\cos n\theta$, de degré $k-1$, à coefficients entiers. La valeur absolue de ce polynome reste inférieure à un nombre fixe M, quel que soit le nombre entier n, car les coefficients de P ne dépendent pas de n. La série $F(\rho, \omega)$ est donc convergente pour $\omega = k\theta$, $|\rho| < 1$. En d'autres termes, si l'on mène par l'origine une droite faisant un angle $k\theta$ avec l'axe ox, la série $F(\rho, \omega)$ est convergente en tous les points de cette droite dont la distance à l'origine est inférieure à l'unité. Dans un angle quelconque ayant pour sommet l'origine, il y a toujours une infinité de ces droites, puisque le rapport $\frac{\theta}{\pi}$ est incommensurable.

Au contraire, si $\frac{\omega}{\pi}$ est un nombre algébrique, $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$ a pour limite l'unité, et la série $F(\rho, \omega)$ est divergente sauf pour $\rho = 0$. Sur une droite passant par l'origine et faisant avec l'axe ox un angle ω tel que $\frac{\omega}{\pi}$ soit un nombre algébrique, la série est donc divergente, sauf à l'origine. Il y a encore une infinité de droites de cette espèce dans tout angle ayant l'origine pour sommet. On voit donc que dans un angle, aussi petit qu'il soit, ayant son sommet à l'origine, il y a toujours une infinité de rayons sur lesquels la série est partout divergente, et une infinité de rayons sur lesquels la série est convergente, tant que la distance du point à l'origine est inférieure à l'unité.

SUR

QUELQUES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE,

PAR M. J. CLAIRIN,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille.

Le problème que je me propose d'étudier dans ce travail est très particulier; il m'a cependant semblé utile d'indiquer les résultats auxquels je suis parvenu. La théorie générale des transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre présente de nombreuses difficultés, la considération d'exemples intéressants peut rendre de très grands services.

Les transformations de Bäcklund permettent, dans certains cas, de remplacer une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes par une équation plus simple, dont l'étude soit plus aisée. Il est naturel tout d'abord de rechercher quelles sont les équations dont les transformées sont des équations linéaires : dans ce qui suit j'indiquerai quelques équations qui jouissent de cette propriété.

Soient

$$(\varepsilon) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

$$(\varepsilon_1) \qquad F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) = 0$$

deux équations aux dérivées partielles du second ordre écrites avec les notations ordinaires : dans la première x, y désignent les variables indépendantes, z représente la fonction inconnue, dont les dérivées premières prises respectivement par rapport à x et à y sont p et q; on a, en outre,

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

dans la deuxième équation les lettres affectées d'un indice désignent des quantités analogues.

Supposons qu'il existe une transformation de Bäcklund (¹) de deuxième espèce qui permette de passer de (ε) à (ε_1) et inversement, la transformation faisant correspondre à une intégrale de (ε_1) une infinité d'intégrales de (ε), tandis qu'à une intégrale de (ε) il ne correspond qu'une intégrale de (ε_1). S'il existe un invariant du premier ordre pour chacun des systèmes de caractéristiques de (ε_1), chacun des deux systèmes de caractéristiques de (ε) possédera un invariant du premier ordre ou l'un d'entre eux seulement possédera un invariant du premier ordre, l'autre possédant un invariant du second ordre (²). En particulier, si l'équation (ε_1) est linéaire, on peut toujours supposer qu'elle soit mise sous la forme

$$s_1 = ap_1 + bz_1,$$

les deux systèmes de caractéristiques admettant respectivement les invariants x_1, y_1. A ces invariants correspondent deux invariants des systèmes de caractéristiques de (ε) dont l'un au moins est du premier ordre; nous allons étudier le cas où ces deux invariants sont du premier ordre. Si l'on effectue une transformation de contact convenable, ces invariants deviennent égaux à x et y; dans ce cas, on peut imaginer que deux des équations qui définissent la transformation sont

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y;$$

nous n'écrirons nulle part ces équations pour abréger un peu.

1. Les équations qui déterminent la transformation (B_2) par laquelle on peut passer de (ε) à (ε_1) sont résolubles par rapport à p et q; elles deviennent, si l'on imagine la résolution effectuée,

$$p = f(x, y, z;\ p_1, q_1, z_1),$$
$$q = \varphi(x, y, z;\ p_1, q_1, z_1).$$

Puisque la transformation ne fait correspondre à une intégrale de (ε) qu'une intégrale de (ε_1), ces équations ne sont pas résolubles par rapport à p_1 et q_1; d'ailleurs, par hypothèse, en écrivant que les dérivées de p par rapport à y et de q par rapport à x sont égales, on doit trouver l'équation linéaire (ε_1), c'est-à-dire une équation qui ne contient pas q_1, r_1 ni t_1. Ces remarques montrent immédiatement que, en dehors de x, y, z, f ne peut dépendre que de p_1 et φ que de z_1, en excluant naturellement le cas où f serait une fonction de x, y, z, z_1 et φ une fonction de x, y, z, q_1 qui se déduit du précédent en permutant x et y ainsi que x_1 et y_1.

(¹) J'ai étudié ces transformations et en particulier indiqué leur classification dans ma Thèse (*Annales de l'École normale supérieure*, t. XIX, Suppl.; 1902).

(²) Thèse, n° 18.

Cela posé, écrivons les équations de la transformation

$$p = f(x, y, z, p_1),$$
$$q = \varphi(x, y, z, z_1);$$

la condition

$$\frac{df}{dy} = \frac{d\varphi}{dx}$$

équivaut à l'équation linéaire (ε_1) si l'on a identiquement

$$(1)\quad \Omega(x, y, z, z_1, p_1) = \frac{\partial f}{\partial p_1}(ap_1 + bz_1) + \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - f\frac{\partial \varphi}{\partial z} - p_1\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = 0.$$

Par des dérivations successives, on trouve les équations

$$(2)\quad \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = b\frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial z_1} - f\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial z_1} - p_1\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = 0.$$

$$(3)\quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1\,\partial p_1} = b\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial z_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = 0,$$

$$(4)\quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x\,\partial z_1^2} - f\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z\,\partial z_1^2} - p_1\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z_1^3} = 0,$$

$$(5)\quad \frac{\partial^3 \Omega}{\partial z_1^2\,\partial p_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z\,\partial z_1^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z_1^3} = 0,$$

$$(6)\quad \frac{\partial^4 \Omega}{\partial z_1^2\,\partial p_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}\frac{\partial^3 f}{\partial z\,\partial p_1^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z\,\partial z_1^2} = 0.$$

2. Plusieurs cas sont à distinguer : si $\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}$ n'est pas nul, non plus que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}$, c'est-à-dire si f n'est pas une fonction linéaire de p_1 et si φ n'est pas une fonction linéaire de z_1, la dernière équation peut s'écrire

$$\frac{\dfrac{\partial^3 f}{\partial z\,\partial p_1^2}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}} = \frac{\dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial z\,\partial z_1^2}}{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{H}(x, y, z)}{\partial z}}{\mathrm{H}(x, y, z)}.$$

On tire de là

$$f(x, y, z, p_1) = \mathrm{H}(x, y, z)\,g(x, y, p_1) + l(x, y, z)\,p_1 + m(x, y, z),$$
$$\varphi(x, y, z, z_1) = \mathrm{H}(x, y, z)\,\theta(x, y, z_1) + \lambda(x, y, z)\,z_1 + \mu(x, y, z);$$

on peut toujours supposer que H se réduise à l'unité, car on retrouve ce cas particulier si l'on fait un changement de variable défini par l'équation

$$dZ = \frac{dz}{\mathrm{H}(x, y, z)}.$$

Cette opération étant supposée faite [1] remplaçons dans l'équation (5) f et φ par les valeurs indiquées, nous trouvons

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_1^2}\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial^3 \theta}{\partial z_1^3} = 0.$$

Si l n'est pas une fonction de x, y seulement, l'équation précédente donne

$$l = u(x, y)z,$$
$$\theta = \omega(x, y)e^{u(x,y)z_1},$$

en n'écrivant, comme nous le ferons constamment dans la suite, que les termes utiles. L'équation (7), par exemple, ne définit θ qu'à une fonction linéaire de z_1 près, mais il suffit de changer λ et μ et l'on peut supposer cette fonction nulle.

Remplaçons dans l'équation (4) f et φ par leurs valeurs, après avoir remarqué qu'il est toujours permis de supposer ω égale à 1,

$$f = g(x, y, p_1) + u(x, y)zp_1 + m(x, y, z),$$
$$\varphi = e^{u(x,y)z_1} + \lambda(x, y, z)z_1 + \mu(x, y, z),$$

nous aurons la condition

$$u^2\frac{\partial m}{\partial z} - 2u\frac{\partial u}{\partial x} - u^2 z_1\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

de laquelle on déduit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial m}{\partial z} = 0.$$

u sera donc une fonction de y seulement que nous représenterons par Y [2]; m ne dépendant pas de z peut être supposée nulle. Prenons comme nouvelle fonction inconnue Yz_1, cela revient à remplacer Y par l'unité dans les expressions de f et φ qui se réduisent à

$$f = g(x, y, p_1) + zp_1,$$
$$\varphi = e^{z_1} + \lambda(x, y, z)z_1 + \mu(x, y, z).$$

---

(1) Il serait trop compliqué de prendre de nouvelles lettres après chacun des changements de variables que nous aurons à effectuer. Nous conserverons les notations indiquées au commencement.

(2) Nous désignerons toujours par X, Y, ou par ces lettres affectées d'indices, des fonctions qui ne dépendent, la première que de x, la seconde que de y. Nous emploierons la notation de Lagrange pour représenter les dérivées de ces fonctions.

L'équation (3) devient

$$b\frac{\partial^2 g}{\partial p_1^2}+\lambda-\left(\frac{\partial g}{\partial p_1}+z\right)\frac{\partial\lambda}{\partial z}=0.$$

En prenant la dérivée du premier membre par rapport à z, on trouve que λ doit être égale à une fonction linéaire de z : $\rho(x,y)z+\sigma(x,y)$. Nous avons donc, si ρ n'est pas nul,

$$(8)\qquad\left\{\begin{aligned}&f=g(x,y,p_1)+zp_1,\\&\varphi=e^{z_1}+\rho(x,y)\left[z+\frac{\sigma(x,y)}{\rho(x,y)}\right]z_1+\mu(x,y,z);\end{aligned}\right.$$

nous prendrons, au lieu de z, $z+\frac{\sigma}{\rho}$ pour fonction inconnue, ce qui revient à supposer que σ est nulle.

Ecrivons maintenant que f et φ satisfont à l'équation (2)

$$b\left(\frac{\partial g}{\partial p_1}+z\right)-\rho g-z\frac{\partial\rho}{\partial x}=0,$$

cette équation exige que l'on ait

$$b=\frac{\partial\rho}{\partial x},\qquad\frac{\frac{\partial g}{\partial p_1}}{g}=\frac{\rho}{b}=A(x,y).$$

On en déduit

$$g=B(x,y)e^{Ap_1},$$

Développons l'équation (1) en remplaçant f et φ par leurs expressions, nous trouvons

$$(9)\qquad\begin{aligned}&(ABe^{Ap_1}+z)ap_1+\frac{\partial B}{\partial y}e^{Ap_1}+p_1B\frac{\partial A}{\partial y}e^{Ap_1}\\&\qquad+p_1\mu-\rho zp_1-\frac{\partial\mu}{\partial x}-Be^{Ap_1}\frac{\partial\mu}{\partial z}-p_1z\frac{\partial\mu}{\partial z}=0.\end{aligned}$$

En annulant les coefficients de $p_1e^{Ap_1}$ et e^{Ap_1} nous obtenons les conditions

$$(10)\qquad Aa+\frac{\partial A}{\partial y}=0,\qquad\frac{\partial B}{\partial y}=B\frac{\partial\mu}{\partial z},$$

nous voyons que μ est une fonction linéaire de z et il reste l'équation

$$ap_1z+p_1\mu-\rho p_1z-\frac{\partial\mu}{\partial x}-p_1z\frac{\partial\mu}{\partial z}=0.$$

En développant on aperçoit immédiatement que μ ne contient pas x et ne renferme pas de terme indépendant de z; on pourra donc écrire, en tenant compte en outre de la deuxième équation (10),

$$\mu = \frac{Y'}{Y} z, \qquad B = XY.$$

Nous prendrons pour fonction inconnue $\frac{z}{Y}$ au lieu de z et pour variables indépendantes $\int X\,dx$ et $\int \frac{dy}{Y}$ au lieu de x et de y, les équations de la tranformation (B_2) se réduisent à

$$p = e^{A(x,y)p_1} + z p_1,$$
$$q = e^{z_1} + \rho(x, y) z z_1.$$

Pour que z_1 satisfasse à une équation linéaire il faut et il suffit que l'on ait

$$A\rho + \frac{\partial A}{\partial y} = 0, \qquad A\frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho = 0.$$

On peut obtenir ces conditions en écrivant les équations trouvées dans le cours de la discussion précédente et non utilisées, ou directement en considérant les équations de la transformation telles qu'elles viennent d'être écrites. On satisfera à ces conditions en posant

$$A = -\frac{X+Y}{X'}, \qquad \rho = -\frac{Y'}{X+Y}.$$

Les équations de la transformation sont donc

$$(11) \qquad \begin{cases} p = e^{-\frac{X+Y}{X'}p_1} + z p_1, \\ q = e^{z_1} - \dfrac{Y'}{X+Y} z z_1, \end{cases}$$

l'équation qui donne z_1 étant

$$(12) \qquad s_1 + \frac{Y'}{X+Y} p_1 - \frac{X'Y'}{(X+Y)^2} z_1 = 0.$$

L'intégrale générale de cette dernière équation peut être déterminée sans difficulté :

$$z_1 = \frac{X_0 + Y_0}{X+Y} - \frac{Y'_0}{Y},$$

X_0 représentant une fonction quelconque de x et Y_0 une fonction quelconque

de y. Remplaçons z_1 par $z_1 + \dfrac{X_0 + Y_0}{X + Y} - \dfrac{Y'_0}{Y'}$ et z par $e^{z + \frac{X_0 + Y_0}{X+Y}}$, X_0 et Y_0 étant définies par les conditions

$$X' e^{\frac{X'}{X'_0}} = 1, \qquad Y' e^{\frac{Y'}{Y'_0}} = 1,$$

et prenons pour variables indépendantes $-X$, $-Y$, les équations (11) et (12) deviennent

$$(11)' \qquad \begin{cases} p = -e^{-(x+y)p_1 - z} + p_1, \\ q = -e^{z_1 - z} - \dfrac{z_1}{(x+y)}, \end{cases}$$

$$(12)' \qquad s_1 + \frac{p_1}{x+y} - \frac{z_1}{(x+y)^2} = 0.$$

Reste à trouver l'équation correspondante. Remarquons que si l'on pose $z - z_1 = \zeta$ et si l'on remplace ensuite z par $-\dfrac{z}{x+y}$ on peut mettre la première équation (11)' sous la forme suivante

$$(13) \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -e^{(x+y)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + p};$$

quant à la deuxième équation on peut l'écrire

$$(14) \qquad q = (x+y)e^{-\zeta} - \zeta$$

ou

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -e^{-\zeta} - \frac{z_1}{x+y} - q_1.$$

L'équation (12)' exprime que $q_1 + \dfrac{z_1}{x+y}$ est une fonction de y seulement, la dernière équation écrite montre que ζ est une fonction de la forme $\log\left(-\dfrac{X+Y}{Y'}\right)$, c'est-à-dire que $\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}$ et $-e^{-\zeta}$ sont les dérivées par rapport à x et à y d'une même fonction $\log(X+Y) = -\xi(x, y)$. Écrivons avec ces nouvelles notations les équations (13) et (14)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = e^{p - (x+y)\frac{\partial \xi}{\partial x}},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = e^{q - (x+y)\frac{\partial \xi}{\partial y}}.$$

Remplaçons z par $z-(x+y)\log(x+y)$, ces équations deviennent

$$1+(x+y)\frac{\partial\xi}{\partial x}=1+e^{p-\left[1+(x+y)\frac{\partial\xi}{\partial x}\right]},$$

$$1+(x+y)\frac{\partial\xi}{\partial y}=1+e^{q-\left[1+(x+y)\frac{\partial\xi}{\partial y}\right]}.$$

Nous en tirons

$$(15)\qquad 1+(x+y)\frac{\partial\xi}{\partial x}=\Phi(p),\qquad 1+(x+y)\frac{\partial\xi}{\partial y}=\Psi(q),$$

Φ et Ψ étant des fonctions implicites définies par les équations transcendantes

$$\Phi(p)=1+e^{p-\Phi(p)},\qquad \Psi(q)=1+e^{q-\Psi(q)}.$$

En prenant les dérivées des deux membres des équations (15), respectivement par rapport à y et par rapport à x, on trouve

$$(x+y)\frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{d\Phi}{dp}s,$$

$$(x+y)\frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{d\Psi}{dq}s.$$

Retranchons membre à membre et remplaçons $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, $\frac{\partial\xi}{\partial y}$ par leurs valeurs, nous obtenons

$$\Phi(p)-\Psi(q)=\left(\frac{d\Phi}{dp}-\frac{d\Psi}{dq}\right)(x+y)s.$$

D'après les équations qui définissent Φ et Ψ on a

$$\frac{d\Phi}{dp}=\frac{\Phi-1}{\Phi},\qquad \frac{d\Psi}{dq}=\frac{\Psi-1}{\Psi},$$

et il reste simplement

$$s(x+y)=\Phi(p)\Psi(q).$$

C'est l'une des équations que nous nous proposions de déterminer; on passera de cette équation à l'équation $(12)'$ par la transformation

$$p=e^{-(x+y)p_1+\frac{z}{x+y}}-p_1(x+y)+\frac{z}{x+y}+1,$$

$$q=e^{z_1+\frac{z}{x+y}}+z_1+\frac{z}{x+y}+1.$$

L'équation $(12)'$ étant intégrable par la méthode de Laplace, l'équation

transformée est intégrable par la méthode de M. Darboux; cette dernière équation a du reste été déjà étudiée à ce point de vue par M. Goursat dans un intéressant Mémoire [1].

3. Nous avons simplifié les équations (8) qui donnent les expressions de f et φ en fonction de x, y, z, z_1, p_1 en supposant que $\rho(x, y)$ n'était pas identiquement nulle : nous allons maintenant étudier ce cas particulier. Les équations qui définissent la transformation de Bäcklund étant

$$p = g(x, y, p_1) + z p_1,$$
$$q = e^{z_1} + \sigma(x, y) z_1 + \mu(x, y, z),$$

cherchons à quelles conditions z_1 sera déterminée par une équation linéaire. La condition (2) devient

$$b \frac{\partial g}{\partial p_1} + b z + \sigma p_1 - \frac{\partial \sigma}{\partial x} z_1 = 0,$$

il faut donc que l'on ait

$$b = 0, \qquad \sigma = 0.$$

f se réduit à $g(x, y, p_1) + z p_1$ et φ à $e^{z_1} + \mu(x, y, z)$: portons ces valeurs dans (1), il vient

$$\left(\frac{\partial g}{\partial p_1} + z\right) a p_1 + \frac{\partial g}{\partial y} + p_1 \mu - \frac{\partial \mu}{\partial x} - g \frac{\partial \mu}{\partial z} - z p_1 \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0. \tag{16}$$

En annulant la dérivée du premier membre par rapport à z, nous obtenons l'équation

$$a p_1 - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \, \partial z} - g \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} - z p_1 \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} = 0.$$

g n'étant pas une fonction linéaire de p_1, nous voyons immédiatement que μ doit être une fonction linéaire de z, le coefficient de z ne dépendant pas de x. Nous écrirons donc

$$\mu = \frac{Y'}{Y} z + M(x, y),$$

mais en remplaçant z par $z + \varpi(x, y)$, ϖ satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial \varpi}{\partial y} = \frac{Y'}{Y} \varpi + M,$$

nous pouvons toujours revenir au cas où M est nul.

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899.

Prenons enfin $\frac{z}{Y}$ pour nouvelle fonction inconnue et remplaçons y par $\int \frac{dy}{Y}$, nous trouvons

$$f = g(x, y, p_1) + z p_1, \qquad \varphi = e^{z_1};$$

pour satisfaire à l'équation (16), il suffit de supposer que g ne contient pas y.

Les équations de la transformation (B_2) sont donc

$$p = g(x, p_1) + z p_1, \qquad q = e^{z_1},$$

z_1 est une intégrale de

$$s_1 = 0,$$

l'équation qui donne z est

$$p - z\frac{s}{q} = g\left(x, \frac{s}{q}\right).$$

Comme l'équation trouvée plus haut, cette équation a été étudiée par M. Goursat dans le Mémoire que nous avons cité.

4. En étudiant l'équation (7), nous avons supposé que $l(x, y, z)$ dépendait effectivement de z. Si cette fonction ne contient que x et y, on peut imaginer qu'elle s'annule à condition de modifier $g(x, y, p_1)$, et (7) exprime que θ est un polynome du deuxième degré en z_1; nous écrirons donc

$$p = g(x, y, p_1) + m(x, y, z),$$
$$q = \omega(x, y) z_1^2 + \lambda(x, y, z) z_1 + \mu(x, y, z).$$

Dans ces équations nous remplacerons z par $\omega(x, y) z$, ce qui revient à supposer ω égale à l'unité.

Écrivons la condition (1)

$$\frac{\partial g}{\partial p_1}(a p_1 + b z_1) + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial z}(z_1^2 + \lambda z_1 + \mu)$$
$$- 2 z_1 p_1 - \lambda p_1 - \frac{\partial \lambda}{\partial x} z_1 - \frac{\partial \mu}{\partial x} - \left(z_1 \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial z}\right)(g + m) = 0.$$

Le coefficient de z_1^2 étant $\frac{\partial m}{\partial z}$, cette quantité doit s'annuler, m désigne donc une fonction de x, y seulement, qu'il est permis de supposer nulle. Nous écrirons que le coefficient de z_1 et le terme indépendant de z_1 sont aussi égaux à zéro, et nous obtiendrons ainsi deux équations

$$(17) \quad \begin{cases} b \dfrac{\partial g}{\partial p_1} - 2 p_1 - \dfrac{\partial \lambda}{\partial x} - g \dfrac{\partial \lambda}{\partial z} = 0, \\ a p_1 \dfrac{\partial g}{\partial p_1} + \dfrac{\partial g}{\partial y} - \lambda p_1 - \dfrac{\partial \mu}{\partial x} - g \dfrac{\partial \mu}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

On aura encore, en dérivant par rapport à z,

$$-\frac{\partial\lambda}{\partial z}p_1 - \frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial z} - g\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2} = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2\mu}{\partial z^2} = 0.$$

Les deux dernières égalités permettent d'écrire

$$\mu = \frac{Y'}{Y}z + M(x,y).$$

En opérant comme plus haut, on voit d'abord que l'on peut négliger M, puis on prend $\frac{z}{Y}$ pour fonction inconnue et $\int\frac{dy}{Y}$ pour seconde variable indépendante, ce qui revient à supposer la fonction μ identiquement nulle. Remarquons, en outre, que λ ne dépend que de x et de y.

D'après la première équation (17), g est un polynome du second degré en p_1 :

$$g = \frac{1}{b}p_1^2 + \frac{1}{b}\frac{\partial\lambda}{\partial x}p_1 + \rho(x,y).$$

Écrivons donc les équations de la transformation

$$p = \frac{1}{b}p_1^2 + \frac{1}{b}\frac{\partial\lambda}{\partial x}p_1 + \rho(x,y) = \frac{1}{b}\left(p_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \rho(x,y) - \frac{1}{4b}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2,$$

$$q = z_1^2 + \lambda(x,y)z_1 = \left(z_1 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{4}.$$

Remplaçons z_1 par $z_1 - \frac{\lambda}{2}$, ces équations deviennent

$$p = \frac{1}{b}p_1^2 + \rho(x,y) - \frac{1}{4b}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2,$$

$$q = z_1^2 - \frac{\lambda^2}{4}.$$

En écrivant que l'équation qui définit z_1 est linéaire, on voit que

$$\rho(x,y) - \frac{1}{4b}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 \quad \text{et} \quad -\frac{\lambda^2}{4}$$

sont les dérivées, par rapport à x et à y, d'une même fonction $\gamma(x,y)$.

Si nous remplaçons z par $z+\gamma(x,y)$, nous voyons que les équations de la transformation se réduisent à

$$p=\frac{1}{b}p_1^2,$$
$$q=z_1^2.$$

Cette transformation a été étudiée par M. Goursat (¹), elle permet de passer de l'équation

$$s=2\sqrt{b(x,y)pq}$$

à l'équation linéaire

$$s_1-\frac{1}{2}\frac{\partial \log b}{\partial y}p_1-bz_1=0.$$

5. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que f n'était pas une fonction linéaire de p_1 et que φ n'était pas une fonction linéaire de z_1 : nous allons rechercher ce qui se passe lorsque f est linéaire par rapport à p_1 sans que φ le soit par rapport à z_1. Nous supposerons, ce qui ne restreint pas la généralité, le coefficient de p_1 dans f égal à l'unité ; nous avons donc

$$p=f(x,y,z,p_1)=p_1+\mu(x,y,z),$$
$$q=\varphi(x,y,z,z_1).$$

L'équation (5) s'écrit alors

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial z_1^3}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial z\,\partial z_1^2}=0$$

et, en intégrant, on trouve

$$\varphi(x,y,z,z_1)=\psi(x,y,z_1-z)+A(x,y,z)z_1+B(x,y,z).$$

Posons $z_1-z=u$, l'équation (4) devient

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\frac{\partial\mu}{\partial z}-\frac{\partial^3\psi}{\partial x\,\partial u^2}+\mu\frac{\partial^3\psi}{\partial u^3}=0; \tag{18}$$

la dérivée par rapport à z du premier membre doit être nulle, on a, par conséquent,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}+\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial^3\psi}{\partial u^3}=0. \tag{19}$$

$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}$ ne s'annule pas, si μ n'est pas une fonction de x, y seulement, on peut

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV, 1897, p. 36. — *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 252.

écrire

$$\frac{\dfrac{\partial^3 \psi}{\partial u^3}}{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}} = -\frac{\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial z^2}}{\dfrac{\partial \mu}{\partial z}} = \omega(x, y),$$

et l'on tire de là

$$\psi = \alpha(x, y)\, e^{\omega(x, y)u}, \qquad \mu = \beta(x, y)\, e^{-\omega(x, y)z} + \gamma(x, y).$$

Portons ces valeurs de ψ et de μ dans (18), cette équation se réduit à

$$(18)' \qquad \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\omega^2 e^{\omega u}) - \alpha\gamma\omega^3 e^{\omega u} = 0.$$

En développant, on trouve d'abord que ω est une fonction de y seulement; on peut remplacer cette fonction par l'unité, en opérant comme nous avons déjà fait plusieurs fois; l'équation (18)′ donne alors

$$\gamma = \frac{\partial \log \alpha}{\partial x}.$$

Cette égalité montre qu'il suffit de remplacer z par $z - \log \alpha$ pour revenir au cas où l'on a

$$\alpha = 1, \qquad \gamma = 0.$$

Les équations de la transformation sont donc

$$p = p_1 + \beta(x, y) e^{-z},$$
$$q = e^{z_1 - z} + A(x, y, z) z_1 + B(x, y, z).$$

Écrivons la condition (1)

$$(ap_1 + bz_1) + \frac{\partial \beta}{\partial y} e^{-z} - \beta e^{-z}(A z_1 + B)$$
$$- A p_1 - \frac{\partial A}{\partial x} z_1 - \frac{\partial B}{\partial x} - \left(\frac{\partial A}{\partial z} z_1 + \frac{\partial B}{\partial z}\right)(p_1 + \beta e^{-z}) = 0;$$

en annulant les coefficients de $p_1 z_1$ et de $z_1 e^{-z}$, on voit que A doit se réduire identiquement à zéro et il reste les équations

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} - B\beta - \beta \frac{\partial B}{\partial z} = 0,$$
$$a = \frac{\partial B}{\partial z}, \qquad b = 0, \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = 0.$$

Elles montrent d'abord que B est une fonction linéaire de z indépendante

de x, c'est-à-dire que l'on peut poser

$$B = Y_0 z + \frac{Y'}{Y}.$$

En portant dans la première équation, on voit que Y_0 s'annule et que β est égale à XY. Si l'on remplace z par $z + \log Y$, et si l'on prend $\int X\,dx$ et $\int \frac{dy}{Y}$ pour variables indépendantes, les équations de la transformation se réduisent à

$$p = p_1 + e^{-z},$$
$$q = e^{z_1 - z}.$$

Les deux équations qui se correspondent par cette transformation sont

$$s_1 = 0,$$
$$s + qe^{-z} = 0.$$

6. Dans la discussion précédente nous avons écarté le cas où μ est une fonction de x, y seulement, cas que nous allons examiner maintenant. Comme on peut ajouter à z une fonction quelconque de x, y, il est permis de supposer que μ s'annule.

En écrivant la condition (1), nous trouvons

$$(20) \qquad ap_1 + b z_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x} - A p_1 - \frac{\partial A}{\partial x} z_1 - \frac{\partial A}{\partial z} z_1 p_1 - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial z} p_1 = 0.$$

Il faut d'abord que l'on ait

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0;$$

nous supposerons nulle la fonction A qui ne dépend pas de z. On peut, en effet, dans ce cas, écrire

$$\varphi(x, y, z, z_1) = \psi(x, y, z_1 - z) + A(x, y)(z_1 - z) + B(x, y, z) + A(x, y) z,$$

ce qui montre que φ est la somme d'une fonction de x, y, $z_1 - z$ et d'une fonction de x, y, z.

L'équation (20) se décompose en deux autres

$$a = \frac{\partial B}{\partial z}, \qquad b z_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x}.$$

D'après la première il est permis de poser

$$B = a(x, y) z + \alpha(x, y);$$

en portant dans la seconde, il vient

$$(21) \qquad b z_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x} z + \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

ψ ne dépendant que de x, y, u ($z_1 - z = u$), nous devons avoir

$$b = \frac{\partial a}{\partial x}.$$

Supposons qu'il en soit ainsi, on trouve en intégrant (21)

$$\psi(x, y, u) = \omega(y, u) + au - \alpha.$$

Il suffit de remplacer u par sa valeur pour déduire de là les équations de la transformation de Bäcklund

$$p = p_1,$$
$$q = \omega(y, z_1 - z) + a(x, y) z_1.$$

On trouve sans aucune difficulté les équations qui définissent z et z_1 :

$$q = \omega\left(y, \frac{s - ap}{\frac{\partial a}{\partial x}} - z\right) + a(x, y) \frac{s - ap}{\frac{\partial a}{\partial x}},$$
$$s_1 - ap_1 - \frac{\partial a}{\partial x} z_1 = 0.$$

On peut encore satisfaire à l'équation (19) en prenant pour μ une fonction linéaire de z et pour ψ un polynome du second degré en u ; je ne développerai pas les calculs parce que cette étude ne fournit rien de nouveau : les transformations de Bäcklund que l'on obtient ne sont que des cas particuliers de celles que nous avons trouvées en dernier lieu.

7. Il reste à étudier le cas où φ est une fonction linéaire de z_1, f n'étant pas linéaire par rapport à p_1. Nous pouvons, ici encore, supposer le coefficient de z_1 dans φ égal à l'unité et écrire

$$p = f(x, y, z, p_1),$$
$$q = z_1 + \theta(x, y, z).$$

L'équation (2) donne

$$b \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

et, en intégrant, il vient

$$f = g(x, y, p_1 - bz).$$

Posons $p_1 - bz = u$ et écrivons la condition (1)

$$au\frac{\partial g}{\partial u} + abz\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} - b\theta\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial x} - u - bz - g\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

En dérivant d'abord deux fois par rapport à z, puis une fois par rapport à u, nous trouvons

$$(22)\qquad b\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial^3 \theta}{\partial x\,\partial z^2} + g\frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3} = 0,$$

$$(23)\qquad b\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3} = 0.$$

$\frac{\partial g}{\partial u}$ est certainement différent de zéro; s'il en est de même de $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$, nous pouvons écrire la dernière équation

$$-\frac{\dfrac{\partial^3 \theta}{\partial z^3}}{b\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial g}{\partial u}} = \alpha(x, y),$$

et en déduire

$$p = g(x, y, p_1 - bz) = \varpi(x, y)e^{\alpha(x,y)(p_1 - bz)} + \tau(x, y),$$
$$q = z_1 + \theta(x, y, z) \quad = z_1 + \omega(x, y)\,e^{-\alpha(x,y)bz} + \rho(x, y)\,z + \sigma(x, y).$$

En remplaçant z par $z + \zeta(x, y)$, ζ satisfaisant à la condition

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \rho\zeta + \sigma,$$

nous substituons au système précédent un système analogue où l'on aurait supprimé σ. Quant à l'équation (22) elle devient

$$\frac{\partial}{\partial x}(\omega\alpha^2 b^2) - \omega\tau\alpha^3 b^3 - \omega\alpha^2 b^2 z\frac{\partial(\alpha b)}{\partial x} = 0.$$

Nous avons d'abord $\alpha b = Y$. En remplaçant α par sa valeur, les équations de la transformation deviennent

$$p = \varpi(x, y)\,e^{\frac{Y}{b}p_1 - Yz} + \tau(x, y),$$
$$q = z_1 + \omega(x, y)\,e^{-Yz} + \rho z,$$

et, en prenant Yz et Yz_1 pour nouvelles fonctions inconnues, nous leur donnons la forme plus simple

$$(24)\qquad \begin{cases} p = \varpi e^{\frac{p_1}{b} - z} + \tau, \\ q = z_1 + \omega e^{-z} + \rho z. \end{cases}$$

Écrivons la condition (1),

$$\frac{\varpi}{b} e^{\frac{p_1}{b}-z}(ap_1+bz_1)+\frac{\partial\varpi}{\partial y} e^{\frac{p_1}{b}-z}-\frac{\varpi}{b^2}\frac{\partial b}{\partial y} p_1 e^{\frac{p_1}{b}-z}+\frac{\partial\tau}{\partial y}-\varpi e^{\frac{p_1}{b}-z}(z_1+\rho z)$$

$$-p_1-\frac{\partial\omega}{\partial x} e^{-z}-\frac{\partial\rho}{\partial x} z+\omega\tau e^{-z}-\rho\left(\varpi e^{\frac{p_1}{b}-z}+\tau\right)=0.$$

On aperçoit qu'il y a un terme en p_1 qui ne peut pas disparaître quelles que soient les expressions des fonctions ϖ, τ, ω, ρ ; les équations (24) ne peuvent donc dans aucun cas définir une transformation (B_2) telle que z_1 satisfasse à une équation linéaire.

8. On peut encore satisfaire à la condition (23) en supposant que θ soit une fonction linéaire de z ou en supposant que l'on ait

$$(25)\qquad b=0,\qquad \frac{\partial^3\theta}{\partial z^3}=0.$$

Examinons le premier cas : en raisonnant comme nous avons fait à plusieurs reprises, on voit que l'on peut supprimer dans θ le terme indépendant de z et écrire

$$p=g(x,y,p_1-bz),$$
$$q=z_1+\alpha(x,y)z.$$

L'équation (1) devient, en remplaçant p_1 par $u+bz$,

$$(26)\qquad a(u+bz)\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial y}-z\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u}-\alpha bz\frac{\partial g}{\partial u}-u-bz-\alpha g-z\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0,$$

et, en annulant le coefficient de z, nous trouvons

$$\left(ab-\frac{\partial b}{\partial y}-\alpha b\right)\frac{\partial g}{\partial u}-b-\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$(27)\qquad ab-\frac{\partial b}{\partial y}-\alpha b=0,\qquad b+\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0,$$

puisque, par hypothèse, f n'est pas une fonction linéaire de p_1, c'est-à-dire g n'est pas une fonction linéaire de u

Posons

$$\alpha=-\frac{\partial\eta}{\partial y},$$

il vient

$$b = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}, \qquad a = -\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}.$$

Quant à l'équation (26) elle se réduit à

$$au\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} - u - \alpha g = 0;$$

cette équation s'intègre facilement si l'on remplace a et α par leurs expressions et l'on a, en désignant par ω une fonction arbitraire,

$$g(x, y, u) = \frac{\dfrac{\partial \eta}{\partial x}}{\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}} u + e^{-\eta}\omega\left(x, \frac{e^{\eta} u}{\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}}\right).$$

Écrivons maintenant $p_1 - bz$ au lieu de u, b ayant la valeur indiquée plus haut, et nous avons les équations de la transformation de Bäcklund

$$p = \frac{\dfrac{\partial \eta}{\partial x}}{\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}} p_1 - \frac{\partial \eta}{\partial x} z + e^{-\eta}\omega\left(x, \frac{e^{\eta} p_1}{\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}} - e^{\eta} z\right),$$

$$q = z_1 - \frac{\partial \eta}{\partial y} z.$$

En prenant $e^{\eta} z$ comme nouvelle fonction inconnue, on met ces équations sous la forme un peu plus simple

$$(28) \qquad \left\{\begin{aligned} p &= e^{\eta} \frac{\dfrac{\partial \eta}{\partial x}}{\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}} p_1 + \omega\left(x, \frac{e^{\eta} p_1}{\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}} - z\right), \\ q &= e^{\eta} z_1. \end{aligned}\right.$$

z_1 satisfait à l'équation linéaire

$$s_1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \log \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}}{\partial y}\right) p_1 - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y} z_1 = 0,$$

à laquelle la transformation précédente fait correspondre

$$p = \frac{\dfrac{\partial \eta}{\partial x}}{\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}} \left(s - q\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \omega\left(x, \frac{s - q\dfrac{\partial \eta}{\partial x}}{\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}} - z\right).$$

Remarquons que, si après avoir permuté x et y on remplace $\frac{\partial\eta}{\partial y}$ par $a(x, y)$, cette dernière équation devient

$$(29) \qquad q = \frac{a}{\frac{\partial a}{\partial x}}(s - ap) + \omega\left(y, \frac{s - ap}{\frac{\partial a}{\partial x}} - z\right),$$

c'est-à-dire que l'on retrouve l'équation obtenue plus haut (n° 6). De chacun des deux systèmes de caractéristiques de cette équation on peut déduire une transformation (B_2) (¹) qui permet de la remplacer par une équation linéaire. En échangeant x et y dans les équations (28) on trouve

$$(30) \qquad \begin{cases} p = e^{\eta} z'_1, \\ q = e^{\eta} \dfrac{\frac{\partial\eta}{\partial y}}{\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}} q'_1 + \omega\left(y, \dfrac{e^{\eta} q'_1}{\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}} - z\right). \end{cases}$$

A l'aide de cette transformation on passe de l'équation (29) à

$$s'_1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial \log \frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}}{\partial x}\right) q'_1 - \frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} z'_1 = 0,$$

a étant toujours égale à $\frac{\partial\eta}{\partial y}$.

La transformation (30) de l'équation (29) est déduite du système de caractéristiques qui possède l'invariant y tandis que la transformation du n° 6 était déduite du système qui possède l'invariant x.

9. Nous avons laissé de côté les équations (25). La deuxième de ces équations exprime que θ est un polynome du second degré en z; en formant les fonctions f et φ et en écrivant qu'elles satisfont à la condition (1) on voit de suite que le coefficient de z^2 est nul et il semble que nous soyons immédiatement ramenés au cas précédent; mais, b étant nul, la première équation (27) ne donne plus a, il faut reprendre l'étude de cette question.

On a

$$p = g(x, y, p_1),$$
$$q = z_1 + \alpha(x, y) z,$$

(¹) Thèse, n° 4.

et la condition (1) s'écrit

$$ap_1 \frac{\partial g}{\partial p_1} + \frac{\partial g}{\partial y} - p_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial x} z - \alpha g = 0;$$

α est une fonction $\frac{Y'}{Y}$ de y seulement. Si l'on prend $\frac{z}{Y}$ pour nouvelle fonction et $\int \frac{dy}{Y}$ pour nouvelle variable à la place de y, on donne aux équations de la transformation la forme

$$p = g(x, y, p_1),$$
$$q = z_1,$$

g devant satisfaire à

$$ap_1 \frac{\partial g}{\partial p_1} + \frac{\partial g}{\partial y} - p_1 = 0.$$

En intégrant, on trouve

$$g = \frac{\eta}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} p_1 + \psi\left(\frac{p_1}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}, x\right),$$

ψ étant une fonction arbitraire, si l'on a posé

$$a = \frac{\partial \log \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\partial y}.$$

La transformation

$$p = \frac{\eta}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} p_1 + \psi\left(\frac{p_1}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}, x\right),$$
$$q = z_1$$

établit une correspondance entre les intégrales de l'équation

$$p - \frac{\eta}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} s = \psi\left(\frac{s}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}, x\right)$$

et celles de l'équation linéaire

$$s_1 - \frac{\partial \log \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\partial y} p_1 = 0.$$

En particulier, si η est égale à y, on voit que l'équation

$$p - sy = \psi(s, x),$$

intégrée par M. Goursat, a pour transformée

$$s_1 = 0.$$

10. Il faudrait encore considérer le cas où f est une fonction linéaire de p_1 et φ une fonction linéaire de z_1 : cette étude ne présente pas de difficulté; on trouve ainsi les transformations étudiées par M. Lucien Lévy qui permettent de déduire d'une équation linéaire une autre équation également linéaire dès que l'on connaît une intégrale de l'équation donnée.

En résumé, abstraction faite des équations linéaires, les équations que nous nous sommes proposé de déterminer sont les suivantes :

(I) $$s(x+y) = \Phi(p)\Psi(q),$$

$$[\Phi(p) = 1 + e^{p-\Phi(p)}, \qquad \Psi(q) = 1 + e^{q-\Psi(q)}],$$

(II) $$p - z\frac{s}{q} = g\left(x, \frac{s}{q}\right),$$

(III) $$s = 2\sqrt{b(x,y)pq},$$

(IV) $$s + qe^{-z} = 0,$$

(V) $$p - \frac{\eta}{\frac{\partial\eta}{\partial y}} s = \psi\left(\frac{s}{\frac{\partial\eta}{\partial y}}, x\right),$$

(VI) $$q = \omega\left(y, \frac{s - ap}{\frac{\partial a}{\partial x}} - z\right) + a(x,y)\frac{s - ap}{\frac{\partial a}{\partial x}}.$$

Les équations qui leur correspondent sont

(I)′ $$s_1 + \frac{p_1}{x+y} - \frac{z_1}{(x+y)^2} = 0,$$

(II)′ $$s_1 = 0,$$

(III)′ $$s_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log b}{\partial y} p_1 - b z_1 = 0,$$

(IV)′ $$s_1 = 0,$$

(V)′ $$s_1 - \frac{\partial \log \frac{\partial\eta}{\partial y}}{\partial y} p_1 = 0;$$

à l'équation (VI) on peut faire correspondre soit l'équation

$$(\text{VI})' \qquad s_1 - ap_1 - \frac{\partial a}{\partial x} z_1 = 0,$$

soit l'équation

$$(\text{VI})'' \qquad s_1 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \log\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}\right)}{\partial x}\right] q_1 - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y} z_1 = 0,$$

$$\left(a = \frac{\partial \eta}{\partial y}\right).$$

On peut passer de l'équation (VI)' à (VI)'' par une transformation de Laplace. Les équations (I) et (III) sont aussi telles que des deux systèmes de caractéristiques on puisse déduire une transformation (B_2) qui permette de passer de l'équation donnée à une équation linéaire, mais si l'on permute x et y chacune de ces équations est remplacée par une équation de même forme; les deux transformations ne sont donc pas essentiellement différentes comme celles dont dérivent (VI)' et (VI)''.

Remarquons encore que, si l'on excepte (III)' et (VI)'', toutes les équations linéaires que nous avons trouvées ont au moins un invariant nul [1].

---

[1] *Cf.* un Mémoire de M. Goursat (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. IV, 1902, p. 334).

NOTICE

SUR

Karl-Michailovitch PETERSON,

Par MM. D.-T. EGOROV et B.-K. MLODZIEIOWSKI.

Traduit du russe (1) **par M. Édouard DAVAUX,**

Ingénieur de la Marine à Toulon.

I. — KARL-MICHAILOVITCH PETERSON ET SES TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES,

Par M. B.-K. MLODZIEIOWSKI.

J'ai l'intention, dans cet aperçu, de donner des renseignements sur la vie et sur la caractéristique des travaux géométriques d'un de nos grands mathématiciens, Karl-Michaïlovitch Peterson. Bien que les mérites scientifiques de Peterson aient déjà rendu son nom célèbre de son vivant parmi les mathématiciens russes, ce n'est que dans ces dernières années qu'il est arrivé à une réputation plus juste et plus complète. Peterson s'occupa de deux branches des Mathématiques : des équations aux dérivées partielles et de la Géométrie différentielle. Ce furent, avant tout, ses recherches sur les équations aux dérivées partielles qui fixèrent sur lui l'attention et qui, en 1879, lui firent obtenir le grade de Docteur de l'Université de la Nouvelle Russie. Les travaux de Peterson sur la Géométrie différentielle furent aussi hautement appréciés par ses collègues immédiats de la Société mathématique de Moscou, mais ils furent moins connus

(1) Les deux Parties de cette Notice, dues respectivement, la première à M. Mlodzieiowski et la seconde à M. Egorov, ont paru séparément en 1903 dans le premier fascicule du Tome XXIV (p. 1-21 et 22-29) du *Recueil mathématique* (МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ), publié par la Société mathématique de Moscou; on a adopté comme titre, pour chaque Partie, la traduction française du titre russe de l'article correspondant.

dans de plus grands cercles de mathématiciens, peut-être parce que, à cette époque, on s'occupait peu en Russie de cette branche de la Géométrie. Et pourtant la première place appartient incontestablement à ces travaux de Peterson, par la richesse des résultats qu'il a obtenus et par l'abondance des idées profondes et ingénieuses. Tandis que Peterson, dans ses recherches sur les équations aux dérivées partielles, n'a fait que se mettre au niveau de ses contemporains, dans ses travaux de Géométrie il s'est placé sur beaucoup de points en avant de son temps. Quand plus tard les recherches de Peterson acquirent une plus grande notoriété, il fut reconnu qu'une série entière de propositions, trouvées plus tard par Darboux, Lie, Bianchi, Schwarz, Maurice Lévy et d'autres savants, avaient été déjà obtenues beaucoup plus tôt par Peterson. Mais, indépendamment des résultats, la méthode fondamentale dont s'est servi Peterson dans ses recherches est féconde au plus haut degré et sans aucun doute peut encore donner beaucoup de choses intéressantes et nouvelles. Dans ces derniers temps, les travaux de Peterson ont attiré de plus en plus sur eux l'attention des savants occidentaux, principalement des savants allemands. Le mérite en revient surtout au professeur Stäckel, de Kiel, dont de nombreux travaux se rapportent à l'étude de Peterson; le professeur Stäckel a publié (1) en 1901 une biographie de Peterson.

Pour faire connaître les circonstances très simples de la vie de Peterson, je me suis surtout servi des documents et renseignements mis gracieusement à ma disposition par le directeur de l'École de Pétropavlovsk, K.-R. Vernander, et par un professeur de cette école, K.-A. Grévé, qui avaient connu de près Peterson; je me suis servi aussi de la biographie de Peterson, que j'ai mentionnée plus haut, faite par le professeur Stäckel. En dehors de ces sources, j'ai emprunté quelques renseignements sur la vie de Peterson à l'*Aperçu sur la vie et les travaux d'auteurs russes défunts,* de D.-D. Jazikov, à la *Bibliographie russe,* année 1881, et à un article de V.-V. Bobinine sur Peterson dans le *Dictionnaire biographique russe.*

Karl-Michaïlovitch Peterson est né à Riga le 13 mai de l'année 1828; il descendait d'une famille bourgeoise et, à ce qu'il semble, lithuanienne.

Ayant terminé ses études au collège de Riga en 1847, il entra la même année à l'Université de Dorpat, où il s'occupa de sciences mathématiques et naturelles. A cette époque, Senff et Minding enseignaient les Mathématiques à l'Université de Dorpat. Peterson entendit chez Senff la théorie des courbes et des surfaces; mais le célèbre Minding fut surtout le guide de Peterson en Géométrie. Cet

(1) *Karl Peterson* (1828-1881), von Paul Stäckel, in Kiel (*Bibliotheca mathematica,* dritte Folge, zweiter Band, 1901, p. 122-132).

illustre savant publia une série de remarquables travaux sur la Théorie de la déformation des surfaces, se rapportant au fameux Mémoire de Gauss : *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Ainsi Minding découvrit entre autres l'invariabilité de la courbure géodésique dans la déformation d'une surface, il trouva les conditions de l'application d'une surface sur une autre et donna des surfaces applicables sur les surfaces de révolution. Les travaux suivants de Peterson ont un rapport direct avec ces travaux de Minding; c'est à lui-même que Peterson présenta sa thèse, et Minding l'apprécia par la mention *ausgezeichnet*.

Le professeur Stäckel, dans sa biographie de Peterson, fait connaître, d'après une Communication du professeur Kneser, le contenu de cette thèse, conservée dans les dossiers de l'Université de Dorpat. La première Partie se rapporte à la théorie des lignes sur les surfaces et principalement à la théorie de la courbure géodésique et de la courbure normale. Peterson y démontre le théorème simple et élégant qui suit :

Si une courbe est donnée sur une surface développable, sa relation en chaque point avec la surface est définie très simplement par l'inclinaison φ *de son plan osculateur sur le plan tangent à la surface développable, par l'angle* ω *de la tangente à la courbe avec une droite génératrice, et par la distance* l *du point de la courbe à l'arête de rebroussement, en la comptant sur la génératrice. Si les génératrices de la surface sont définies par un paramètre* t, *une équation de la forme* $f(l, \omega, \varphi, t) = 0$ *exprime la nature d'une courbe tracée sur la surface. Si la surface développable et la forme de la fonction* f *sont données, la courbe correspondante s'exprime sans constantes arbitraires, avec une ou deux constantes, selon que la fonction* f, *en plus de* t, *dépend seulement de* l, *ou également de* ω, *ou en outre de* φ; *inversement, si une courbe est donnée et si l'on recherche une surface développable pour laquelle une courbe donnée possède une propriété définie par une équation donnée* $f(l, \omega, \varphi, t) = 0$, *le nombre des constantes arbitraires dans l'équation de la surface sera* 0, 1 *ou* 2, *selon qu'il entre dans* f, *en plus de* t, *seulement* φ *ou également* ω, *ou en outre* l.

La seconde partie de la thèse de Peterson se rapporte à la déformation des surfaces. Peterson démontre que, si l'on connaît pour chaque point d'une surface, en plus des coefficients E, F, G de l'élément linéaire, les deux rayons de courbure principaux r_1 et r_2 et l'angle φ entre une des lignes de courbure et une des lignes de coordonnées sur la surface, la forme de la surface est par là entièrement définie; on voit facilement que r_1, r_2 et φ se relient immédiatement aux paramètres du second ordre L, M, N ou D, D′, D″, de sorte que la proposition de Peterson est, au fond, équivalente aux trois équations fondamentales de Mai-

nardi-Codazzi qui jouent un rôle si important dans la théorie des surfaces et qui expriment la même idée sous une forme plus symétrique et plus commode. Si nous appelons l'attention sur ce que Mainardi a donné ses formules en 1856 et sur ce que la thèse de Peterson est de 1853, nous devrons reconnaître, avec le professeur Stäckel, que le talent de Peterson l'avait déjà conduit dans ce premier travail sur une voie sûre et que, en la suivant, il devait arriver aux propositions les plus importantes de la théorie de la déformation des surfaces. Il est regrettable que l'idée émise par Peterson dans sa thèse n'ait pas reçu de lui, à ce qu'il semble, de développement ultérieur. Nous verrons ci-dessous que, dans ses travaux postérieurs, la théorie de la déformation l'occupa non pas tant en elle-même que dans son rapport avec d'autres formes de correspondance des surfaces.

Peterson étudia à l'Université de Dorpat de 1847 à 1852 et, au commencement de 1853, il subit l'examen de candidat. Comme on le voit par une copie du registre, Peterson passa brillamment son examen. Il obtint les notes les plus élevées dans tous les sujets, sauf deux; l'un de ces derniers était la *reine höhere Geometrie.* Il passa seulement *ziemlich gut* l'examen de langue russe obligatoire à Dorpat. C'est ici le lieu de remarquer que, bien que, selon l'attestation de personnes ayant connu Peterson dans la période moscovite de sa vie, sa façon de parler le russe donna toujours l'impression qu'il n'était pas d'origine russe, tous ses articles dans le *Recueil mathématique* n'en sont pas moins écrits dans une très belle langue, précise et claire.

Il est difficile de fixer avec précision l'époque à laquelle Peterson s'établit à Moscou, où il devint précepteur dans une famille distinguée. En 1865, Peterson entra comme professeur de Mathématiques à l'École allemande de Petropavlovsk en qualité de suppléant, et devint en 1879 professeur titulaire. Il sut transmettre à ses élèves une partie de cet amour de la Science qui l'animait lui-même, et beaucoup de ses élèves, entraînés par son enseignement, choisirent, à la fin de leur cours à l'École, la Faculté de Mathématiques. En outre, tous les anciens élèves de Petérson, avec lesquels j'ai eu occasion de m'entretenir, parlaient unanimement de lui comme d'un homme leur ayant inspiré un profond respect, non seulement par ses connaissances étendues, mais encore par son caractère droit et noble. S'étant établi à Moscou, Peterson fit partie du Cercle des Mathématiciens moscovites, groupés à cette époque autour des professeurs Braschmann et Davidov de l'Université de Moscou. Davidov avait été attaché à l'École de Petropavlovsk et, depuis 1866, il y avait même enseigné quelque temps les Mathématiques; selon toute apparence, il s'y rencontra avec Peterson. En octobre 1864, les membres de ce Cercle proposèrent de se réunir chaque mois, de septembre à avril, pour échanger des communications sur les différentes branches des Mathématiques. Peterson fut un des agents actifs de ces réunions et, dans le *Recueil*

mathématique, publié en 1866 par le Cercle, contenant les Communications lues par les membres du Cercle, se trouve son Mémoire *Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes,* qui inaugurait la série de ses travaux sur la Géométrie différentielle.

Le 23 janvier 1867, ce Cercle de mathématiciens fut réorganisé en Société mathématique de Moscou et, en même temps, le *Recueil mathématique* devint une publication périodique. Avec d'autres mathématiciens du Cercle, Peterson entra dans la nouvelle Société comme membre fondateur et continua à prendre part à ses travaux avec son ancienne ardeur. Les procès-verbaux des séances de la Société notent de lui, de 1865 à 1879, dix-huit Communications dans le domaine de la Géométrie différentielle et de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Peterson publia en même temps dans le *Recueil mathématique* six Mémoires, dont trois se rapportent à la Géométrie différentielle et trois à la théorie des équations aux dérivées partielles. Ces Mémoires sont les suivants :

1. Объ отношеніяхъ и сродствахъ между кривыми поверхностями (*Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes*), t. I, 1866, p. 391-438.

2. О кривыхъ на поверхностяхъ (*Sur les courbes tracées sur les surfaces*), t. II, 1867, p. 17-44.

3. Объ изгибаніи поверхностей второго порядка (*Sur la déformation des surfaces du second degré*), t. X, 1883, p. 476-523.

4, 5, 6. Объ интегрированіи уравненій съ частными производными (*Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*), t. VIII, 1877, p. 291-361; t. IX, 1878, p. 137-192; t. X, 1882, p. 169-223.

Les deux premiers Mémoires de Peterson, refondus et augmentés, furent publiés par lui en 1868 en langue allemande sous le titre : *Ueber Curven und Flächen.* Ce travail de Peterson est intéressant parce que nous y avons l'exposé le plus complet et le plus systématique des idées que Peterson prit pour base de ses recherches géométriques.

Le 28 novembre 1879, Peterson, sur la présentation des professeurs E.-T. Sabinine, N.-A. Oumov et V.-V. Preobrajensky, fut élevé par le Conseil de l'Université de la Nouvelle Russie au grade de Docteur *honoris causa* en Mathématiques pures. Comme on le voit par la présentation elle-même, publiée dans les Comptes rendus des séances du Conseil (*Mémoires de l'Université de la Nouvelle Russie,* t. XXX), la place principale fut assignée dans celle-ci aux recherches de Peterson sur les équations aux dérivées partielles; il fut fait seulement mention de ses travaux géométriques.

Peterson ne s'est pas marié. Il mena une vie paisible et retirée, occupant tout

son temps à des recherches scientifiques ou à des entretiens avec quelques amis, ses collègues à l'École de Petropavlovsk. En mars 1881, il tomba malade, et le 19 avril de la même année il mourut à l'hôpital de l'École d'une inflammation du péritoine.

Nous avons déjà dit que les idées de Peterson et les résultats qu'il obtint sont présentés de la façon la plus complète dans son livre *Ueber Curven und Flächen*. Aussi nous suivrons surtout ce livre pour l'exposé des travaux géométriques de Peterson. Son analyse circonstanciée est d'autant plus nécessaire qu'il est actuellement une curiosité bibliographique, et l'on ne peut que se joindre au professeur Stäckel pour souhaiter qu'il soit publié de nouveau.

Un des principaux mérites de Peterson dans la Géométrie différentielle des surfaces consiste en ce qu'il a indiqué la propriété suivante, simple et en même temps générale, de toute correspondance entre deux surfaces : dans toute correspondance entre deux surfaces, il existe en général sur chaque surface un système de lignes conjuguées auquel correspond sur l'autre un système également conjugué. Cette proposition apparaît avec toute sa simplicité fondamentale, dans la pleine acception du mot, dans la théorie de la correspondance des surfaces, non seulement parce que les variables, correspondant à ce réseau général conjugué, représentent par-dessus tout un système commode de coordonnées pour l'étude de la correspondance donnée, mais aussi parce que, entre les propriétés de la correspondance et les propriétés de ce réseau conjugué, existe un lien géométrique étroit. Nous verrons ci-dessous quels riches résultats Peterson a tirés de sa proposition, et en particulier dans la théorie de la déformation des surfaces.

Le livre *Ueber Curven und Flächen* fut publié par Peterson comme une première livraison après laquelle d'autres devraient paraître.

A en juger par plusieurs passages du livre, et aussi par des parties des Mémoires de Peterson qui n'entrèrent pas dans la première Partie du livre, on peut supposer que la seconde Partie devait être principalement consacrée à la représentation conforme ou, comme l'appelle Peterson, à la *relation graphique* des surfaces. La première livraison, qui représente par elle-même un tout complet, commence par l'exposé des propriétés fondamentales des courbes dans l'espace et des courbes sur les surfaces. Peterson y démontre une propriété fondamentale indiquée dans la suite par Darboux, à savoir que si u, v sont des coordonnées conjuguées sur une surface, les coordonnées cartésiennes x, y, z satisfont à une même équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = m \frac{\partial \theta}{\partial u} + n \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Ensuite Peterson introduit diverses familles de lignes qui doivent trouver leur application dans des recherches ultérieures. Telles sont les *lignes hélicoïdales*, dont les tangentes sont également inclinées sur une direction déterminée, les *lignes cylindriques et coniques*, représentant les lignes de contact avec la surface de cylindres et de cônes qui lui sont circonscrits. Peterson s'arrête avec une attention particulière sur deux familles remarquables de lignes, qu'il a appelées *lignes de lumière* et *lignes d'ombre* (*Licht- und Schattenlinien*). Les premières sont des lignes d'égal éclairement, c'est-à-dire les lieux géométriques des points pour lesquels un faisceau de droites normales rencontre une surface sous un angle constant; les lignes d'ombre sont les enveloppes des ombres portées par les normales à une surface sur les plans tangents correspondants dans l'hypothèse où les rayons lumineux sont parallèles. Peterson indique une série de propriétés intéressantes de ces lignes et découvre que les lignes de lumière et d'ombre, correspondant à une même direction des rayons incidents, forment sur la surface un réseau conjugué [1].

Plus loin, Peterson établit la notion d'une forme particulière d'équations qu'il a appelées *équations d'une courbe particulière avec des variables conjuguées*. Supposons que nous ayons sur une surface une famille de lignes dépendant d'un paramètre, par exemple une des familles de lignes coniques. Prenons sur la surface une famille de lignes conjuguées avec les lignes de la famille donnée et prenons les deux familles pour système de lignes de coordonnées sur la surface. Alors notre surface sera représentée avec les coordonnées u, v par des équations de la forme

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v),$$

où $u = \text{const.}$ représente l'équation de la famille que nous avons prise, et $v = \text{const.}$ de la famille conjuguée. Peterson appelle ces équations : *équations de courbes de forme donnée à variables conjuguées*. Si dans les fonctions φ entrent toutes les quantités arbitraires dont peuvent dépendre les lignes d'une famille donnée, ces équations seront les équations générales de la famille de courbes considérées. Peterson affirme que l'on peut obtenir les formes de ces équations sans connaître la surface sur laquelle sont les lignes cherchées; dans ce cas, les fonctions φ doivent dépendre encore d'une fonction arbitraire des coordonnées u, v dont la présence transforme les équations précédentes en l'équation d'une famille de lignes donnée sur une surface arbitraire. Les exemples donnés par Peterson en vue de l'application de cette idée sont très intéressants et l'on peut encore espérer beaucoup de son développement ultérieur. Peterson lui-même a appliqué sa méthode à la déduction des équations des courbes coniques et cylindriques, dont un cas particulier a été indiqué plus tard par Kœnigs. En désignant

---

[1] Cette proposition a été retrouvée en 1892 par M. Pieri.

par $\alpha(v)$, $\beta(v)$, $\gamma(v)$ les coordonnées des sommets des cônes circonscrits, Peterson trouve les équations générales suivantes des courbes coniques

$$x=\left(a+\int\alpha\frac{\partial w}{\partial v}dv\right):w,\qquad y=\left(b+\int\beta\frac{\partial w}{\partial v}dv\right):w,\qquad z=\left(c+\int\gamma\frac{\partial w}{\partial v}dv\right):w,$$

où a, b, c sont des fonctions de u, α, β, γ, de v, et où w dépend des deux variables. Nous avons pour les courbes cylindriques

$$x=a+\int\alpha w\,dv,\qquad y=b+\int\beta w\,dv,\qquad z=c+\int\gamma w\,dv.$$

Un cas particulièrement intéressant et élégant est celui où les deux familles de lignes conjuguées sont coniques. Alors les formules précédentes prennent la forme

$$x=\frac{\alpha+a}{l+\lambda},\qquad y=\frac{b+\beta}{l+\lambda},\qquad z=\frac{c+\gamma}{l+\lambda},$$

où a, b, c dépendent de u, et α, β, γ de v. Si le second système se compose de lignes cylindriques, alors $\lambda=\text{const.}$, et en remplaçant l par $\frac{1}{l}$, nous avons

$$x=l(a+\alpha),\qquad y=l(b+\beta),\qquad z=l(c+\gamma).$$

Enfin, dans le cas où les deux systèmes sont cylindriques, nous trouvons

$$x=a+\alpha,\qquad y=b+\beta,\qquad z=c+\gamma.$$

Ce sont les surfaces connues de translation, étudiées en détail par Peterson et trouvées dans la suite par Bianchi.

Peterson passe ensuite à l'exposé des idées fondamentales de ses travaux sur la correspondance, ou, comme il l'appelle, sur la *relation* et l'*affinité* des surfaces. Si à chaque point d'une surface correspond un point déterminé d'une autre et inversement, Peterson appelle cette dépendance une *relation* des surfaces : il est évident que cette relation s'exprime analytiquement par deux équations entre les coordonnées courantes (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) des points des deux surfaces ou par deux équations entre les coordonnées curvilignes (u, v), (u_1, v_1) sur ces surfaces. S'il est donné plus de deux équations entre ces quantités, la relation entre les surfaces correspondantes ne sera possible que dans le cas où toutes ces équations seront la conséquence de deux d'entre elles, ce qui, en général, impose des conditions aux surfaces elles-mêmes. Aussi une relation de la dernière sorte n'est pas possible entre tout couple de surfaces, mais seulement entre des surfaces qui se trouvent dans une dépendance réciproque déterminée. Peterson appelle ces relations des *affinités* de deux surfaces. Peterson démontre ici le théorème fondamental dont on a parlé plus haut, à savoir que dans chaque

relation ou affinité de deux surfaces il existe sur chacune d'elles un réseau de lignes conjuguées, auquel correspond sur l'autre surface un réseau également conjugué. Peterson appelle ce réseau, qui peut être réel, imaginaire ou formé de lignes confondues, la *base de la relation ou de l'affinité*. Comme exemples, Peterson indique les relations suivantes : 1° le *parallélisme,* pour lequel les normales correspondantes des deux surfaces sont parallèles; 2° la *perspective,* où les points correspondants des deux surfaces sont sur les rayons d'une gerbe de droites; 3° la *conjonction,* pour laquelle les deux surfaces ont aux points correspondants une tangente commune. Deux autres relations ne dépendent pas de la position relative des surfaces; 4° la *conjugaison,* pour laquelle à chaque système de lignes conjuguées sur une surface correspond un système conjugué sur l'autre; 5° la *relation graphique,* pour laquelle les angles correspondants sur les deux surfaces sont égaux entre eux. Il est évident par la définition même de la relation (4) que sa base est indéterminée.

Ensuite Peterson indique des formes diverses d'affinités. D'abord il est clair que si nous donnons, dans une relation donnée, la base de la relation, c'est-à-dire le système de lignes conjuguées qui reste conjugué sur la seconde surface, nous introduisons par là une nouvelle condition et nous n'obtenons plus une relation, mais une affinité; ainsi chaque relation sur une base donnée est une affinité. En outre, Peterson donne comme exemples d'affinités : 1° la *déformation;* 2° la *perspective graphique,* où deux surfaces se trouvent simultanément en relation graphique et en relation de perspective; 3° le *développement,* pour lequel une des surfaces est tangente aux normales de l'autre; 4° la *perspective parallèle,* pour laquelle les rayons vecteurs menés d'un point aux points de la première surface sont parallèles aux normales aux points correspondants de l'autre et réciproquement; 5° l'*affinité des plans correspondants,* où à des courbes planes d'une surface correspondent des courbes planes de l'autre.

Ainsi Peterson a eu en vue non seulement les formes de correspondance entre des surfaces qui étaient plus ou moins étudiées en détail à son époque, mais encore des formes dont la signification dans la théorie des surfaces n'a été découverte que plus tard. Ainsi le parallélisme se trouve en relation étroite avec la représentation sphérique d'une surface, la conjonction n'est pas autre chose que la correspondance entre les deux surfaces focales d'une congruence rectiligne, la conjugaison renferme comme cas particulier les congruences connues W_1 dans lesquelles les lignes asymptotiques des deux surfaces focales se correspondent l'une à l'autre. La perspective graphique également est tout à fait identique à l'inversion et à la similitude (¹); le développement est la relation entre une surface et sa développée; la perspective parallèle est, comme il n'est pas difficile de s'en

(¹) Ce résultat a été retrouvé en 1877 par Éd. Weyr.

convaincre, la transformation par polaires réciproques relative à une sphère de rayon égal à un; enfin, l'affinité de plans correspondants est identique à la collinéation. Dans les travaux imprimés de Peterson, beaucoup de ces relations ne sont qu'effleurées, bien que nous y trouvions beaucoup de choses intéressantes.

Dans les Mémoires de Peterson, les relations de parallélisme et de perspective sont étudiées plus en détail; aussi une grande attention est-elle portée sur l'application de ces deux transformations géométriques à des formes diverses d'affinité.

Peterson commence son étude du parallélisme par la démonstration du théorème suivant dont l'importance est évidente.

Dans tout couple de surfaces parallèles il existe deux familles de courbes conjuguées auxquelles les tangentes en deux points correspondants sont parallèles entre elles et qui représentent ainsi la base de la correspondance donnée.

Peterson a indiqué en même temps des relations simples permettant de passer d'une surface à une autre qui lui est *parallèle sur une base donnée :* sous la forme qu'il leur a donnée, elles conduisent à une suite de conséquences très importantes, en particulier dans la théorie de la déformation. Peterson a examiné avec une attention particulière le parallélisme sur une base rectangulaire, c'est-à-dire le cas où les lignes conjuguées qui servent de base au parallélisme sont rectangulaires, autrement dit sont des lignes de courbure. Comme sur la sphère toutes les lignes conjuguées sont orthogonales, le problème revient à l'étude du parallélisme d'une surface arbitraire avec la sphère. En prenant sur la sphère des circonférences de grands cercles pour l'une des deux familles de lignes conjuguées, Peterson en tire les équations générales des surfaces avec des lignes de courbure cylindriques.

Dans l'application du parallélisme à la théorie de la déformation, Peterson découvrit le théorème remarquable qui constitue un des ornements de son travail. Il consiste en ce qui suit. Supposons que l'on ait deux surfaces S et S', applicables l'une sur l'autre, et que l'on connaisse la base de la déformation, c'est-à-dire le système de lignes conjuguées qui demeure conjugué après déformation. Alors, si l'on sait trouver toutes les surfaces Σ parallèles à S sur la même base, et toutes les surfaces Σ' parallèles à S' sur cette base, les surfaces Σ' s'appliqueront sur les surfaces Σ.

Ce théorème permet, connaissant un couple de surfaces applicables l'une sur l'autre, d'en déduire une infinité d'autres couples semblables, pourvu que l'on sache résoudre pour les surfaces primitives le problème du parallélisme sur une base donnée. Ce dernier problème exige l'intégration d'une équation de Laplace et peut être résolu jusqu'au bout dans beaucoup de cas. Peterson a appliqué sa

méthode avec un succès éclatant à une série de cas particuliers en partie nouveaux, en partie déjà connus avant lui, mais résolus par des procédés particuliers et artificiels. Ainsi il a donné des surfaces applicables sur les surfaces de révolution (Minding), sur les hélicoïdes et sur les surfaces moulures (Bour). En outre, Peterson a déduit de là les surfaces applicables sur les surfaces minima trouvées ensuite en 1875 par Schwarz, les surfaces applicables sur les surfaces de translation obtenues en 1878 par Bianchi. De plus, Peterson a trouvé les surfaces spirales, qui ont la propriété d'être semblables à elles-mêmes, et il en a donné des déformations; ces surfaces ont également été découvertes en 1878 simultanément par Sophus Lie et Maurice Levy.

Les surfaces applicables sur les surfaces du second ordre trouvées par Peterson sont particulièrement remarquables. Peterson a considéré ces surfaces comme un cas particulier des surfaces de la forme

$$x = m(u)\mu(v), \qquad y = m(u)\nu(v), \qquad z = \eta(u),$$

où u et v sont les coordonnées d'un système conjugué de lignes coniques et cylindriques. Peterson a trouvé que ces lignes peuvent être prises pour base de la déformation et que sur cette base chaque surface de la forme indiquée peut être déformée sous une infinité de formes. J'ai considéré dans la suite en 1886 (¹) les déformations de ce genre avec plus de détails.

Dans les recherches de Peterson les lignes de déformation principales ont une grande importance. Peterson a appelé ainsi des lignes conjuguées sur une surface et telles qu'elles demeurent conjuguées dans la déformation de la surface, non pas dans une nouvelle forme quelconque, mais dans une infinité de nouvelles formes. Du théorème fondamental de Peterson résulte que si les lignes de déformation sont principales pour une surface donnée nous obtiendrons aussi des lignes de déformation principales, si nous transformons la surface donnée en une autre qui lui est parallèle, de façon que le système donné de lignes serve de base à ce parallélisme. Peterson lui-même a trouvé les lignes de déformation principales pour les surfaces de révolution, de translation, pour les surfaces minima, pour les surfaces du second ordre et pour les hélicoïdes s'appliquant sur une caténoïde. Le problème général des lignes de déformation principales des hélicoïdes a été résolu en 1896 par Stäckel.

Peterson a étudié en outre la relation de perspective. Il démontra ici cette proposition, que la perspective graphique, c'est-à-dire une transformation par perspective pour laquelle la similitude est conservée dans les parties infiniment petites,

(¹) *Mémoires scientifiques de l'Université de Moscou*, Section physico-mathématique, tome VII.

ne peut être qu'une transformation par similitude ou une inversion, proposition qui étend ses propriétés sur la transformation des surfaces, et qui fut démontrée par Liouville pour la transformation de l'espace. A ce sujet Peterson a démontré que la transformation considérée conserve les lignes de courbure, théorème qui fut démontré dans la suite par Darboux.

Peterson a ensuite donné le moyen de découvrir, pour une surface donnée, toutes les surfaces perspectives avec elle sur une base donnée et enfin il a démontré que toute transformation projective ou toute affinité des plans correspondants, comme il l'appelle, conserve la conjugaison de toutes les lignes sur les surfaces; cette même proposition fut également démontrée dans la suite par Darboux. Peterson en déduisit une équation générale très élégante des surfaces ayant un système de lignes conjuguées planes.

La dernière partie du Livre de Peterson est consacrée aux équations des lignes géodésiques. En remarquant que l'inversion conserve les lignes de courbure, Peterson appliqua aux surfaces avec des lignes de courbure cylindriques, dont les équations avaient été obtenues par lui antérieurement, successivement la transformation par inversion et la transformation par parallélisme, pour base de laquelle sont prises les lignes de courbure. Il obtient de cette manière des surfaces à lignes de courbure de plus en plus compliquées, et démontre que cette méthode permet d'obtenir l'équation générale des lignes de courbure avec deux séries de fonctions arbitraires d'une variable. Il donne lui-même sous forme de quadratures les équations générales de surfaces avec des lignes de courbure coniques et planes. Comme aux lignes de courbure d'une surface donnée correspond sur son développement une famille de lignes géodésiques et de lignes qui leur sont conjuguées, possédant l'équation de lignes de courbure avec un certain nombre de fonctions arbitraires, nous aurons alors l'équation des lignes géodésiques avec le même nombre de fonctions arbitraires.

Tels sont, dans les grandes lignes, les résultats obtenus par Peterson dans son Livre : *Ueber Curven und Flächen*. Comme ses deux premiers Mémoires ont paru presque en entier dans le *Recueil mathématique,* nous n'examinerons pas en détail ces articles, mais nous en donnerons brièvement le contenu.

Le Mémoire *Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes* contient la théorie générale des relations et des affinités, le théorème sur la base d'une relation, c'est-à-dire sur l'existence d'un réseau conjugué commun pour tout couple de surfaces correspondantes, la théorie de la relation de parallélisme et son application à la déformation des surfaces, la perspective graphique, la perspective conjuguée et l'affinité de plans correspondants. Dans ce Mémoire ne figurent pas les surfaces applicables sur les surfaces minima, ni celles applicables sur les surfaces moulures, mais en revanche il y a une déformation intéressante qui ne se rencontre pas dans l'Ouvrage allemand de Peterson. C'est la déformation

suivante :

$$x = \frac{\sin hc}{\cos hu + \cos v}, \qquad y = \frac{\sin cv}{\cos hu + \cos v}, \qquad z = \frac{a \cos hcu + b \cos cv}{\cos hu + \cos v},$$

$$x = \frac{c \sin hu}{\cos hu + \cos v}, \qquad y = \frac{c \sin v}{\cos hu + \cos v}, \qquad z = \frac{b \cos hcu + a \cos cv}{\cos hu + \cos v},$$

où les constantes a et b sont liées par la relation

$$b^2 - a^2 = 1.$$

Les deux surfaces ont un système de courbes conjuguées coniques $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Il est intéressant de remarquer que, dans les travaux de Peterson, sont considérés presque exclusivement les cas de déformation dans lesquels des courbes coniques et cylindriques servent de base de la déformation : tels sont, outre celui que l'on vient de citer, ceux des déformations des surfaces du second ordre et des surfaces de translation. Cela fait naître la supposition que Peterson a possédé des méthodes plus générales inconnues de nous, pour la résolution du problème de la déformation des surfaces de ce genre ([1]). Le dernier travail de Peterson *Sur la déformation des surfaces du second degré* fut livré à l'impression en 1882, après la mort de son auteur. Ce travail ne se trouve pas en relation très étroite avec le Livre : *Ueber Curven und Flächen*, auquel il n'emprunte que les déductions nécessaires pour le développement ultérieur du contenu principal du Mémoire.

L'article est consacré à l'étude plus détaillée des surfaces applicables sur les surfaces du second ordre qui ont été données par Peterson dans son premier Mémoire. Si l'on considère l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

les surfaces en question, qui sont applicables sur lui, sont représentées par les équations

$$x = r \cos\varphi \cos u, \qquad y = r \sin\varphi \cos u, \qquad z = \int \sqrt{a^2(1 - k^2)\sin^2 u + c^2 \cos^2 u}\, du,$$

([1]) Dans la séance de la *Société mathématique* du 15 octobre 1902 a été exposée une solution générale que j'ai trouvée du problème de la déformation des surfaces sur une base conique ou cylindrique.

où

$$r = \sqrt{a^2 k^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 v},$$

$$\varphi = \int \frac{a\sqrt{k^2(a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v) - (a^2 - b^2)\sin^2 v}}{a^2 k^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 v}\, dv.$$

Ici k est un paramètre de la déformation, u et v sont des coordonnées curvilignes, conjuguées pour toutes les surfaces d'une famille donnée, les lignes $u = \text{const.}$ sont des lignes coniques, $v = \text{const.}$ des lignes cylindriques; la surface primitive correspond à $k = 1$. Il est évident qu'en échangeant les rôles des axes nous pouvons obtenir pour chaque ellipsoïde trois familles de surfaces applicables semblables; en changeant les signes de a^2, b^2, c^2, nous trouvons des surfaces applicables sur d'autres surfaces à centre du second ordre.

Peterson appelle entre autres l'attention ici sur l'existence, pour les surfaces du second ordre, de *surfaces applicables en dehors des limites,* c'est-à-dire dont tous les points réels correspondent à des points imaginaires de la surface primitive. La possibilité analytique de telles surfaces applicables résulte de ce fait que l'expression d'un élément linéaire d'une surface donnée

$$\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$$

peut rester une forme quadratique positive des différentielles du, dv pour des valeurs réelles des coordonnées u, v auxquelles ne correspondent pas de points réels de la surface donnée, et même pour des valeurs complexes de ces coordonnées.

Peterson, dans son Mémoire, s'arrête surtout sur la déformation des surfaces du second ordre dont les longueurs d'axes prennent des valeurs limites particulières. Ces valeurs peuvent être de trois sortes : un axe peut devenir infini, ou nul, ou égal à un autre axe. Peterson examine ces trois cas et arrive à des conséquences paradoxales, mais très intéressantes.

Quand les axes d'une surface du second ordre deviennent infinis, la courbure des points qui s'éloignent à l'infini tend, en général, vers o. Dans ce cas, la surface devient un plan, et ses déformations ne présentent pas d'intérêt, mais il y a trois cas où la courbure ne tend pas vers o, mais vers une autre limite finie. Ce sera : 1° Quand $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a^2}$ ont des limites finies; 2° quand $\frac{a^2}{bc}$ a une limite finie; 3° quand $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ ont des limites finies. Dans le premier cas, on obtient les paraboloïdes ordinaires dont des déformations avaient été déjà trouvées par Peterson auparavant. Dans les deux autres cas, la surface du second ordre devient un plan, mais, par suite du choix des ordres d'infinitude des axes, la courbure de la partie de la surface qui s'éloigne ne tend pas vers o. Aussi on peut trouver une surface

courbe dont notre surface tend à prendre la forme à la limite, et, en outre, telle qu'aux régions finies de cette surface correspondront les points éloignés à l'infini de nôtre paraboloïde, et inversement. Peterson appelle ces *surfaces des déformées de paraboloïdes*. Parmi les trois cas précédents, le troisième est particulièrement remarquable, car l'élément linéaire y a une forme homogène qui, comme l'a démontré Peterson, correspond à une surface spirale.

On obtient de la même manière des déformations des surfaces à deux demi-axes égaux. Outre le simple passage à la limite qui conduit à la déformation ordinaire des surfaces de révolution, on obtient à la limite une autre forme de déformées de la manière suivante. Si nous rapportons les points d'une surface du second ordre, par exemple d'un ellipsoïde, à un système de coordonnées elliptiques sur la surface, nous obtenons l'élément linéaire de la surface sous la forme

$$ds^2 = \frac{u-v}{4}\left[\frac{u\,du^2}{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)} - \frac{v\,dv^2}{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}\right].$$

Tous les points réels de la surface s'obtiennent quand

$$a^2 \geqq u \geqq b^2, \qquad b^2 \geqq v \geqq c^2.$$

Si nous rapprochons maintenant les longueurs des demi-axes b et c, alors le domaine des valeurs de v se rétrécit et à la limite à tous les points de la surface correspondra une seule valeur

$$v = b^2 = c^2.$$

En outre, l'expression de l'élément linéaire, prenant maintenant la forme

$$ds^2 = \frac{u-v}{4}\left[\frac{u\,du^2}{(a^2-u)(b^2-u)^2} - \frac{v\,dv^2}{(a^2-v)(b^2-v)^2}\right],$$

conserve un sens même pour v non égal à b^2. De cette manière nous avons l'élément d'une surface, que nous pouvons appeler, d'après son origine, *déformée* d'une surface du second ordre à deux axes égaux; elle ne se déforme pas elle-même suivant une surface de révolution, et tous les points de la surface donnée du second ordre correspondent à des points éloignés à l'infini de la surface.

En supposant égaux les trois axes d'une surface du second ordre, nous obtiendrons de la même manière à la limite trois formes de déformées. Ce seront : 1° les déformées de la sphère; 2° les déformées d'une surface de révolution; 3° la déformée d'une surface générale du second ordre à trois axes égaux. Les déformées de la deuxième et de la troisième espèce sont telles que leurs points à distance finie correspondent à des points éloignés à l'infini des surfaces correspondantes du second ordre. On obtient de la même manière les déformées des surfaces du

second ordre avec des axes infiniment petits ; pour qu'elles soient déterminées, il est nécessaire qu'un demi-axe demeure fini ou tende vers l'infini, et que les deux autres demi-axes a et b tendent vers o, de telle sorte que le rapport $\frac{a}{b}$ ait pour limite l'unité.

Le trait caractéristique du talent de Peterson qui perce à travers tous ses travaux est cette conception nette à un degré suprême de la Géométrie, grâce à laquelle toute l'Analyse de Peterson est toujours exempte de complications superflues et se fond étroitement avec le sens géométrique. Les connaissances profondes de Peterson en Analyse, connaissances qu'il a manifestées d'une manière brillante dans ses travaux sur les équations aux dérivées partielles, se font sentir ici, bien qu'elles ne s'étalent pas aux yeux du lecteur sous des formes volumineuses et qu'elles ne donnent lieu à des conséquences purement géométriques, toujours remarquablement élégantes, que là où c'était possible.

Cet aperçu des travaux géométriques de Peterson montre que nous étions en droit d'affirmer que Peterson a été, dans ses travaux, non seulement tout à fait à la hauteur de son temps, mais encore en avance sur son temps. Bien que quelques-uns des résultats qu'il obtint aient été retrouvés dans la suite par d'autres savants, il est resté, dans les Mémoires de Peterson, encore beaucoup d'idées qui attendent d'être exploitées. On doit espérer que les recherches de Peterson obtiendront une plus grande notoriété, et que ses mérites scientifiques seront enfin appréciés comme ils le méritent.

II. — TRAVAUX DE K.-M. PETERSON SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

PAR M. D.-T. EGOROV.

On doit à K.-M. Peterson, sur la théorie des équations aux dérivées partielles, trois Mémoires qui ont été publiés dans les Tomes VIII, IX et X du *Recueil mathématique*, sous le titre général *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*. Ces Mémoires, qui s'élèvent au-dessus de tous les autres travaux scientifiques de l'auteur, lui ont valu, de l'Université impériale de la Nouvelle-Russie, le grade de docteur *honoris causa* en mathématiques pures. Dans le Tome 30 des *Mémoires de l'Université impériale de la Nouvelle-Russie,* a été publié à cette occasion un rapport de Sabinine, Préobrajensky et Oumov, professeurs à la Faculté physico-mathématique, contenant l'analyse des deux premiers Mémoires de K.-M. Peterson sur la Théorie des équations aux dérivées partielles avec l'in-

dication de tous les résultats auxquels l'auteur lui-même attachait le plus grand intérêt et qui sont reconnus par les critiques comme les plus importants. Dans l'état actuel de la théorie des équations aux dérivées partielles, les recherches de Peterson ne présentent peut-être pas un intérêt particulier au point de vue des résultats qui y sont contenus, car les plus importants de ces résultats se trouvent dans les travaux d'autres auteurs contemporains ou de devanciers de K.-M. Peterson; mais le mode même d'exposition de K.-M. Peterson présente de tels mérites, et les méthodes sur lesquelles est basée toute son étude sont si ingénieuses et si originales, qu'aujourd'hui même les trois Mémoires de K.-M. Peterson dans le *Recueil mathématique* n'ont pas perdu de leur importance et méritent une grande notoriété.

Le point de départ des travaux de K.-M. Peterson est la notion d'équations différentielles appelées *conditionnelles* (selon la terminologie de l'auteur), c'est-à-dire d'équations qui n'ont lieu que dans le cas où nous admettons l'existence d'une ou plusieurs équations différentielles, distinctes des premières et appelées *conditions*. Ainsi par exemple, si D et A sont deux expressions linéaires homogènes avec des différentielles totales de la forme

$$\mathrm{D} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i \, dx_i, \qquad \mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i \, dx_i,$$

où D_i et A_i sont des fonctions des variables x_i, et, s'il résulte des données de la question que, sous la condition que l'expression A s'annule, l'expression D s'annule nécessairement aussi : alors, selon la terminologie de K.-M. Peterson, l'équation $\mathrm{D} = 0$ est l'équation conditionnelle, et l'équation $\mathrm{A} = 0$ est la condition. Il faut, d'ailleurs, remarquer que, dans le cas considéré, les deux équations joueront souvent le même rôle et que l'on pourra prendre l'équation $\mathrm{D} = 0$ pour la condition et l'équation $\mathrm{A} = 0$ pour l'équation conditionnelle. Si les expressions D et A, après multiplication par des facteurs respectifs, deviennent des différentielles exactes, et si les relations

$$f(x_1, \ldots, x_n) = b,$$
$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = a$$

sont les intégrales des équations $\mathrm{D} = 0$ et $\mathrm{A} = 0$, alors, en vertu de notre hypothèse, la différentielle df ne s'annule que lorsque la différentielle $d\varphi$ s'annule, ou, ce qui revient au même, b ne reste constant que si a reste constant, et, par conséquent, nous avons, en général,

$$b = \psi(a)$$

ou

$$f = \psi(\varphi), \tag{1}$$

où ψ désigne une fonction arbitraire. La relation (1) sert d'expression analytique à la liaison qui existe entre les expressions différentielles D et A; elle est l'*intégrale* de l'équation conditionnelle $D = 0$ qui a lieu pour la condition $A = 0$.

Plusieurs équations conditionnelles différentes peuvent être données sous une même condition. Ainsi, si, sous la condition que l'expression différentielle A s'annule, les expressions différentielles B et C s'annulent, et si $\varphi = a$, $\psi = b$, $\chi = c$ sont respectivement les intégrales des équations $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, nous aurons

$$\psi = F(\varphi), \qquad \chi = \Phi(\varphi), \tag{2}$$

où F et Φ sont des fonctions arbitraires et où les relations (2) servent d'intégrales des équations conditionnelles $B = 0$, $C = 0$, données sous la condition $A = 0$.

De même une ou plusieurs équations conditionnelles peuvent être données sous *plusieurs* conditions. Ainsi, si l'expression différentielle D s'annule sous la condition que les expressions différentielles A et B s'annulent simultanément, et, si les relations $f =$ const., $\varphi =$ const., $\psi =$ const. servent respectivement d'intégrales aux équations $D = 0$, $A = 0$, $B = 0$, nous aurons alors

$$f = F(\varphi, \psi), \tag{3}$$

où F désigne une fonction arbitraire et où la relation (3) est l'intégrale de l'équation conditionnelle $D = 0$, donnée sous les conditions $A = 0$, $B = 0$. Peterson appelle *arguments des conditions,* les arguments φ et ψ dans la relation (3), de même que l'argument φ dans les relations (2) et (1).

Les premiers paragraphes du premier Mémoire de Peterson sont entièrement consacrés aux méthodes d'intégration et à l'étude de la forme des intégrales d'un système d'équations différentielles, composé d'équations *non conditionnelles* et de groupes d'équations conditionnelles dont chacune a lieu sous une condition. Les résultats de l'intégration, selon Peterson, s'expriment par des équations dans lesquelles entrent des fonctions arbitraires, dépendant chacune d'un argument.

Dans le Paragraphe 4 du premier Mémoire, K.-M. Peterson aborde le problème important de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles d'ordre n à deux variables indépendantes. A cet effet, il considère toutes les dérivées partielles

$$z_k^{(i)} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k},$$

au même titre que z, x, y, comme des variables indépendantes, liées par l'équation donnée

$$F(x, y, z, z', z_1, \ldots, z^{(n)}, z_1^{(n-1)}, \ldots, z_n) = 0 \tag{4}$$

et par les relations différentielles

$$(5) \qquad dz_k^{(i)} = z_k^{(i+1)}\,dx + z_{k+1}^{(i)}\,dy.$$

Cette manière de poser le problème se rencontre, avant Peterson, dans un Mémoire de Pfaff (*Abhandlungen der Berliner Akademie*, 1814-1815), mais seulement pour des équations du premier ordre, et à peu près en même temps, dans le Travail de N.-I. Sonine : *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Recueil mathématique*, t. VII); parmi les auteurs qui ont écrit après K.-M. Peterson, S. Lie a poursuivi ce point de vue d'une façon particulièrement persévérante.

Le fond de la méthode de K.-M. Peterson consiste en ceci : il adjoint à l'équation donnée (4) les équations $\frac{dF}{dx} = 0$ et $\frac{dF}{dy} = 0$, qui sont identiques en vertu de $F = 0$, et qui *font connaître que cette dernière a lieu pour x et y arbitraires*, et de plus les relations différentielles

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dz^{(n)} = z^{(n+1)}\,dx + z_1^{(n)}\,dy, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dz_n \;= z_n^1\,dx \quad + z_{n+1}\,dy, \end{array} \right.$$

et il se pose alors le problème d'éliminer des équations mentionnées les dérivées partielles d'ordre $n+1$ pour obtenir une relation entre les variables principales restantes $x, y, z, z', z_1, \ldots, z^{(n)}, \ldots, z_n$. Cette élimination, cela va sans dire, ne réussit pas, car le nombre des équations indépendantes est égal au nombre des variables éliminées, et Peterson arrive à une relation de la forme

$$(7) \qquad M + N z_{n+1} = 0,$$

où M et N sont des expressions différentielles, ne contenant pas les dérivées d'ordre $n+1$. Si l'on introduit, avec Peterson, les notations

$$u = -\frac{dy}{dx}, \qquad Z_k^{(i)} = \frac{\partial F}{\partial z_k^{(i)}}, \qquad Y = \frac{\partial F}{\partial y},$$

alors

$$N = Z^{(n)} u^n + Z_1^{(n-1)} u^{n-1} + \ldots + Z_n,$$

$$M\,dx = Y\,dx + Z^{(n)}\,dz_1^{(n-1)} + (Z^{(n)} u + Z_1^{(n-1)})\,dz_2^{(n-2)}$$
$$+ (Z^{(n)} u^2 + Z_1^{(n-1)} u + Z_2^{(n-2)})\,dz_3^{(n-3)} + \ldots.$$

En s'appuyant sur la relation (7), on peut seulement conclure, relativement aux variables *principales*, que l'expression M s'annule si l'on égale l'expression N à zéro, ou en d'autres termes : si l'on pose $dy + u_i\,dx = 0$, où u_i est une des

racines de l'équation *caractéristique* N = o. On obtient de cette manière *n équations conditionnelles*

$$M_i\,dx = 0, \qquad \text{si} \qquad dy + u_i\,dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

auxquelles il faut adjoindre toutes les équations non conditionnelles (5). En supposant que toutes les conditions et équations qui en dépendent sont intégrées, Peterson démontre que dans ce cas toutes les équations non conditionnelles (5) s'intègrent (au moyen de quadratures), et l'on obtient de cette manière l'intégrale générale F = o, dépendant de n fonctions arbitraires d'un argument.

On voit facilement que si l'on considère l'ensemble de toutes les équations différentielles, introduites par K.-M. Peterson pour une quelconque des racines u_i de l'équation *caractéristique* N = o, elles ne sont autres que les équations différentielles des variétés caractéristiques d'ordre n pour l'équation donnée F = o. Peterson se borne ainsi dans son étude presque exclusivement au cas où pour les équations différentielles de *chaque* système de caractéristiques il existe deux combinaisons intégrables; il obtient seulement dans ce cas par sa méthode l'intégrale générale de l'équation donnée.

Dans le Paragraphe 7 du premier Mémoire, Peterson introduit des équations conditionnelles d'ordre supérieur, en appliquant des raisonnements, entièrement semblables à ceux que l'on a cités plus haut, à une dérivée quelconque de l'équation donnée $\frac{d^{m+n}F}{dx^m\,dy^n} = 0$. Les équations différentielles auxquelles il arrive coïncident avec les équations différentielles des caractéristiques d'ordre supérieur.

Le deuxième Mémoire du *Recueil mathématique* est consacré principalement aux équations aux dérivées partielles linéaires et *bilinéaires,* qui admettent des équations conditionnelles d'un ordre inférieur d'une unité à l'ordre de l'équation donnée, en d'autres termes, qui admettent des variétés caractéristiques d'ordre inférieur. Il semble que Peterson ait ignoré que des équations de forme plus générale peuvent posséder une propriété semblable.

Enfin, le troisième Mémoire est consacré à l'extension des méthodes précédentes à des équations avec un nombre quelconque de variables indépendantes. Peterson est obligé pour cela de considérer des équations conditionnelles, ayant lieu sous *plusieurs* conditions, par suite de quoi s'introduisent dans l'intégration des fonctions arbitraires de plusieurs arguments.

On trouve comme résultat que toutes les équations aux dérivées partielles se partagent en trois classes : 1° les équations du *premier* ordre avec un nombre arbitraire de variables indépendantes; 2° les équations d'un ordre quelconque avec *deux* variables indépendantes; 3° les équations du second ordre et d'ordre

supérieur à deux avec trois et plus de trois variables indépendantes. La méthode de K.-M. Peterson est *toujours* applicable aux équations de la première et de la deuxième classe, en ce sens que pour une équation *quelconque* de ces deux classes on peut former un système d'équations conditionnelles et non conditionnelles, dont l'intégration est équivalente à l'intégration de l'équation donnée; en ce qui concerne les équations de la troisième classe, cette méthode ne s'applique pas, en général, et l'on ne réussit que pour quelques types spéciaux d'équations de la troisième classe à former un système d'équations différentielles (conditionnelles et non conditionnelles) dont l'intégration conduit à *la* détermination de l'intégrale générale de l'équation donnée. On peut expliquer cette différence essentielle entre les équations des deux premières classes et celles de la dernière, comme l'a remarqué Peterson, par ce fait que l'intégrale générale pour la première classe dépend *d'une* fonction arbitraire, pour la deuxième classe de plusieurs fonctions arbitraires, mais, en outre, *d'un* argument, et pour la troisième classe de plusieurs fonctions arbitraires de plusieurs arguments.

Tel est, dans ses lignes les plus générales, le contenu de l'étude de K.-M. Peterson. Comme nous le voyons, les résultats donnés par l'auteur sur l'intégration des équations aux dérivées partielles sont presque tous connus maintenant, mais ils sont tous obtenus à l'aide d'une méthode générale et à un point de vue général. D'ailleurs, les mérites de l'œuvre de Peterson ne se bornent pas là, et l'on pourrait citer toute une série de points isolés, présentant chacun un intérêt particulier; si l'on tient compte encore de l'abondance heureuse des exemples importants qu'il a réunis, et qui illustrent toutes les parties de ses recherches, on peut dire à bon droit que les Mémoires de K.-M. Peterson sur la théorie des équations aux dérivées partielles méritent encore maintenant d'être sérieusement étudiés.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DU TOME CINQUIÈME DE LA DEUXIÈME SÉRIE.

32824 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

TABLE DES MATIÈRES (Fascicule N° 4, 1905).

[illegible] Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.




STORAGE

